

УДК 539.376

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЗУЧЕСТИ МИКРОНЕОДНОРОДНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В. П. Радченко, Д. В. Шапиевский

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара
E-mails: radch@samgtu.ru, parasms@mail.ru

Предложена математическая модель, описывающая эффект влияния ползучести на мгновенно-упругую деформацию, наблюдающийся экспериментально для микронеоднородных материалов с физически нелинейным законом упругости. На основе структурной модели среды показано, что упругая деформация при разгрузке образца после ползучести при постоянном напряжении может быть как больше, так и меньше упругой деформации при нагружении. Показано, что результаты расчетов для биокompозитного материала хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: нелинейная упругость, ползучесть, микронеоднородная среда, структурная модель, теоремы о разгрузке, экспериментальные данные.

В работах [1, 2] при экспериментальном исследовании одноосной ползучести природного биокompозитного материала (костной ткани) установлено, что мгновенно-упругая деформация этого материала при нагружении e^H при $t = 0 + 0$ и полной разгрузке e^P после ползучести при действии постоянного напряжения существенно различаются. При этом может выполняться как соотношение $e^P > e^H$ [1], так и соотношение $e^P < e^H$ [2], т. е. деформация ползучести оказывает влияние на мгновенно-упругую деформацию. Из анализа экспериментальных данных работ [1, 2] следует, что материал костной ткани является нелинейно-упругим (см. также [3, 4]).

В то же время в работе [5] при построении кинетических уравнений ползучести в рамках теории управления показана возможность дрейфа упругой деформации вследствие деформации ползучести, однако не уточнены условия, при которых возникает отмеченный эффект. В [6–8] теоретически показано, что в частных задачах у слоистых композитов [6] и композитных микронеоднородных сред [7, 8] влияние ползучести на мгновенно-упругую деформацию наблюдается лишь в случае нелинейного закона упругости хотя бы для одной из фаз композита. Однако систематический анализ этого явления до сих пор не проводился.

С учетом изложенного выше целью настоящей работы является разработка математической модели одноосной ползучести микронеоднородных нелинейно-упругих сред, учитывающей влияние деформации ползучести на упругую деформацию образца, а также проверка ее соответствия экспериментальным данным.

1. Для выяснения условий, при которых мгновенно-упругая деформация зависит от реологической деформации, рассмотрим случай одноосной ползучести природного биокompозитного материала (костной ткани), для которого, как отмечено выше, эта зависимость подтверждается экспериментально [1, 2]. Поскольку данный материал является двухфазным композитным материалом, для моделирования его деформационных свойств используем простейшую двухэлементную структурную модель (пары параллельно соединенных моделей типа модели Максвелла), уравнения равновесия и совместности деформаций ко-

торой имеют вид

$$\alpha\sigma_1(t) + (1 - \alpha)\sigma_2(t) = \sigma_0(t); \quad (1)$$

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t). \quad (2)$$

Здесь σ_i, ε_i ($i = 1, 2$) — напряжение и деформация в i -м элементе соответственно; α — “вес” первого элемента структурной модели; σ_0 — макронапряжение, приложенное к образцу. Предполагается, что деформации в локальных элементах ε_i равны значению деформации образца ε .

Так как материал полагается нелинейно-упругим, каждый локальный элемент модели наделяется простейшими деформационными свойствами (нелинейной упругостью и нелинейной вязкостью):

$$\varepsilon_i(t) = e_i(t) + p_i(t); \quad (3)$$

$$e_i = \sigma_i |\sigma_i|^{n_i-1} / E_i, \quad \dot{p}_i = a_i \sigma_i |\sigma_i|^{m_i-1} \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Теорема. Пусть структурная модель задана соотношениями (1)–(4). Тогда, если $n_1 = 1$ и $p_1^* < p_2^*$, то при $n_2 > 1$ для мгновенно-упругой деформации образца при нагружении e^H и разгрузке после ползучести e^P выполняется неравенство $e^H > e^P$, при $0 < n_2 < 1$ — неравенство $e^H < e^P$, а при $n_2 = 1$ — равенство $e^H = e^P$ ($p_i^* = p_i(t^*)$ ($i = 1, 2$) — деформация ползучести в локальных элементах модели, накопленная к моменту разгрузки при $t = t^*$).

