ПМТФ, № 4, 1963

О ДВИЖЕНИИ В ЖИДКОСТИ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО МНОГОСВЯЗНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

П. В. Харламов

(*Новосибирск*)

После исследований Дирихле [1], Клебша [2–3], Томсона и Тэта [4], Кирхгофа [5] уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости в более общих предположениях были выведены Стекловым [6]. Основное внимание исследователей было направлено на изыскание точных решений этих уравнений для того простейшего случая, когда тело ограничено односвязной поверхностью и движется по инерции в простирающейся беспредельно жидкости.

Так как к уравнениям Кирхгофа — Клебша оказалась применимой теория последнего множителя, особое значение приобрело нахождение, в дополнение к трем известным интегралам, четвертого, не зависящего явно от времени и содержащего произвольную постоянную. В общем случае четвертый интеграл не найден. Классические случаи интегрируемости установлены Кирхгофом [5], Клебшем [3], Стекловым [6], Ляпуновым [7] при некоторых ограничениях, накладываемых на форму тела и распределение массы в нем. В замечательных исследованиях [8, 9] Чаплыгин не только дал геометрические истолкования полученным ранее решениям, но и указал новые решения, хотя и не содержащие произвольных постоянных в четвертом интеграле, но тем не менее в некоторых случаях сведенные к квадратурам.

При учете действия на систему тело — жидкость внешних сил естественно в первую очередь обратиться к силе тяжести. Если вес тела и архимедова сила не равны по величине, то центр тяжести тела движется ускоренно, наступает момент, когда давление жидкости на тело в некоторых областях обращается в нуль, а затем образуются каверны, что выводит за пределы применимости уравнений Кирхгофа — Клебша. В статье [10] Чаплыгин впервые в литературе рассматривает случай, когда вес тела и архимедова сила образуют пару. Получающиеся при этом уравнения движения заключают в себе как частный случай уравнения движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, и решение Чаплыгина связано с решением Ковалевской [11] последней задачи. Действие силы тяжести в постановке Чаплыгина учитывалось и в работах автора [12–17].

Что же касается тел, ограниченных многосвязными поверхностями, то, кроме вывода уравнений движения и анализа установившихся движений, автору известны лишь исследования, относящиеся к телу простейшей формы, а именно, к тору [18–21].

Ниже некоторые из исследований Чаплыгина [9] распространены на тот случай, когда ограничивающая тело поверхность многосвязна. При этом оказалось полезным преобразование уравнений, выполненное в § 1. Преобразованные уравнения заключают в себе в качестве частного случая уравнения работ [10,22], а следовательно, и уравнения движения по инерции тела, ограниченного односвязной поверхностью.

Появление работ, в которых изучаются движения тел в центральном ньютоновском поле сил и движение тел с полостями, заполненными жидкостью, по-видимому в значительной мере вызвано запусками спутников. Полученные довольно давно решения Бруна [22] и Горячева [23] некоторых искусственно поставленных задач динамики твердого тела оказались впоследствии решениями и задачи о движении тела в ньютоновском поле сил. Геометрическое истолкование решения Бруна дано в статье [24], а решение Горячева обсуждается в статьях [25,26].

Стеклов [27] отметил, что решение Бруна является частным случаем решения Клебша задачи о движении тела в жидкости. Оказалось, что и обычно рассматриваемые приближенные уравнения движения тела в ньютоновском поле сил являются весьма частным случаем § 1, и поэтому из решений последних уравнений вытекают и известные решения задачи о движении тела в ньютоновском поле сил.

Задача о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку и полости, заполненные жидкостью, также охватывается уравнениями § 1. Не изменяя уравнений движения, можно вместо циркулирующей в полостях жидкости поместить в теле вращающиеся маховики. Новые решения последней задачи указал недавно Сретенский на конференц и по аналитической механике (Казань, декабрь 1963 г.).

§ 1. Преобразование уравнений. Систему координат свяжем с движущимся телом. Пусть u_i°, ω_i — компоненты скорости начала координат и угловой скорости тела, тогда

$$T^\circ = \frac{1}{2}(A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}u_i^\circ u_j^\circ) + C_{ij}\omega_i u_j^\circ \tag{1.1}$$

— кинетическая энергия системы (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} — постоянные, зависящие от формы тела и от плотностей тела и жидкостей вне тела и в полостях; по дважды входящему индексу проводится суммирование от 1 до 3).

Из шести уравнений движения тела в жидкости по инерции запишем два

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial\omega_1} + \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\omega_3} + \alpha_3\right)\omega_2 - \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\omega_2} + \alpha_2\right)\omega_3 + \\ + \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_3^\circ} + \beta_3\right)u_2^\circ - \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_2^\circ} + \beta_2\right)u_3^\circ = 0 \qquad (123) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial u_1^\circ} + \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_3^\circ} + \beta_3\right)\omega_2 - \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_2^\circ} + \beta_2\right)\omega_3 = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

остальные получаются при круговой перестановке индексов, что отмечено символом (123). Входящие в уравнения (1.2) постоянные α_i, β_i характеризуют циклические течения жидкости и исчезают при обращении в нуль всех главных циркуляций.

Известны три интеграла уравнений (1.2) (1.3)

$$T^\circ = h^\circ, \qquad \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial\omega_i} + \alpha_i\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_i^\circ} + \beta_i\right) = m, \qquad \left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_i^\circ} + \beta_i\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_i^\circ} + \beta_i\right) = R^2$$

Введем импульсивную силу и импульсивный момент

$$R_i^\circ = \partial T^\circ / \partial u_i^\circ, \qquad P_i^\circ = \partial T^\circ / \partial\omega_i \tag{1.4}$$

разрешим соотношения

$$A_{ij}\omega_j + C_{ij}u_j^\circ = P_i^\circ, \qquad B_{ij}u_j^\circ + C_{ji}\omega_j = R_i^\circ \tag{1.5}$$

относительно ω_i, u_i°

$$\omega_i = a_{ij}P_j^\circ + c_{ij}R_j^\circ, \qquad u_i^\circ = b_{ij}R_j^\circ + c_{ji}P_j^\circ$$

