8. **Лихачев В. А., Малыгин Г. А.** Температурное последействие в цинке //ФММ.— 1963.— Т. 16, вып. 5.
9. **Лихачев В. А., Владимиров В. И.** Роль упрочнения в ползучести и температурном последействии // ФММ.— 1965.— Т. 19, вып. 1.
10. **Кадашевич Ю. И., Кузьмин М. А.** Описание возврата пластических свойств конструкционного материала на основе учета микропластической неоднородности // Пробл. прочности.— 1982.— № 4.
11. **Давиденков Н. Н., Лихачев В. А.** Необратимое формоизменение металлов при циклическом тепловом воздействии.— М.; Л.: Машгиз, 1962.
12. **Малыгин Г. А., Лихачев В. А.** Роль анизотропии теплового расширения и тепловых микронапряжений // Завод. лаб.— 1966.— Т. 32, № 3.

Поступила 20/V 1986 г.

УДК 539.3

НЕДИССИПАТИВНЫЕ НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Г. В. Иванов

(Новосибирск)

Упругие деформации элемента сплошной среды — часть деформаций элемента, которая после его разгрузки (снятия внешних воздействий) исчезает. Неупругие (остаточные) деформации — часть деформаций элемента, которая остается в нем после его разгрузки. Наряду с неупругими деформациями элемента, при которых механическая энергия переходит в тепло, возможны недиссипативные неупругие деформации, т. е. такие, при которых механическая энергия не переходит в тепло.

Одним из простейших наглядных примеров процесса деформирования с недиссипативными неупругими деформациями может быть деформирование системы из двух упругих пружин и стержня (рис. 1 из [1]). При деформировании этой системы механическая энергия в тепло не переходит, но из-за односторонних зажимов A процесс разгрузки протекает иначе, чем процесс нагружения, вследствие чего зависимость между приложенной к стержню силой p и перемещением Δ стержня будет иметь вид, указанный на рис. 2, где Δ^* — недиссипативная неупругая деформация системы.

В данной работе формулируются уравнения, определяющие недиссипативные неупругие деформации элемента сплошной среды.

1. Деление деформаций на упругие и неупругие. В качестве тензора деформаций примем [2]

$$\varepsilon_{ij}e^i e^j = \widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta}Э^\alpha Э^\beta,\quad \widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(Э_\alpha \cdot Э_\beta - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) \tag{1.1}$$

($Э^\alpha$, $\mathbf{e}^i$ — базисные векторы лагранжевой и декартовой систем координат).

Состояние элемента среды, от которого отсчитываются деформации, назовем начальным. Полагаем, что напряжения в начальном состоянии равны нулю, плотность и температура равны заданным, отличным от нуля значениям ρ_0, T_0 и на любом этапе процесса деформирования элемента среды можно его «полностью разгрузить» до состояния с равными нулю напряжениями и температурой T_0 (вырезая элемент из среды, нагревая или охлаждая его до температуры начального состояния и давая ему возможность свободно деформироваться).

В газообразных средах равенство нулю напряжений возможно лишь при равной нулю плотности. В этом случае в качестве начального принимается состояние, в котором среднее напряжение и температура равны заданным, отличным от нуля значениям, а под «полной разгрузкой» понимается переход в состояние со средним напряжением и температурой, равными их значениям в начальном состоянии.

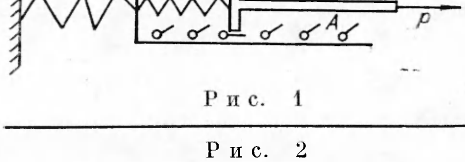

Рис. 1

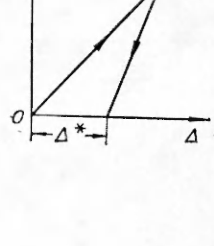

Рис. 2

Обозначим через $Э^*_\alpha$, $Э^\alpha_*$, $\widehat{\varepsilon}^*_{\alpha\beta}$ лагранжевы базисные векторы и компоненты тензора деформаций в состоянии «полной разгрузки». Следуя [2], назовем $\gamma_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \widehat{\gamma}_{\alpha\beta}Э^\alpha Э^\beta$, $\widehat{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(Э_\alpha\cdot Э_\beta - Э^*_\alpha\cdot Э^*_\beta)$, тензором упругих деформаций. Разность тензоров $\varepsilon^*_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \widehat{\varepsilon}^*_{\alpha\beta}Э^\alpha Э^\beta$, $\widehat{\varepsilon}^*_{\alpha\beta} = (\widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \widehat{\gamma}_{\alpha\beta})/2$, назовем тензором неупругих деформаций. Таким образом, в общем случае деформирования элемента среды компоненты ε_{ij} тензора деформаций представляются в виде суммы компонент γ_{ij}, ε^*_{ij} тензоров упругих и неупругих деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} + \varepsilon^*_{ij}. \tag{1.2}$$