Доказательство теоремы для более общей структурной модели при l ($l > 2$) локальных элементах приведено в [8].

Следует отметить, что под мгновенно-упругой деформацией e образца при нагружении и разгрузке в любой момент времени $t = t^*$ понимается величина

$$e(t^*) = \varepsilon(\sigma_0(t^* + 0)) - \varepsilon(\sigma_0(t^* - 0)). \quad (5)$$

Таким образом, изменение (дрейф) мгновенно-упругой деформации за счет деформации ползучести материалов возможно лишь для физически нелинейно-упругого материала.

Для упрощения дальнейших расчетов и анализа положим в (4) $n_1 = m_1 = 1$. Тогда из (3), (4) имеем

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + a_1 \sigma_1, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d(\sigma_2 |\sigma_2|^{n_2-1})}{dt} + a_2 \sigma_2 |\sigma_2|^{m_2-1}. \quad (6)$$

В случае мгновенного нагружения образца напряжением σ_0 при $t = +0$ из уравнений (1), (2), (5), (6) следует

$$\alpha\sigma_1^0 + (1 - \alpha)\sigma_2^0 = \sigma_0, \quad \sigma_1^0 / E_1 = (\sigma_2^0)^{n_2} / E_2 = e^H(\sigma_0),$$

откуда нетрудно получить соотношение

$$\alpha E_1 e^H(\sigma_0) + (1 - \alpha)(E_2 e^H(\sigma_0))^{1/n_2} = \sigma_0 \quad (7)$$

($\sigma_i^0 = \sigma_i(+0)$; $e^H(\sigma_0)$ — нелинейная зависимость мгновенно-упругой деформации образца от приложенного напряжения σ_0 при $t = 0$).

Если в уравнении (7) считать E_1, E_2, α известными, то оно является уравнением для определения коэффициента n_2 .

Для определения реологических коэффициентов a_1, a_2, m_2 нужно рассмотреть предельное состояние структурной модели, соответствующее стадии установившейся ползучести. Необходимо также знать зависимость скорости установившейся ползучести материала $\dot{\varepsilon}'$ от напряжения. Эта зависимость принималась в виде $\dot{\varepsilon}'(\sigma_0) = a\sigma_0^m$. Тогда из уравнений (1), (2), (6), (7) получаем

$$\alpha\sigma_1' + (1 - \alpha)\sigma_2' = \sigma_0, \quad a_1\sigma_1' = a_2(\sigma_2')^{m_2} = a\sigma_0^m, \quad (8)$$

Экспериментальные и расчетные значения упругой деформации
биокомпозитного материала при нагружении и разгрузке после ползучести

σ_0 , МПа	e^H , %		e^P , %	
	Эксперимент	Расчет по структурной модели	Эксперимент	Расчет по структурной модели
35,71	0,178	0,178	0,152	0,162
53,56	0,255	0,250	0,245	0,236
74,56	0,470	0,445	0,670	0,642
90,41	0,570	0,570	—	—

где σ'_1, σ'_2 — напряжения в элементах структурной модели, соответствующие стадии установившейся ползучести материала.

Из уравнений (8) следует

$$\alpha \frac{a}{a_1} \sigma_0^m + (1 - \alpha) \left(\frac{a}{a_2} \sigma_0^m \right)^{1/m_2} = \sigma_0. \quad (9)$$

Если α, a_1, a_2 считать известными величинами, то (9) можно рассматривать как уравнение относительно m_2 .