Обозначим

$$P_i = P_i^\circ + \gamma_i, \qquad R_i = R_i^\circ + \beta_i \tag{1.6}$$

Величины γ_i определим так, чтобы

$$\omega_i = a_{ij}P_j + c_{ij}R_j \tag{1.7}$$

Для этого полагаем

$$a_{ij}\gamma_j + c_{ij}\beta_j = 0 \tag{1.8}$$

Соотношения (1.8) разрешимы относительно γ_j, так как определитель $|a_{ij}|$ отличен от нуля. Обозначая

$$\mu_i = b_{ij}\beta_j + c_{ji}\gamma_j \tag{1.9}$$

получаем

$$u_i = u_i^\circ + \mu_i \qquad (u_i = b_{ij}R_j + c_{ji}P_j) \tag{1.10}$$

Из (1.1), (1.5) следует $2T^\circ = \omega_i P_i^\circ + u_i^\circ R_i^\circ$ или, с учетом (1.6), (1.7), (1.10), (1.8), (1.9)

$$T^\circ = T - \mu_i R_i + \tfrac{1}{2}\mu_i\beta_i \tag{1.11}$$

где

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j\right) + c_{ij}P_iR_j \qquad (1.12)$$

При этом

$$\omega_i = \partial T / \partial P_i, \qquad u_i = \partial T / \partial R_i \qquad (1.13)$$

Вследствие (1.4), (1.6), (1.11), уравнения (1.2) и интегралы (1.3) приводятся к желаемому виду

$$dP_1 / dt + (P_3 + \lambda_3)\,\omega_2 - (P_2 + \lambda_2)\,\omega_3 + R_3u_2 - R_2u_3 = \mu_2R_3 - \mu_3R_2 \qquad (1.14)$$

$$dR_2 / dt = \omega_3R_2 - \omega_2R_3 \qquad (123)$$

$$T - \mu_iR_i = h, \qquad (P_1 + \lambda_1)\,R_1 + (P_2 + \lambda_2)\,R_2 + (P_3 + \lambda_3)\,R_3 = m$$

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2 \qquad (1.15)$$

Здесь

$$\lambda_i = \alpha_i - \gamma_i, \qquad h = h^\circ - \frac{1}{2}\,\mu_i\beta_i$$

Уравнения (1.14) описывают движение по инерции тела, ограниченного многосвязной поверхностью, в идеальной жидкости, простирающейся беспредельно, причем кинетическая энергия системы выражается формулой (1.11). Но (1.14) можно истолковать как уравнения движения тела, ограниченного односвязной поверхностью, если полагать кинетическую энергию системы, выраженной формулой (1.12), и ввести гироскопические силы с моментом $\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}$ (помещая, например, в теле вращающийся маховик) и пару сил, имеющих неизменное направление в пространстве и приложенных к фиксированным точкам тела (такую пару образуют, например, в поле сил тяжести вес тела и архимедова сила в том случае, когда импульсивная сила вертикальна, тело неоднородно и вес вытесненной телом жидкости равен весу тела). Поэтому при $\lambda_i = 0$ уравнения (1.14) совпадают с уравнениями движения тяжелого тела в тяжелой жидкости, рассмотренными в работах [10,12–17], а при $\lambda_i = 0$, $\mu_i = 0$ получаем обычные уравнения классической задачи о движении по инерции тела, ограниченного односвязной поверхностью.

Основные переменные P_i, R_i вследствие проведенного преобразования отличаются от импульсивного момента и импульсивной силы, совпадая с ними при $\lambda_i = 0$, $\mu_i = 0$, но для сокращения речи они в дальнейшем называются импульсивным моментом и импульсивной силой. Точно так же, называя T кинетической энергией, следует помнить о проведенных преобразованиях.

Если начало неизменно связанной с телом системы координат помещено в центральной точке тела (для которой $c_{ij} = c_{ji}$), а оси совмещены с главными осями одной из управляющих поверхностей (эллипсоида импульсивных моментов, эллипсоида импульсивных сил или дополнительной поверхности), то число различных коэффициентов квадратичной формы (1.12) равно 15, и, следовательно, с учетом величин λ_i, μ_i уравнения (1.2) содержат 21 параметр. Общее решение этих уравнений содержит 27 параметров, так как в него входят шесть постоянных интегрирования, из которых три — h, m, R^2 указаны в интегралах (1.15). Общее решение уравнений (1.2) в замкнутом виде не установлено; естественно любое найденное решение характеризовать числом сохраненных в нем параметров.

Отметим одну аналогию. Пусть в (1.12)

$$a_{ij} = \begin{cases} A_i^{-1} & (i=j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} \varepsilon A_i & (i=j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases} \qquad c_{ij} = 0 \qquad (1.16)$$

тогда из (1.7) $P_i = A_i\omega_i$ (не суммировать!), и уравнения (1.14) будут

$$A_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (A_2 - A_3)(\omega_2\omega_3 - \varepsilon R_2 R_3) + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + \mu_2 R_3 - \mu_3 R_2$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \omega_3 R_2 - \omega_2 R_3 \quad (123) \qquad (1.17)$$

совпадая по форме с уравнениями движения в центральном ньютоновском поле сил твердого тела, имеющего неподвижную точку и несущего вращающиеся маховики (или имеющего полости, заполненные жидкостью). При $\lambda_i = 0$, $\mu_i = 0$ это утверждение сводится к аналогии Стеклова [27].