Дифференцируя по времени формулы связи между компонентами $\widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и ε_{ij} тензора деформаций и используя равенства

$$\frac{d\widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{dt}Э^\alpha Э^\beta = e_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right),$$

$$\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{e}^i\cdot\frac{dЭ_\alpha}{dt}\right) = \varepsilon_{sj}\frac{\partial u^s}{\partial x^i}(\mathbf{e}^i\cdot Э_\alpha),$$

получим

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = e_{ij} - \varepsilon^k_i\frac{\partial u_k}{\partial x^j} - \varepsilon^k_j\frac{\partial u_k}{\partial x^i}, \tag{1.3}$$

где t — время; x^i, u^i — декартовы координаты и компоненты вектора скоростей частицы.

Из (1.2), (1.3) следует

$$\frac{d\gamma_{ij}}{dt} = e_{ij} - \gamma^k_i\frac{\partial u_k}{\partial x^j} - \gamma^k_j\frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \varphi_{ij}; \tag{1.4}$$

$$\varphi_{ij} = \frac{d\varepsilon^*_{ij}}{dt} + \varepsilon^*_{ik}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} + \varepsilon^*_{jk}\frac{\partial u^k}{\partial x^i}. \tag{1.5}$$

Тензор $\varphi_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \frac{d\widehat{\varepsilon}^*_{\alpha\beta}}{dt}Э^\alpha Э^\beta$ назовем тензором скоростей неупругих деформаций. Обозначим через γ, e, φ первые инварианты тензоров упругих деформаций, скоростей деформаций и скоростей неупругих деформаций $\gamma = \delta^{ij}\gamma_{ij}$, $e = \delta^{ij}e_{ij}$, $\varphi = \delta^{ij}\varphi_{ij}$. Из (1.4) вытекает

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)e - 2\gamma'_{ij}e'^{ij} - \varphi; \tag{1.6}$$

$$\frac{d\gamma'_{ij}}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)e'_{ij} - \gamma'_{jk}\frac{\partial u^k}{\partial x^i} - \gamma'_{ik}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\gamma'_{\nu\mu}e'^{\nu\mu} - \varphi'_{ij}. \tag{1.7}$$

Здесь γ'_{ij}, e'_{ij}, φ'_{ij} — компоненты девиаторов упругих деформаций, скоростей деформаций и скоростей неупругих деформаций $\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\gamma$, $e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e$, $\varphi'_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varphi$.

2. Деление деформаций на диссипативные и недиссипативные. Ограничимся случаем, когда внутренняя энергия U — функция только упругих деформаций γ_{ij} и энтропии S:

$$U = U(\gamma_{ij}, S). \tag{2.1}$$

Тогда закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{\partial U}{\partial\gamma_{ij}}\left(e_{ij} - \gamma_{ik}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} - \gamma_{jk}\frac{\partial u^k}{\partial x^i} - \varphi_{ij}\right) + T\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho}(\sigma^{ij}e_{ij} - \operatorname{div}\mathbf{q}),$$

где ρ — плотность; q — вектор потока тепла; T — температура (T =

$= \partial U/\partial S$). По второму закону термодинамики необходимо, чтобы

$$D = T\frac{dS}{dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{q} \geqslant 0 \tag{2.2}$$

(D — мощность диссипации).

Скорости неупругих деформаций представим в виде суммы

$$\varphi_{ij} = \psi_{ij} + \varphi_{ij}^{(1)}. \tag{2.3}$$

Здесь ψ_{ij} — скорости неупругих деформаций, от которых зависит D; $\varphi_{ij}^{(1)}$ — скорости неупругих деформаций, от которых не зависит D. Делению скоростей неупругих деформаций на диссипативные и недиссипативные соответствует определяемое, согласно (1.5), формулами

$$\varepsilon_{ij}^{*} = \varepsilon_{ij}^{**} + \varepsilon_{ij}^{*(1)},\quad \frac{d\varepsilon_{ij}^{**}}{dt} = \psi_{ij} - \varepsilon_{ik}^{**}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} - \varepsilon_{jk}^{**}\frac{\partial u^k}{\partial x^i},$$

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^{*(1)}}{dt} = \varphi_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ik}^{*(1)}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} - \varepsilon_{jk}^{*(1)}\frac{\partial u^k}{\partial x^i}$$

деление неупругих деформаций ε_{ij}^{*} на диссипативные деформации ε_{ij}^{**} и недиссипативные $\varepsilon_{ij}^{*(1)}$.