Рассмотрим разгрузку образца при $t = t^*$ ($\sigma_0 = 0$ при $t > t^*$). Из уравнений (1), (2), (6) имеем

$$\alpha \sigma_1^* + (1 - \alpha) \sigma_2^* = 0, \quad \sigma_1^*/E_1 + p_1^* = \sigma_2^* |\sigma_2^*|^{n_2-1} / E_2 + p_2^*,$$

откуда получаем уравнения для определения напряжений σ_1^* и σ_2^* :

$$\frac{\sigma_1^*}{E_1} + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\sigma_1^* |\sigma_1^*|^{n_2-1}}{E_2} + p_1^* - p_2^* = 0, \quad \sigma_2^* = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \sigma_1^*.$$

Здесь $\sigma_i^* = \sigma_i^*(t^* + 0)$; p_i^* ($i = 1, 2$) — деформация ползучести, накопленная в i -м локальном элементе структурной модели к моменту разгрузки.

Определив σ_1^* и σ_2^* , мгновенно-упругую деформацию образца можно найти по формуле

$$e^P = (\sigma_1(t^* - 0) - \sigma_1^*) / E_1.$$

Расчет ползучести материала по предложенной структурной модели может быть выполнен численно на основе уравнений (1), (2), (4). Для этого промежуток времени наблюдения за деформацией ползучести разбивается точками $t = 0, t_1, t_2, \dots$ на интервалы $t \in [t_j, t_{j+1}]$, в каждом из которых система дифференциальных уравнений решается численно (например, методом Эйлера).

2. Для проверки достоверности результатов, полученных на основе структурной модели (1)–(4), в дальнейшем используются экспериментальные данные работ [1, 2].

В экспериментах [2] проведено испытание биокомпозитного материала (костной ткани) в области линейной ползучести (точнее, слабой нелинейности) при $\sigma_0 = 35,71; 53,56$ МПа и длительности нагружения $\tau = 100$ мин с последующей разгрузкой. В [1] исследована область нелинейной ползучести этого материала при $\sigma_0 = 74,56$ МПа, $\tau = 200$ мин с последующей разгрузкой и при $\sigma_0 = 90,41$ МПа вплоть до разрушения.

Экспериментальные значения мгновенно-упругой деформации при нагружении и разгрузке [1, 2] приведены в таблице. Если построить кривую мгновенного деформирования костной ткани $\sigma_0 \sim e^H$ (точки на рис. 1), то видно, что она имеет нелинейный характер, причем в области линейной ползучести ($0 \leq \sigma_0 \leq 53,56$ МПа) кривая должна быть

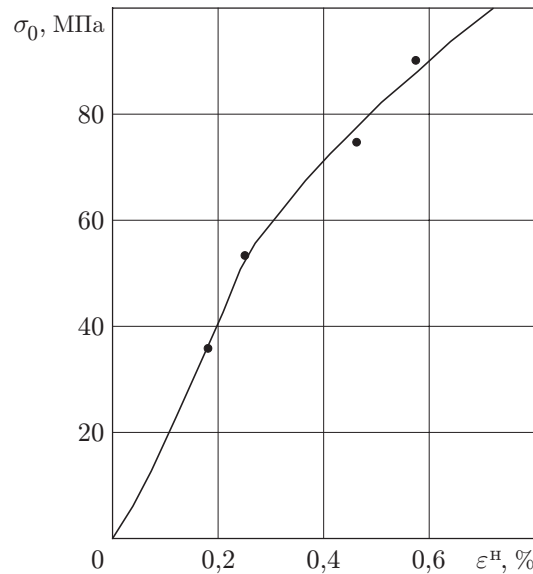


Рис. 1. Диаграмма мгновенно-упругого деформирования костной ткани: сплошная линия — результаты расчета; точки — экспериментальные данные

выпуклой вниз, а в области нелинейной ползучести ($53,56 \text{ МПа} \leq \sigma_0 \leq 90,41 \text{ МПа}$) — выпуклой вверх. Такой характер кривой мгновенно-упругого деформирования костной ткани подтверждается экспериментальными данными работы [3].