§ 2. Условия существования одного линейного интеграла. Изменение величины

$$J = P_1 - s \quad (s \text{ — некоторая постоянная}) \qquad (2.1)$$

описывается уравнением (см. (1.14))

$$dJ / dt = (P_2 + \lambda_2)\omega_3 - (P_3 + \lambda_3)\omega_2 + (u_3 - \mu_3) R_2 - (u_2 - \mu_2) R_3 \qquad (2.2)$$

Потребуем, чтобы правая часть этого уравнения имела J делителем. Воспользовавшись формулами (1.13), 1.12), заключаем, что выражение

$$\begin{gathered}(a_{32}P_2 + a_{33}P_3 + c_{31}R_1 + c_{32}R_2 + c_{33}R_3 + a_{31}s)(P_2 + \lambda_2) - \\ - (a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + c_{21}R_1 + c_{22}R_2 + c_{23}R_3 + a_{21}s)(P_3 + \lambda_3) + \\ + (b_{31}R_1 + b_{32}R_2 + b_{33}R_3 + c_{23}P_2 + c_{33}P_3 + c_{13}s - \mu_3) R_2 - \\ - (b_{21}R_1 + b_{22}R_2 + b_{23}R_3 + c_{22}P_2 + c_{32}P_3 + c_{12}s - \mu_2) R_3 = 0\end{gathered}$$

должно быть тождеством относительно P_2, P_3 R_1, R_2, R_3, и, следовательно,

$$\begin{gathered}a_{32} = 0, \quad b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0, \quad c_{31} = c_{21} = 0, \quad c_{32} = -c_{23} \\ a_{33} = a_{22} = a, \quad b_{33} = b_{22} = b, \quad c_{33} = c_{22} = c \qquad (2.3) \\ \mu_2 = c_{12}s + c_{23}\lambda_3 - c\lambda_2, \quad \mu_3 = c_{13}s - c_{23}\lambda_2 - c\lambda_3, \quad \lambda_2 = (a_{12} / a)\, s, \\ \lambda_3 = (a_{31} / a)\, s\end{gathered}$$

Вследствие (2.3) оси координат могут быть повернуты вокруг первой оси (при этом (2.1) сохраняет свой вид) так, чтобы $a_{12} = 0$, и условия, накладываемые на параметры λ_i, μ_i, записываются так:

$$\begin{gathered}\lambda_1, \ \mu_1 \text{ — произвольны}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = (a_{31} / a)\, s \\ \mu_2 = [c_{12} + (a_{31} / a)\, c_{23}]\, s, \quad \mu_3 = [c_{13} - (a_{31} / a)\, c]\, s \qquad (2.4)\end{gathered}$$

Выделим в правой части (2.2) множитель J

$$dJ / dt = (a_{31}P_2 + c_{13}R_2 - c_{12}R_3)\, J \qquad (2.5)$$

Таким образом, если кинетическая энергия (1.12) имеет вид (2.6)

$$\begin{gathered}T = \tfrac{1}{2}[a_1P_1^2 + a(P_2^2 + P_3^2)] + a_{31}P_3P_1 + \tfrac{1}{2}[b_1R_1^2 + b(R_2^2 + R_3^2)] + \\ + c_1P_1R_1 + c_2(P_2R_2 + P_3R_3) + c_{23}(P_2R_3 - P_3R_2) + c_{12}P_1R_2 + c_{13}P_1R_3\end{gathered}$$

и выполнены условия (2.4), то величина (2.1) удовлетворяет соотношению (2.5). Соотношение (2.5) будет удовлетворено независимо от остальных уравнений (1.14), если положить $J = 0$, или

$$P_1 = s \qquad (2.7)$$

Последнее соотношение означает, что импульсивный момент относительно первой координатной оси сохраняет постоянное значение s (связанное с параметрами λ_3, μ_2, μ_3 условиями (2.4)), если это значение он имел в начальный момент времени. Из (2.6) следует, что первая координатная ось перпендикулярна круговому сечению эллипсоида импульсивных моментов.

§ 3. Перенос начала координат в центральную точку тела. При переносе начала координат с сохранением направления осей величины a_{ij}, R_i не изменяются. Поэтому, выбирая начало координат в центральной точке тела, можно кинетическую энергию (2.6) записать так:

$$2T = a_1P_1^2 + a\,(P_2^2 + P_3^2) + 2a_{31}P_3P_1 + b_{ij}R_iR_j + 2c_{ij}P_iR_j \quad (c_{ij} = c_{ji}) \tag{3.1}$$

отмечая в (2.4), (2.5), (2.6) штрихами те величины, которые, совпадая по обозначению с соответствующими величинами, входящими в (3.1), изменяются при переносе начала координат

$$T = \tfrac{1}{2}\,[a_1P_1'^2 + a\,(P_2'^2 + P_3'^2)] + 2a_{31}P_3'P_1' + \tfrac{1}{2}\,[b_1R_1^2 + b\,(R_2^2+R_3^2)] + \\ + c_1P_1'R_1 + c\,(P_2'R_2 + P_3'R_3) + c_{23}'\,(P_2'R_3 - P_3'R_2) + c_{12}'P_1'R_2 + c_{13}'P_1'R_3 \tag{3.2}$$

$$\lambda_1\,, \mu_1 \text{ — произвольны,} \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = (a_{31}\,/\,a)\,s, \\ \mu_2 = [c_{12}' + (a_{31}\,/\,a)\,c'_{23}]\,s, \quad \mu_3 = [c_{13}' - (a_{31}\,/\,a)\,c]\,s \tag{3.3}$$

$$dJ\,/\,dt = (a_{31}P_2' + c_{13}'R_2 - c_{12}'R_3)\,J, \qquad J = P_1' - s \tag{3.4}$$

Пусть x_1, x_2, x_3 — координаты прежнего начала в новой системе координат, тогда

$$P_1 = P_1' + x_2R_3 - x_3R_2 \quad (123) \tag{3.5}$$

Подставим (3.5) в (3.1) и отождествим полученное выражение с (3.2)

$$c_1 = c_{11} - a_{31}x_2, \qquad c = c_{22}, \qquad c = c_{33} + c_{31}x_2 \tag{3.6}$$

$$c_{23}' = c_{23} - ax_1, \qquad -c_{23}' = c_{23} + ax_1 - a_{31}x_3 \tag{3.7}$$

$$c_{12}' = c_{12} - a_1x_3 - a_{31}x_1, \qquad c_{13}' = c_{31} + a_1x_2 \tag{3.8}$$