Полагаем, что упругие деформации элемента среды недиссипативны. Тогда законы термодинамики допускают возможность любых значений ψ_{ij}, $\varphi_{ij}^{(1)}$, при которых выполняются условия

$$D = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}}\psi_{ij} \geqslant 0; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}}\left(e_{ij} - \gamma_{ik}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} - \gamma_{jk}\frac{\partial u^k}{\partial x^i} - \varphi_{ij}^{(1)}\right) - \frac{1}{\rho}\sigma^{ij}e_{ij} = 0. \tag{2.5}$$

3. Уравнения деформирования элемента среды с недиссипативными неупругими деформациями. Представим скорости недиссипативных неупругих деформаций как сумму

$$\varphi_{ij}^{(1)} = C_{ij}^{ks}\frac{\partial u^k}{\partial x^s} + \varphi_{ij}^{(2)}, \tag{3.1}$$

где C_{ij}^{ks} — произвольные функции упругих деформаций и других параметров деформирования, удовлетворяющие условию $C_{ij}^{ks} = C_{ji}^{ks}$, необходимому для симметрии тензора деформаций; $\varphi_{ij}^{(2)}$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию $\varphi_{ij}^{(2)} = \varphi_{ji}^{(2)}$.

Подставляя (3.1) в (2.5), находим, что (2.5) имеет вид

$$\left[\frac{1}{\rho}\sigma^{ij} - \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}} - 2\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ik}}\gamma_k^j - \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ks}}C_{ks}^{ij}\right)\right]\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}}\varphi_{ij}^{(2)} = 0. \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) будет выполнено при произвольных $\partial u_i/\partial x^j$, если зависимость напряжений от упругих деформаций, энтропии и функций C_{ks}^{ij} определить равенствами

$$\sigma^{ij} = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}} - 2\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ik}}\gamma_k^j - \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ks}}C_{ks}^{ij}\right) \tag{3.3}$$

и потребовать, чтобы скорости $\varphi_{ij}^{(2)}$ неупругих деформаций удовлетворяли условию

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}}\varphi_{ij}^{(2)} = 0. \tag{3.4}$$

Очевидно, функцию (2.1) можно рассматривать как функцию γ, γ_{ij}', S и соответственно равенство (3.4) записать как

$$\varphi^{(2)} = -\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}'}\varphi_{ij}'^{(2)}\Big/\frac{\partial U}{\partial \gamma},\quad \varphi^{(2)} = \delta^{ij}\varphi_{ij}^{(2)},\quad \varphi_{ij}'^{(2)} = \varphi_{ij}^{(2)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varphi^{(2)}. \tag{3.5}$$

Таким образом, (3.4) можно интерпретировать как условие (3.5), определяющее зависимость части $\varphi^{(2)}$ скорости объемной деформации от частей $\varphi_{ij}^{'(2)}$ скоростей деформаций сдвига. При этом возможна произвольная зависимость $\varphi_{ij}^{'(2)}$ от упругих деформаций и других параметров деформирования, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_{ij}^{'(2)} = \varphi_{ji}^{'(2)}, \ \delta^{ij}\varphi_{ij}^{'(2)} = 0. \tag{3.6}$$

Уравнения (3.3) содержат плотность. Поэтому необходимо дополнить их уравнением неразрывности

$$d\rho/dt = -\rho e, \tag{3.7}$$

определяющим зависимость плотности от скоростей деформаций.

Если зависимость скоростей ψ_{ij} диссипативных неупругих деформаций от упругих деформаций и других параметров деформирования задана, уравнения (1.4), (2.2)—(2.4), (3.1), (3.3), (3.5)—(3.7) образуют модель сплошной среды, в которой наряду с упругими и диссипативными неупругими деформациями могут быть недиссипативные неупругие деформации.