С учетом изложенного выше аппроксимация экспериментальных данных упругой деформации на макроуровне принималась кусочно-нелинейной:

$$e^H(\sigma_0) = \sigma_0 |\sigma_0|^{n-1} / E \quad (10)$$

(сплошная линия на рис. 1). При этом для значений $0 \leq \sigma_0 \leq 53,56 \text{ МПа}$ $E = 1,302 \times 10^4 (\text{МПа})^n$, $n = 0,88$, для значений $53,56 \text{ МПа} \leq \sigma_0 \leq 90,41 \text{ МПа}$ $E = 32,106 \cdot 10^4 (\text{МПа})^n$, $n = 1,685$. Аппроксимация строилась методом наименьших квадратов таким образом, чтобы график проходил через точку при $\sigma_0 = 53,56 \text{ МПа}$.

Согласно уравнению (10) начальный модуль упругости (при $\sigma_0 = 0$) равен нулю:

$$\frac{d\sigma_0}{de^H} = \frac{1}{(n/E)\sigma_0^{n-1}}, \quad \left. \frac{d\sigma_0}{de^H} \right|_{\sigma_0=0} = 0,$$

так как $n < 1$. Однако нужно учитывать, что при нелинейной аппроксимации вида (10) коэффициент E является не модулем упругости в классическом смысле, а одним из двух параметров, с помощью которых описывается нелинейный характер кривой мгновенно-упругого деформирования. В соотношении (10) величина E имеет размерность $(\text{МПа})^n$.

На рис. 2, 3 приведена экспериментальная зависимость полной деформации от времени (точки) [1, 2]. Для определения параметров a и m во втором соотношении (8) необходимо знать скорость установившейся ползучести образца из костной ткани, которая определялась как в линейной (рис. 2), так и нелинейной (рис. 3) областях ползучести по трем последним экспериментальным точкам на каждой ступени нагружения. Значения реологических характеристик a и m находились с использованием метода наименьших квадратов. Для значений $0 \leq \sigma_0 \leq 53,56 \text{ МПа}$ $a = 1,526 \cdot 10^{-6} (\text{МПа})^{-m} \cdot \text{мин}^{-1}$, $m = 1$; для значений $53,56 \text{ МПа} \leq \sigma_0 \leq 90,41 \text{ МПа}$ $a = 2,05 \cdot 10^{-19} (\text{МПа})^{-m} \cdot \text{мин}^{-1}$, $m = 8,455$.

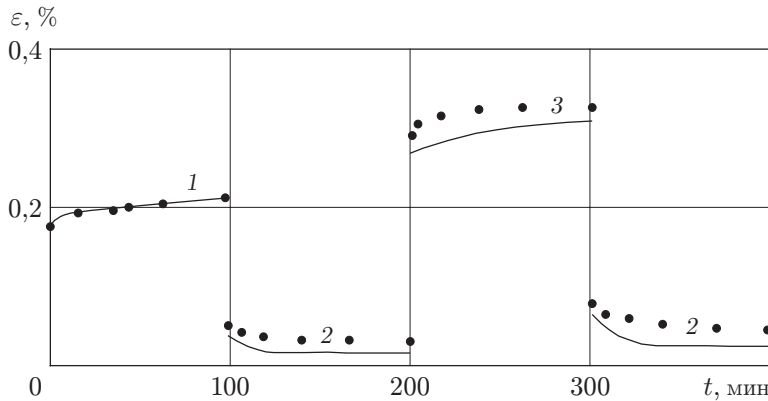


Рис. 2

Рис. 2. Изменение деформации костной ткани во времени в линейной области ползучести:

точки — экспериментальные данные; сплошные линии — результаты расчета по структурной модели; 1 — $\sigma_0 = 35,71$ МПа; 2 — $\sigma_0 = 0$; 3 — $\sigma_0 = 53,56$ МПа

Рис. 3. Изменение деформации костной ткани во времени в нелинейной области ползучести:

точки — экспериментальные данные; сплошные линии — результаты расчета по структурной модели; 1 — $\sigma_0 = 74,56$ МПа; 2 — $\sigma_0 = 0$; 3 — $\sigma_0 = 90,41$ МПа

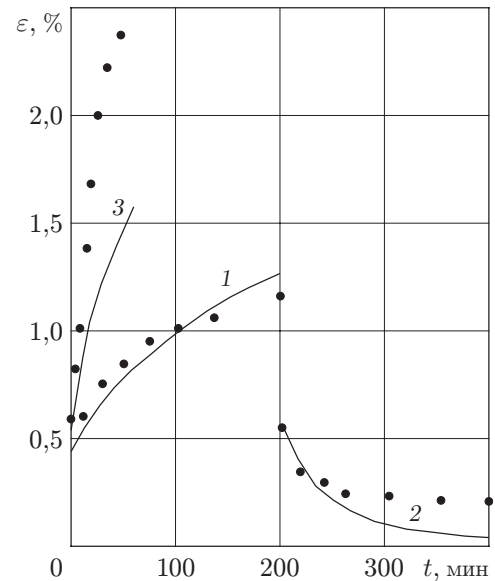


Рис. 3

Постоянные α , E_1 , E_2 , a_1 , a_2 структурной модели (1)–(4) определялись из условия минимума целевой функции

$$Z = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\varepsilon(t_k) - \varepsilon^*(t_k)}{\varepsilon^*(t_k)} \right)^2. \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon(t_k)$ — вычисленное по структурной модели значение полной деформации при нагружении в момент $t = t_k$; $\varepsilon^*(t_k)$ — экспериментальное значение полной деформации в тот же момент времени. Следует отметить, что в (11) входят значения мгновенно-упругой деформации как при нагружении, так и при разгрузке.

В области линейной ползучести ($0 \leq \sigma_0 \leq 53,56$ МПа) варьировались коэффициенты α , E_1 , E_1/E_2 , a_1 . Значение n_2 определялось из уравнения (7). Поскольку в области линейной ползучести $m_2 = 1$, коэффициент a_2 находился из уравнения (9). Получены следующие значения параметров структурной модели: $\alpha = 2/9$, $E_1 = 9350$ МПа, $E_2 = 12\,290$ (МПа) n_2 , $n_2 = 0,83$, $a_1 = 4,96 \cdot 10^{-6}$ мин $^{-1} \cdot$ (МПа) $^{-1}$, $a_2 = 1,24 \cdot 10^{-8}$ мин $^{-1} \cdot$ (МПа) $^{-1}$.

В области нелинейной ползучести ($53,56$ МПа $\leq \sigma_0 \leq 90,41$ МПа) варьировались значения E_1 , E_1/E_2 , a_1 , a_2 (значение α определено заранее). Значение n_2 определялось из уравнения (7), m_2 — из уравнения (9). Вычислены следующие значения параметров структурной модели в этой области: $E_1 = 3,72 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2,628 \cdot 10^5$ (МПа) n_2 , $n_2 = 1,82$, $m_2 = 8,82$, $a_1 = 7,87 \cdot 10^{-7}$ мин $^{-1} \cdot$ (МПа) $^{-1}$, $a_2 = 7,475 \cdot 10^{-23}$ мин $^{-1} \cdot$ (МПа) $^{-m_2}$.

На рис. 2, 3 сплошными линиями представлены результаты расчета по структурной модели (1)–(4) полной деформации для костной ткани. Расчетные значения мгновенно-упругой деформации при нагружении e^H и разгрузке e^P приведены в таблице.

Из представленных на рис. 2, 3 данных следует, что с помощью предложенной структурной модели можно удовлетворительно описать как деформацию ползучести костной ткани, так и изменение мгновенно-упругой деформации за счет деформации ползучести (см. таблицу). Существенное различие расчетных и экспериментальных данных на рис. 3 при $\sigma_0 = 90,41$ МПа обусловлено, по-видимому, тем, что в этом случае деформирование происходит в области предразрушения и данный режим существенно отличается от других рассмотренных режимов нагружения.