$$0 = c_{12} + ax_3, \qquad 0 = c_{31} - ax_2 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= b_{11} + a\,(x_2^2 + x_3^2) - 2c_{31}x_2 + 2c_{12}x_3 \\ b &= b_{22} + a_1x_3^2 + ax_1^2 - 2a_{31}x_1x_3 + 2c_{23}x_2 - 2c_{12}x_3 \\ b &= b_{33} + a_1x_2^2 + ax_1^2 - 2c_{23}x_1 + 2c_{31}x_2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} 0 &= b_{23} - a_1x_2x_3 + a_{31}x_1x_2 - c_{31}x_3 + c_{12}x_2 + (c_{33} - c_{22})\,x_1 \\ 0 &= b_{31} - ax_1x_3 - a_{31}x_2^2 - c_{12}x_1 + c_{23}x_3 + (c_{11} - c_{33})\,x_2 \\ 0 &= b_{12} - ax_1x_2 + a_{31}x_2x_3 - c_{23}x_2 + c_{31}x_1 - (c_{11} - c_{22})\,x_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.9), (3.7)

$$x_2 = c_{31}\,/\,a, \qquad x_3 = -\,c_{12}\,/\,a \tag{3.12}$$

$$c_{23} = -\,a_{31}c_{12}\,/\,2a \tag{3.13}$$

Из (3.6), (3.12)

$$c_{33} = c_{22} - a_{31}c_{31}\,/\,a \tag{3.14}$$

Подставим (3.12), (3.13) в (3.10)

$$b = b_{22} + \frac{a_1 + 2a}{a^2}\,c_{12}^2 + ax_1^2 + \frac{a_{31}}{a}\,c_{12}x_1 = b_{33} + \frac{a_1 + 2a}{a^2}\,c_{31}^2 + ax_1^2 + \\ + \frac{a_{31}}{a}\,c_{12}x_1, \qquad b_1 = b_{11} - \frac{c_{31}^2 + c_{12}^2}{a} \tag{3.15}$$

Из (3.15)

$$b_{33} = b_{22} + \frac{a_1 + 2a}{a^2}\,(c_{12}^2 - c_{31}^2) \tag{3.16}$$

И, наконец, из (3.11), с учетом (3.12), (3.13), (3.14), находим

$$b_{31} = (c_{22} - c_{11}) \frac{c_{31}}{a} - \frac{a_{31}c_{12}^2}{2a^2}, \qquad b_{12} = \left(c_{22} - c_{11} + \frac{a_{31}c_{31}}{2a}\right) \frac{c_{12}}{a}$$

$$b_{23} = -\frac{a_1 + 2a}{a^2} c_{12}c_{31} \tag{3.17}$$

Воспользовавшись найденными значениями (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), получаем для кинетической энергии (3.1) следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2} [a_1P_1^2 + a (P_2^2 + P_3^2)] + a_{31} P_3P_1 + \tag{3.18}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{b_{11}R_1^2 + b_{22}R_2^2 + \left[b_{22} + \frac{a_1 + 2a}{a^2} (c_{12}^2 - c_{31}^2)\right] R_3^2\right\} -$$

$$- \frac{a_1 + 2a}{a^2} c_{12}c_{31}R_2R_3 + \left[(c_{22} - c_{11}) \frac{c_{31}}{a} - \frac{a_{31}c_{12}^2}{2a^2}\right]R_3R_1 +$$

$$+ \left(c_{22} - c_{11} + \frac{a_{31}c_{31}}{2a}\right) \frac{c_{12}}{a} R_1R_2 + c_{11}P_1R_1 + c_{22}P_2R_2 + \left(c_{22} - \frac{a_{31}c_{31}}{a}\right) P_3R_3 +$$

$$+ c_{31} (P_3R_1 + P_1R_3) + c_{12} (P_1R_2 + P_2R_1) - \frac{a_{31}c_{12}}{2a} (P_2R_3 + P_3R_2)$$

Условия (3.3) и соотношения (3.4) запишем, приняв во внимание (3.5), (3.7), (3.8), (3.12)

$$\lambda_1,\ \mu_1 \text{ — произвольны}, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \frac{a_{31}}{a} s$$

$$\mu_2 = \left(a_1 + a - \frac{a_{31}^2}{2a}\right) \frac{c_{12}}{a} s, \qquad \mu_3 = \left(\frac{a_1 + a}{a} c_{31} - \frac{a_{31}}{a} c_{22}\right) s \tag{3.19}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left(a_{31}P_2 + \frac{a_{31}c_{12}}{a} R_1 + \frac{a_1 + a}{a} c_{31}R_2 - \frac{a_1 + a}{a} c_{12}R_3\right) J$$

$$J = P_1 - \frac{c_{31}}{a} R_3 - \frac{c_{12}}{a} R_2 - s \tag{3.20}$$

Соотношению (3.20) удовлетворим, полагая

$$P_1 - \frac{c_{31}}{a} R_3 - \frac{c_{12}}{a} R_2 = s \tag{3.21}$$

Из 27 параметров, отмеченных в конце § 1, в (3.18), (3.19), (3.21) сохранены 17: величины a_1, a, a_{31}, b_{11}, b_{22}, c_{11}, c_{22}, c_{31}, c_{12}, λ_1, μ_1, λ_3 и пять постоянных интегрирования, из которых три h, m, R^2 входят в интегралы (1.15) (постоянная интеграла (3.21) фиксирована).

§ 4. Частные случаи решения (3.21). Первый случай интегрируемости с произвольной постоянной в четвертом интеграле. Постоянная s интеграла (3.21) связана с параметрами λ_3, μ_2, μ_3 соотношениями (3.19) и поэтому, вообще говоря, не является произвольной. Но в том случае, когда $a_{31} = 0$, $c_{12} = 0$, $c_{31} = 0$, постоянная s произвольна. Таким образом, если

$$2T = a_1P_1^2 + a (P_2^2 + P_3^2) + b_1R_1^2 + b (R_2^2 + R_3^2) + 2c_1P_1R_1 +$$

$$+ 2c (P_2R_2 + P_3R_3) \tag{4.1}$$

и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$, λ_1, μ_1 — произвольны, то уравнения (1.14) допускают четвертый интеграл

$$P_1 = \text{const} \tag{4.2}$$

и задача сводится к квадратурам. Это решение содержит 14 параметров.