4. Недиссипативные неупругие деформации, связанные с упрощением уравнений упругого деформирования. Рассмотрим уравнения деформирования с внутренней энергией

$$U = f + T_0\theta + \frac{2\mu}{\rho_0}\Gamma + cT, \ f = f(\gamma), \ \theta = \theta(\gamma), \ \Gamma = \frac{1}{2}\gamma'_{ij}\gamma'^{ij}. \tag{4.1}$$

Здесь T_0, μ, ρ_0, c — постоянные; T — функция упругих деформаций и энтропии S, определяемая уравнением

$$c\frac{dT}{dt} = T\frac{d}{dt}(S - \theta). \tag{4.2}$$

Полагая в (1.6), (1.7) $\varphi = \varphi'_{ij} = 0$ и считая упругие деформации недиссипативными, из закона сохранения энергии находим, что в случае (4.1), (4.2) уравнения упругого деформирования элемента среды записываются в виде

$$\sigma = \rho\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)\frac{\partial U}{\partial \gamma} - \underline{\frac{8\mu\rho}{3\rho_0}\Gamma}, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{df}{d\gamma} - (T - T_0)\frac{d\theta}{d\gamma}; \tag{4.3}$$

$$\sigma'_{ij} = \frac{2\mu\rho}{\rho_0}\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)\left[1 - \frac{\rho_0}{\mu\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)}\frac{\partial U}{\partial \gamma}\right]\gamma'_{ij} - \frac{4\mu\rho}{\rho_0}\left(\gamma_i'^{\nu}\gamma'_{j\nu} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\Gamma\right); \tag{4.4}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)e - 2\gamma'_{ij}e'^{ij}, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho e; \tag{4.5}$$

$$\frac{d\gamma'_{ij}}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)e'_{ij} - \gamma'_{jk}\frac{\partial u^k}{\partial x^i} - \gamma'_{ik}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\gamma'_{\nu\mu}e'^{\nu\mu}. \tag{4.6}$$

Во многих твердых телах компоненты γ'_{ij} девиатора упругих деформаций малы по сравнению с единицей, например, в металлических телах они являются величинами порядка отношения предела текучести к модулю Юнга. В этих телах подчеркнутое в (4.3) слагаемое мало и его следовало бы опустить, т. е. (4.3) следовало бы заменить уравнениями

$$\sigma = \rho\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)\frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} - (T - T_0)\frac{d\theta}{d\gamma}. \tag{4.7}$$

По этой же причине (4.4) следовало бы заменить уравнениями

$$\sigma'_{ij} = \frac{2\mu\rho}{\rho_0}\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)\left[1 - \frac{\rho_0}{\mu\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)}\frac{\partial U}{\partial \gamma}\right]\gamma'_{ij}. \tag{4.8}$$

Однако такая замена приведет к системе (4.5)—(4.8), которая не будет термодинамически корректной (не будет удовлетворять закону сохранения энергии). Даже тогда, когда нарушение закона сохранения энергии мало и, следовательно, не приведет к каким-либо существенным физическим противоречиям, сам факт, что из системы уравнений не вытекает закон сохранения энергии, может, например, существенно осложнить формулировку и обоснование алгоритмов численного решения задач с использованием этой системы.

Для того чтобы при замене (4.3), (4.4) уравнениями (4.7), (4.8) сохранить термодинамическую корректность системы уравнений деформирования, необходимо вместе с заменой изменить и (4.6). Изменение (4.6) означает введение в (1.7) соответствующих компонент φ'_{ij} девиатора скоростей неупругих деформаций. Полагая в (1.7)

$$\varphi'_{ij} = -\gamma'_{ik}e^k_j - \gamma'_{jk}e^k_i + \frac{2}{3}\sigma_{ij}\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta}, \tag{4.9}$$

находим, что производные компонент γ'_{ij} девиатора упругих деформаций по времени в случае (4.9) будут связаны со скоростями деформаций и углов поворота уравнениями

$$\frac{d\gamma'_{ij}}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)e'_{ij} - \gamma'^k_j\omega_{ki} - \gamma'^k_i\omega_{kj}, \tag{4.10}$$

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\right).$$

Нетрудно убедиться, что система (4.5), (4.7), (4.8), (4.10) термодинамически корректна. Она удовлетворяет закону сохранения энергии с равной нулю мощностью диссипации, и поэтому скорости неупругих деформаций, определяемые формулами (4.9),— скорости недиссипативных неупругих деформаций. Если эти скорости малы по сравнению со скоростями e_{ij} деформаций, процесс деформирования по (4.5), (4.7), (4.8), (4.10) можно считать упругим.