3. Анализ полученных в численном эксперименте результатов позволяет сделать следующие выводы.

Для нелинейно-упругих материалов, описываемых моделью (1)–(4), происходит дрейф диаграммы упругого деформирования $e \sim \sigma_0$ вследствие ползучести и перераспределения микронапряжений в элементах структурной модели, при этом все диаграммы расположены между двумя диаграммами, соответствующими стационарным состояниям: диаграммой $e \sim \sigma_0$ при $t = 0$ и диаграммой, соответствующей поведению структурной модели под нагрузкой при $t \rightarrow \infty$.

Мгновенно-упругая деформация обладает одновременно свойствами “механической памяти”, поскольку в процессе ползучести при разгрузке образца ($t \rightarrow \infty$) происходит полное восстановление первоначальных упругих свойств, и свойствами вязкоупругости, так как мгновенно-упругая деформация явно зависит от времени.

При деформировании образца в режиме ползучести с выдержками при постоянных напряжениях на диаграмме упругого деформирования появляются специфические гистерезисные петли. Причиной столь сложного поведения при упругом деформировании являются перераспределение напряжений в локальных элементах структурной модели при нагружении и их релаксация при разгрузке, неравномерное накопление деформации ползучести в элементах и, наконец, нелинейность законов упругого деформирования этих элементов.

Диаграмма упругой деформации вследствие ползучести аналогична диаграмме упругой деформации при постоянном напряжении в процессе старения [9], а гистерезисные петли, появляющиеся на диаграмме при нагружении и разгрузке после ползучести, аналогичны гистерезисным петлям на диаграмме деформирования материалов, обладающих эффектом механической памяти формы (см., например, [10]). Однако механизм этого явления иной и реализуется лишь для нелинейно-упругих материалов.

Таким образом, в рамках предложенной модели на примере костной ткани описано изменение (дрейф) мгновенно-упругой деформации вследствие деформации ползучести. Выяснены условия, при которых такое изменение возможно, и показано, что оно может иметь место лишь для нелинейно-упругих материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелнис А. Э., Лайзан Я. Б. Нелинейная ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров. 1978. Т. 14, № 1. С. 97–100.
2. Кнетс И. В., Вилкс Ю. К. Ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров. 1975. Т. 11, № 4. С. 634–638.
3. Винц Х. Изменение механических свойств компактной костной ткани человека в зависимости от возраста // Механика полимеров. 1975. Т. 11, № 4. С. 659–663.
4. Добелис М. А. Деформативные свойства деминерализованной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров. 1978. Т. 14, № 1. С. 101–108.
5. Самарин Ю. П. О применении теории управления к исследованию ползучести конструкций // Механика деформируемых сред. Куйбышев: Изд-во Куйбышев. гос. ун-та, 1976. С. 123–129.

6. **Радченко В. П., Самарин Ю. П.** Влияние ползучести на величину упругой деформации слоистого композита // Механика композитных материалов. 1983. Т. 19, № 2. С. 231–237.
7. **Радченко В. П.** Об одной структурной реологической модели нелинейно-упругого материала // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 6. С. 67–74.
8. **Радченко В. П., Шапиевский Д. В.** О дрейфе упругой деформации для нелинейно-упругих материалов вследствие ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 43. С. 99–105.
9. **Самарин Ю. П.** Применение метода разделения деформации в теории ползучести бетона / Механика: Новые разработки конструкций. Куйбышев: Куйбышев. политехн. ин-т, 1973. С. 17–21.
10. **Эффекты** памяти формы в сплавах / Под ред. В. А. Займовского. М.: Металлургия, 1979.

*Поступила в редакцию 1/II 2007 г.,
в окончательном варианте — 18/V 2007 г.*