При $\lambda_1 = 0$ соответствующее решение дано в статье [13], а при $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$ приходим к решению, указанному Кирхгофом [5].

На основании отмеченной в конце § 1 аналогии, полагая в (4.1) $b_1 = \varepsilon/a_1$, $b = \varepsilon/a$, $c_1 = c = 0$, получаем решение задачи о движении твердого тела в центральном ньютоновском поле сил, которое при $\lambda_1 = 0$ сводится к решению, указанному Горячевым [23, 25]. Последнее, в свою очередь, при $\varepsilon = 0$ сводится к случаю интегрируемости, установленному Лагранжем в задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку [28].

Полагая в (3.18) $b_{ij} = c_{ij} = 0$, $a_{31} \neq 0$, получаем из (3.21) решение задачи о теле, имеющем неподвижную точку и несущем вращающиеся маховики, указанное Сретенским (см. введение). Это решение при $\lambda_i = 0$ сводится к решению Гесса [29].

Возвращаясь к задаче о движении тела в жидкости, отметим, что при $\lambda_i = 0$ решение (3.21) сводится к решению задачи о движении тяжелого твердого тела в тяжелой жидкости [16], а при $\lambda_i = 0$, $\mu_i = 0$ — к решениям, полученным Чаплыгиным [9].

§ 5. Переход к главным центральным осям (первый случай). Допустим вначале, что в (3.18)

$$a_{31} \neq 0 \tag{5.1}$$

Направляя оси координат по главным осям эллипсоида импульсивных моментов, записываем (1.12) так

$$T = \frac{1}{2}(a_i P_i^2 + b_i R_i^2) + b_{23} R_2 R_3 + b_{31} R_3 R_1 + b_{12} R_1 R_2 + c_{ij} P_i R_j \qquad (c_{ij} = c_{ji}) \tag{5.2}$$

отмечая в (3.18), (3.19), (3.20) звездочкой те величины, которые совпадают по обозначению с соответствующими величинами, входящими в (5.2), но изменяются при повороте системы координат вокруг второй оси

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}[a_1^* P_1^{*2} + a(P_2^2 + P_3^{*2})] + a_{31} P_3^* P_1^* + \frac{1}{2}\Big\{b_{11} R_1^{*2} + b_{22} R_2^2 + {} \\ & + \Big[b_{22} + \frac{a_1^* + 2a}{a^2}(\overset{*}{c}{}_{12}^{2} - \overset{*}{c}{}_{31}^{2})\Big] R_3^{*2}\Big\} - \frac{a_1^* + 2a}{a^2} \overset{*}{c}_{12} \overset{*}{c}_{31} R_2 R_3^* + {} \\ & + \Big[(c_{22} - c_{11}) \frac{\overset{*}{c}_{31}}{a} - \frac{a_{31} \overset{*}{c}{}_{12}^{2}}{2a^2}\Big] R_3^* R_1^* + \Big(c_{22} - c_{11} + \frac{a_{31} \overset{*}{c}_{31}}{2a}\Big) \frac{\overset{*}{c}_{12}}{a} R_1^* R_2 + {} \\ & + c_{11} P_1^* R_1^* + c_{22} P_2 R_2 + \Big(c_{22} - \frac{a_{31} \overset{*}{c}_{31}}{a}\Big) P_3^* R_3^* - \frac{a_{31} \overset{*}{c}_{12}}{2a}(P_2 P_3^* + P_3 R_2^*) + {} \\ & + \overset{*}{c}_{31}(P_3^* R_1^* + P_1^* R_3^*) + \overset{*}{c}_{12}(P_1^* R_2 + P_2 R_1^*) \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\lambda_1^*,\ \mu_1^* \text{ — произвольны,} \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3^* = \frac{a_{31}}{a} s \tag{5.4}$$

$$\mu_2 = \Big(a_1^* + a - \frac{a_{31}^2}{2a}\Big) \frac{c_{12}^*}{a} s, \quad \mu_3^* = \Big(\frac{a_1^* + a}{a} c_{31}^* - \frac{a_{31}}{a} c_{22}\Big) s$$

$$\begin{gathered} \frac{dJ}{dt} = \Big(a_{31} P_2 + \frac{a_{31} c_{12}^*}{a} R_1^* + \frac{a_1^* + a}{a} \overset{*}{c}_{31} R_2 - \frac{a_1^* + a}{a} \overset{*}{c}_{12} R_3^*\Big) J \\ J = P_1^* - \frac{c_{31}^*}{a} R_3^* - \frac{c_{12}^*}{a} R_2 - s \end{gathered} \tag{5.5}$$

Подставив в (5.2) P_1, P_3, R_1, R_3, выраженные через P_1^*, R_1^*, P_3^*, R_3^* по формулам

$$x_1 = x_1^* \cos\alpha + x_3^* \sin\alpha, \qquad x_3 = -x_1^* \sin\alpha + x_3^* \cos\alpha \tag{5.6}$$

отождествим полученную квадратичную форму с (5.3)

$$a_1^* = a_1 \cos^2\alpha + \alpha_3 \sin^2\alpha, \qquad a = a_2, \qquad a = a_1 \sin^2\alpha + a_3 \cos^2\alpha \tag{5.7}$$

$$a_{31}(a_1 - a_3)\cos\alpha \sin\alpha \tag{5.8}$$

$$b_2 + ((a_1^* + 2a) / a^2)(c_{12}^{*2} - c_{31}^{*2}) = b_1 \sin^2\alpha + b_3 \cos^2\alpha + 2b_{31}\cos\alpha \sin\alpha$$

$$(c_{22} - c_{11}) c_{31}^{*} / a - a_{31} c_{12}^{*2} / 2a^2 = (b_1 - b_3)\cos\alpha \sin\alpha + {} + b_{31}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \tag{5.9}$$

$$(c_{22} - c_{11} + {}^1/_2\, c_{31}^{*} a_{31} / a)\, c_{12}^{*} / a = b_{12}\cos\alpha - b_{23}\sin\alpha \tag{5.10}$$