Слагаемое $\rho_0/\mu(1-2\gamma/3)\cdot\partial U/\partial\gamma$ в (4.8) во многих случаях может быть малым (порядка отношения среднего напряжения σ к модулю μ упругого сдвига). Условие сохранения термодинамической корректности системы уравнений деформирования элемента среды при упрощении (4.8) путем замены их уравнениями

$$\sigma'_{ij} = \frac{2\mu\rho}{\rho_0}\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)\gamma'_{ij} \tag{4.11}$$

требует замены (4.5) уравнениями

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)e, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho e, \tag{4.12}$$

т. е. введения в (1.6) скорости недиссипативного неупругого изменения объема $\varphi = -2\gamma'_{ij}e'^{ij}$.

Аналогично можно провести дальнейшее упрощение системы (4.7), (4.10)—(4.12) путем введения соответствующих недиссипативных неупругих деформаций. Например, полагая в (1.6), (1.7)

$$\varphi = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma - \frac{\rho_0}{\rho}\right)e - 2\gamma'_{ij}e'^{ij}, \tag{4.13}$$

$$\varphi'_{ij} = \left(1 - \frac{2}{3}\gamma - \frac{\rho_0}{\rho}\right)e'_{ij} - \gamma'^k_j e_{ki} - \gamma'^k_i e_{kj} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta},$$

получим

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\gamma'_{ij}, \ \sigma = \rho_0\frac{\partial U}{\partial\gamma}, \ \frac{\partial U}{\partial\gamma} = \frac{df}{d\gamma} - (T - T_0)\frac{d\theta}{d\gamma}, \tag{4.14}$$

$$\frac{d\gamma'_{ij}}{dt} = \frac{\rho_0}{\rho}e'_{ij} - \gamma'^k_i\omega_{kj} - \gamma'^k_j\omega_{ki}, \ \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\rho_0}{\rho}e, \ \frac{d\rho}{dt} = -\rho e.$$

При малом изменении плотности условия термодинамической корректности уравнений можно ослабить, заменив их приближенными условиями

$$\frac{dU}{dt}=\frac{1}{\rho_0}\left(\sigma^{ij}e_{ij}-\operatorname{div}\mathbf{q}\right),\ D=T\frac{dS}{dt}+\frac{1}{\rho_0}\operatorname{div}\mathbf{q}\geqslant 0. \tag{4.15}$$

Уравнения (1.6), (1.7) и условия (4.15) будут выполнены, если в (4.13), (4.14) положить ρ равным ρ_0.

5. Недиссипативные неупругие деформации, связанные с изменением «модулей» упругости. Упрощение уравнений упругого деформирования — лишь одна из причин появления в уравнениях сплошной среды неупругих недиссипативных деформаций. Другой причиной может быть введение в уравнения деформирования элемента среды недиссипативных неупругих деформаций с целью описания разнообразных явлений, таких, например, как различие в сопротивлении элемента среды деформированию и разрушению при растяжении и сжатии, охрупчивание (снижение в процессе деформирования сопротивления хрупкому разрушению), разрыхление (уплотнение) при сдвиговых деформациях, локализация деформаций при разрушении и т. п.

Возможности описания этих явлений путем введения недиссипативных неупругих деформаций рассмотрим на примере среды, в которой внутренняя энергия задана в виде равенств (4.1), (4.2) и наряду с упругими деформациями могут быть лишь недиссипативные неупругие деформации со скоростями вида

$$\varphi=\chi_1 e+2\chi_2\gamma'_{ij}e'^{ij},$$
$$\varphi'_{ij}=\chi_3 e'_{ij}+\frac{2}{3}\delta_{ij}\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta}-\gamma'^{k}_{j}e_{ki}-\gamma'^{k}_{i}e_{kj} \tag{5.1}$$

(χ_k, $k=1, 2, 3$, — произвольные функции упругих деформаций и других параметров деформирования). В рассматриваемом случае производные упругих деформаций по времени связаны согласно (1.6), (1.7) со скоростями деформаций равенствами

$$\frac{d\gamma}{dt}=\left(1-\frac{2}{3}\gamma-\chi_1\right)e-2\left(1+\chi_2\right)\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta},$$
$$\frac{d\gamma'_{ij}}{dt}=\left(1-\frac{2}{3}\gamma-\chi_3\right)e'_{ij}-\gamma'^{k}_{i}\omega_{kj}-\gamma'^{k}_{j}\omega_{ki}, \tag{5.2}$$