$$-((a_1^* + 2a) / a^2)\, c_{12}^{*} c_{31}^{*} = b_{12}\sin\alpha + b_{23}\cos\alpha$$

$$c_{11} = c_1 \cos^2\alpha + c_3 \sin^2\alpha + 2c_{31}\cos\alpha \sin\alpha, \qquad c_{22} = c_2 \tag{5.11}$$

$$c_{22} - a_{31} c_{31}^{*} / a = c_1 \sin^2\alpha + c_3 \cos^2\alpha + 2c_{31}\cos\alpha \sin\alpha \tag{5.12}$$

$$c_{31}^{*} = (c_1 - c_3)\cos\alpha \sin\alpha + c_{31}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$c_{12}^{*} = c_{12}\cos\alpha - c_{23}\sin\alpha, \qquad - {}^1/_2\, a_{31} c_{12}^{*} / a = c_{12}\sin\alpha + c_{23}\cos\alpha \tag{5.13}$$

Из (5.7)

$$a_1^* + a = a_1 + a_3, \qquad \cos^2\alpha = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} \tag{5.14}$$

Из (5.13), (5.8), (5.14)

$$c_{12} = k(a_2 + a_3)\cos\alpha, \qquad c_{23} = -k(a_1 + a_2)\sin\alpha, \qquad c_{12}^{*} = 2ka_2 \tag{5.15}$$

Из (5.12), (5.8), (5.14)

$$c_{31} = \frac{a_1(a_2 - a_3)(c_2 - c_1) + a_3(a_1 - a_2)(c_2 - c_3)}{(a_1^2 - a_3^2)\cos\alpha \sin\alpha} \tag{5.16}$$

$$c_{31}^{*} = a_2 \frac{(a_1 - a_2)(c_2 - c_3) - (a_2 - a_3)(c_2 - c_1)}{(a_1^2 - a_3^2)\cos\alpha \sin\alpha} \tag{5.17}$$

а из (5.11), (5.14), (5.16)

$$c_{22} - c_{11} = \frac{(a_1 + a_2)(c_2 - c_1) + (a_2 + a_3)(c_2 - c_3)}{a_1 + a_3} \tag{5.18}$$

Подставив (5.14), (5.15), (5.17) в (5.10), находим

$$b_{12} = k \frac{(c_2 - c_1)[a_2^2 + a_2(a_1 - a_3) + 2a_1^2 - a_1 a_3 - 2a_3^2] - (a_1^2 - a_2^2)(c_2 - c_3)}{(a_1^2 - a_3^2)\cos\alpha} \tag{5.19}$$

$$b_{23} = k \frac{(c_2 - c_3)[a_2^2 - a_2(a_1 - a_3) + 2a_3^2 - a_1 a_3 - 2a_1^2] + (a_2^2 - a_3^2)(c_2 - c_1)}{(a_1^2 - a_3^2)\sin\alpha}$$

И, наконец, из (5.9) с учетом (5.14), (5.15), (5.17), (5.18) получаем

$$2(a_1^2 + a_1 a_3 + a_3^2 - 3a_2^2)(a_1 - a_3)\, b_{31}\cos\alpha \sin\alpha =$$

$$= (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)[(b_2 - b_1)(3a_2 + 2a_1 + a_3) - (b_2 - b_3)(3a_2 + 2a_3 + a_1)] + {} + \frac{(a_1 - a_3)(a_1 + a_2 + a_3)}{(a_1 + a_3)^2}[(c_2 - c_1)(3a_2 + 2a_1 - a_3) + (c_2 - c_3) \times {} \times (3a_2 + 2a_3 - a_1)][(c_2 - c_3)(a_1 - a_2) - (c_2 - c_1)(a_2 - a_3)] \tag{5.20}$$

$$4(a_1^2 + a_1 a_3 + a_3^2 - 3a_2^2)k^2 = (b_2 - b_1)(a_2 - a_3) - (b_2 - b_3)(a_1 - a_2) + {} + \frac{(c_2 - c_3)(a_1 - a_2) - (c_2 - c_1)(a_2 - a_3)}{(a_1 + a_3)^2} \left\{ \frac{c_2 - c_3}{a_2 - a_3}[(a_1 + a_3)^2 - a_2(a_1 + a_3) - 2a_3^2] - {} - \frac{c_2 - c_1}{a_1 - a_2}[(a_1 + a_3)^2 - a_2(a_1 + a_3) - 2a_1^2] \right\} \tag{5.21}$$

Вследствие (5.6), (5.14), (5.8), (5.15), (5.17) соотношения (5.4), (5.5) принимают вид

$$s = a_2\left(\frac{\lambda_1}{a_1 - a_2}\cos\alpha + \frac{\lambda_3}{a_2 - a_3}\sin\alpha\right)$$

$$\lambda_2 = 0, \quad \mu_2 = k(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\left(\frac{\lambda_2}{a_1 - a_2}\cos\alpha + \frac{\lambda_3}{a_2 - a_3}\sin\alpha\right) \tag{5.22}$$

$$\mu_1 \sin\alpha + \mu_3 \cos\alpha =$$

$$= \left[a_2 \frac{(c_2 - c_3)(a_1 - a_2) - (c_2 - c_1)(a_2 - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} - c_2\right](\lambda_1 \sin\alpha + \lambda_3 \cos\alpha)$$

$$J = \left[P_1 + \frac{(c_2 - c_1)(a_2 - a_3) - (c_2 - c_3)(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_3)(a_1 - a_2)} R_1 - \frac{a_2}{a_1 - a_2}\lambda_1\right]\cos\alpha -$$

$$- \left[P_3 + \frac{(c_2 - c_3)(a_1 - a_2) - (c_2 - c_1)(a_2 - a_3)}{(a_1 + a_3)(a_2 - a_3)} R_3 + \frac{a_2}{a_2 - a_3}\lambda_3\right]\sin\alpha - 2kR_2 \tag{5.23}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left\{\left[P_2 + \frac{(a_1 - a_2)(c_2 - c_3) - (a_2 - a_3)(c_2 - c_1)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} R_2\right](a_1 - a_3)\cos\alpha \sin\alpha -\right.$$

$$\left. - 2k\,[(a_2 + a_3) R_1 \sin\alpha + (a_2 + a_1) R_3 \cos\alpha]\right\} J \tag{5.24}$$

Итак, если в главных центральных осях кинетическая энергия (1.12) имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(a_i P_i^2 + b_i R_i^2) + b_{23} R_2 R_3 + b_{31} R_3 R_1 + b_{12} R_1 R_2 + c_1 P_1 R_1 +$$

$$+ c_2 P_2 R_2 + c_3 P_3 R_3 + c_{31}(P_3 R_1 + P_1 R_3) + k(a_2 + a_3)(P_1 R_2 + P_2 R_1)\cos\alpha -$$

$$- k(a_1 + a_2)(P_2 R_3 + P_3 R_2)\sin\alpha \tag{5.25}$$

причем c_{31}, b_{23}, b_{31}, b_{12} определяются формулами (5.16) (5.19), а величины k и α находятся из (5.14), (5.21), и если выполнены условия (5.22), то функция (5.23) удовлетворяет соотношению (5.24).

§ 6. Второй случай интегрируемости уравнений (1.14) с произвольной постоянной в четвертом интеграле. Механический смысл решения $J = 0$ указан в конце § 2. Вследствие (5.1) эллипсоид импульсивных моментов имеет два различных круговых сечения, поэтому, следуя Чаплыгину [9], естественно исследовать возможность существования в теле двух прямых, обладающих указанным свойством.

Рассмотренная ранее прямая, перпендикулярная одному из двух круговых сечений, образует с первой, главной координатной осью угол, который обозначен через α, и, следовательно, перпендикуляр ко второму круговому сечению наклонен к той же оси под углом $-\alpha$. Этот перпендикуляр будет обладать тем же свойством, что и первый, если кинетическая энергия (5.25) и условия (5.22) допустят замену α на $-\alpha$. Но при такой замене коэффициенты c_{23}, c_{31}, b_{23}, b_{31} квадратичной формы (5.25), определенные формулами (5.15), (5.16), (5.19), (5.20), изменяют знак и поэтому их следует обратить в нуль, что приводит к условиям

$$k = 0 \tag{6.1}$$

$$a_1(a_2 - a_3)(c_2 - c_1) + a_3(a_1 - a_2)(c_2 - c_3) = 0 \tag{6.2}$$

и еще к двум уравнениям, получаемым приравниванием к нулю правых частей (5.20), (5.21). Последние при подстановке в них полученных из (6.2) значений

$$c_2 - c_1 = -\varkappa a_3(a_1 - a_2), \qquad c_2 - c_3 = \varkappa a_1(a_2 - a_3) \tag{6.3}$$

дают

$$b_2 - b_1 = -\varkappa^2 (a_1 - a_2)(a^2{}_3 - a_1 a_2)$$

$$b_2 - b_3 = \varkappa^2 (a_2 - a_3)(a_1{}^2 - a_2 a_3) \qquad (6.4)$$

При условиях (6.1), (6.3), (6.4) не только

$$c_{23} = c_{31} = 0, \qquad b_{23} = b_{31} = 0 \qquad (6.5)$$

но и

$$c_{12} = 0, \qquad b_{12} = 0 \qquad (6.6)$$

(что видно из (5.15), (5.19)), и, следовательно, все три управляющие поверхности оказываются соосными.

Подставим (6.1), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) в (5.25), (5.22), (5.23), (5.24)

$$2T = a_1 [P_1 + \varkappa (a_2 + a_3) R_1]^2 + a_2 [P_2 + \varkappa (a_3 + a_1) R_2]^2 + a_3 [P_3 + \varkappa (a_1 + a_2) R_3]^2 + b (R_1{}^2 + R_2{}^2 + R_3{}^2) + 2c (P_1 R_1 + P_2 R_2 + P_3 R_3) \qquad (6.7)$$

$$\lambda_2 = 0, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \mu_1 \sin\alpha + \mu_3 \cos\alpha = -c(\lambda_1 \sin\alpha + \lambda_3 \cos\alpha) \qquad (6.8)$$

$$J = [P_1 - \varkappa (a_2 - a_3) R_1 - \lambda_1 a_2 / (a_1 - a_2)] \cos\alpha - [P_3 + \varkappa (a_1 - a_2) R_3 + \lambda_3 a_2 / (a_2 - a_3)] \sin\alpha \qquad (6.9)$$

$$dJ / dt = [P_2 + \varkappa (a_1 + a_3) R_2] (a_1 - a_3) \cos\alpha \sin\alpha J \qquad (6.10)$$

$$(b = b_2 - \varkappa^2 a_2 (a_1 + a_3)^2, \quad c = c_2 - \varkappa (a_1 + a_3))$$

Заменяя в (6.8), (6.9), (6.10) α на $-\alpha$, получаем

$$\mu_1 = -c\lambda_1, \quad \mu_3 = -c\lambda_3$$

$$J^* = [P_1 - \varkappa (a_2 - a_3) R_1 + \lambda_1 a_2 / (a_1 - a_2)] \cos\alpha + [P_3 + \varkappa (a_1 - a_2) R_3 + \lambda_3 a_2 / (a_2 - a_3)] \sin\alpha \qquad (6.11)$$

$$dJ^* / dt = -[P_2 + \varkappa (a_1 + a_3) R_3] (a_1 - a_3) \cos\alpha \sin\alpha J^* \qquad (6.12)$$

Из (6.10), (6.12)

$$JJ^* = \mathrm{const} \qquad (6.13)$$

или, с учетом (6.9), (6.11), (5.14)

$$(a_2 - a_1) [P_1 - \varkappa (a_2 - a_3) R_1 + \lambda_1 a_2 / (a_2 - a_1)]^2 + (a_2 - a_3) \times [P_3 - \varkappa (a_2 - a_1) R_3 + \lambda_3 a_2 / (a_2 - a_3)]^2 = C \qquad (6.14)$$

Итак, если кинетическая энергия (1.12) имеет вид (6.7) и выполнены условия

$$\lambda_2 = 0, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \mu_1 = -c\lambda_1, \qquad \mu_3 = -c\lambda_3 \qquad (6.15)$$

то уравнения (1.14) имеют четвертый интеграл (6.14), содержащий произвольную постоянную C. В этом решении сохранено 14 параметров: $a_1, a_2, a_3, b, c, \varkappa, \lambda_1, \lambda_3, h, m, R^2, C$ и две постоянные остальных интегралов.