уравнения (3.3) записываются как

$$\sigma=\rho\left(1-\frac{2}{3}\gamma-\chi_1\right)\frac{\partial U}{\partial\gamma},\quad \sigma'_{ij}=2\tilde{\mu}\gamma'_{ij},$$
$$\frac{\partial U}{\partial\gamma}=\frac{df}{d\gamma}-(T-T_0)\frac{d\theta}{d\gamma},\quad f=f(\gamma),\quad \theta=\theta(\gamma),$$
$$\tilde{\mu}=\mu\frac{\rho}{\rho_0}\left[1-\frac{2}{3}\gamma-\chi_3-(1+\chi_2)\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial U}{\partial\gamma}\right]. \tag{5.3}$$

Рассмотрим всестороннее расширение элемента среды при условии, что $\chi_1=0$, $T=T_0$. При этом $e'_{ij}=\omega_{ij}=0$, $e=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}=\left(1-\frac{2}{3}\gamma\right)e$ и, следовательно,

$$\rho=\rho_0\left(1-\frac{2}{3}\gamma\right)^{3/2}. \tag{5.4}$$

При формулировке уравнений деформирования элемента сплошной среды со значительным изменением плотности обычно предполагается (см., например, [3]), что внутренняя энергия элемента при $\rho\to 0$ асимптотически стремится к некоторому постоянному значению, подобно энергии взаимодействия атомов при изменении расстояния между ними до бесконечности. Принимая, что функция $f(\gamma)$ в (5.3) этому условию удовлетворяет, из (5.3), (5.4) находим

$$(5.5) \qquad \sigma \to 0 \text{ при } \gamma \to 3/2.$$

При малых значениях γ зависимость σ от γ близка к линейной

$$(5.6) \qquad \sigma = A\gamma$$

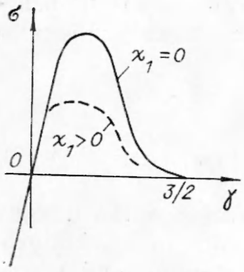

Рис. 3

(A — положительная постоянная). Из (5.5), (5.6) следует, что в случае всестороннего расширения при $\chi_1 = 0$, $T = T_0$ график зависимости σ от γ имеет вид, указанный на рис. 3 сплошной кривой. Очевидно, таким же он будет и в общем случае деформирования элемента среды при $\chi_1 = 0$, $T = T_0$. Характерная его особенность — ограниченность среднего напряжения. Наличие функции χ_1 в (5.3) создает возможность изменения при помощи функции χ_1 зависимости σ от γ так, например, как указано на рис. 3 штриховой линией. В частности, это создает возможность описания при помощи функции χ_1 изменения по тем или иным причинам сопротивления элемента среды разрушению из-за ограниченности среднего напряжения.

Наличие функции χ_2 в (5.3) создает возможность описания при ее помощи влияния сдвиговых деформаций на изменение объема и среднего напряжения. Пусть деформирование происходит при $\sigma = \gamma = 0$. В этом случае, согласно (5.2), сдвиговые деформации приведут к изменению объема по формуле $e = \dfrac{2(1+\chi_2)}{1-\chi_1}\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta}$. Пусть деформирование происходит без изменения объема. Тогда сдвиговые деформации приведут к изменению γ по формуле $\dfrac{d\gamma}{dt} = -2(1+\chi_2)\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta}$ и, следовательно, к соответствующему изменению среднего напряжения. Наличие функции χ_3 в (5.3) создает возможность при ее помощи описывать изменения по тем или иным причинам модуля $\tilde{\mu}$ упругого сдвига.

Приведенные примеры показывают, что имеются весьма широкие возможности описания разнообразных явлений путем введения в уравнения деформирования элемента среды недиссипативных неупругих деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.** Теория ползучести строительных материалов и ее приложения.— М.: Госстройиздат, 1960.
2. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1970.— Т. 1—2.
3. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.

Поступила 19/V 1986 г.

УДК 534.1

ПРЯМОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ И ЖЕСТКОСТЯМИ

А. В. Агафонов

(Ленинград)

При расчете элементов конструкций (стержней, пластин и т. п.) на сосредоточенные воздействия во многих случаях важно знать лишь напряженное и деформированное состояние рассматриваемого элемента непосредственно в месте приложения нагрузки, а элемент в целом (или вся конструкция) представляет интерес лишь в смысле его интегральной реакции на воздействие.

Если сосредоточенное воздействие задано, то нахождение такой интегральной реакции, как правило, затруднений не вызывает. В тех же случаях, когда воздействие зависит от движения самого элемента конструкции, отыскание интегральной реакции