Указанный здесь случай интегрируемости при $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ сводится к решению, найденному Стекловым [6] для тела, занимающего односвязную область.

Квадратичная форма (5.25) имеет механический смысл лишь при действительных α, поэтому, полагая, например, $a_1 > a_3$, приходим вследствие (5.14) к условиям

$$a > a_2 > a_3 \qquad (6.16)$$

При этом левая часть интеграла (6.14) распадается на произведение двух действительных сомножителей (6.13). Однако в (6.7), (6.14), (6.15) угол α не фигурирует, и условие (6.16) может быть снято. При $a_2 > a_1, a_2 > a_3$ интеграл (6.14) не имеет представления (6.13) с действительными J, J^*.

§ 7. Переход к главным центральным осям (второй случай). Пусть теперь в (3.18)

$$a_{31} = 0 \tag{7.1}$$

При этом эллипсоид импульсивных моментов оказывается эллипсоидом вращения, и, не нарушая условий существования (3.21), можно поворотом системы координат вокруг первой оси добиться того, чтобы

$$c_{12} = 0 \tag{7.2}$$

Если при этом и $c_{31} = 0$, то приходим к случаю интегрируемости, отмеченному в § 4, поэтому полагаем

$$c_{31} \neq 0 \tag{7.3}$$

В случае $a_1 \neq a$ прямая постоянного импульсивного момента параллельна оси вращения эллипсоида импульсивных моментов и проходит через точку (3.12)

$$x_2 = c_{31} / a \neq 0, \qquad x_3 = -c_{12} / a = 0$$

и поэтому единственна. Пусть

$$a_1 = a \tag{7.4}$$

Совместим оси координат с главными осями дополнительной поверхности. Отнесем квадратичную форму (3.18) к этим осям, приняв во внимание (7.1), (7.2), (7.3), (7.4)

$$T = \frac{a}{2}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + c_1P_1R_1 + c_2P_2R_2 + c_3P_3R_3 + \\ + \frac{1}{2}(b_1R_1^2 + b_2R_2^2 + b_3R_3^2) + b_{31}R_{31}R_1 \tag{7.5}$$

и отмечая в (3.18), (3.19), (3.20) звездочкой величины, совпадающие по обозначению с соответствующими величинами, входящими в (7.5), но изменяются при повороте системы координат вокруг второй оси

$$2T = a(P_1^{*2} + P_2^2 + P_3^{*2}) + b_{11}R_1^{*2} + b_{22}R_2^2 + (b_{22} - 3c_{31}^2 / a) R_3^{*2} + \\ + 2(c_{22} - c_{11})(c_{31} / a) R^*_3 R_1^* + 2c_{11}P_1^*R_1^* + 2c_{22}(P_2R_2 + P_3^*R_3^*) + \\ + 2c_{31}(P_3^*R_1^* + P_1^*R_3^*) \tag{7.6}$$

$$s = {}^1\!/_2\, \mu_3^* / c_{31},\ \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3^* = 0,\ \mu_2 = 0,\ \lambda_1^*,\ \mu_1^* \text{ — произвольны} \tag{7.7}$$

$$dJ / dt = 2c_{31}R_2J, \quad J = P_1^* - (c_{31} / a) R_3^* - {}^1\!/_2\, \mu_3^* / c_{31} \tag{7.8}$$

Подставляя в (7.5) P_1, P_3, R_1, R_3, выраженные через P_1^*, P_3^*, R_1^*, R_3^* по формулам

$$x_1 = x_1^* \cos\beta + x_3^* \sin\beta, \qquad x_3 = -x_1^* \sin\beta + x_3^* \cos\beta \tag{7.9}$$

отождествим полученную квадратичную форму с (7.6)

$$c_{11} = c_1 \cos^2\beta + c_3 \sin^2\beta, \quad c_{22} = c_2, \quad c_{22} = c_1 \sin^2\beta + c_3 \cos^2\beta \\ c_{31} = (c_1 - c_3) \cos\beta \sin\beta \tag{7.10}$$

$$b_2 - 3c_{31}^2 / a = b_1 \sin^2\beta + b_3 \cos^2\beta + 2b_{31} \cos\beta \sin\beta \tag{7.11}$$

$$(c_{22} - c_{11}) c_{31} / a = (b_1 - b_3) \cos\beta \sin\beta + b_{31}(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$$

Из (7.10)

$$c_{22} - c_{12} = 2c_2 - c_1 - c_3, \quad \cos^2\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 - c_3}, \quad \sin^2\beta = \frac{c_2 - c_3}{c_1 - c_3} \tag{7.12}$$

Из (7.11) с учетом (7.10), (7.12) находим

$$b_{31} = [k - 2(c_1 - c_3) / a] (c_1 - c_3) \cos\beta \sin\beta \qquad (7.13)$$

$$b_2 - b_1 = (c_1 - c_2)[k - (c_1 - c_2) / a], \quad b_2 - b_3 = (c_2 - c_3)[k - (c_2 - c_3)/a]$$

Вследствие (7.9), (7.10), (7.12) условия (7.7) и соотношения (7.8) записываются так:

$$\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 \sin\beta + \lambda_3 \cos\beta = 0, \qquad \mu_2 = 0 \qquad (7.14)$$

$$J = \left[P_1 - \frac{c_2 - c_3}{a} R_1 - \frac{\mu_1}{2(c_1 - c_2)}\right] \cos\beta - \left[P_3 + \frac{c_1 - c_2}{a} R_3 + \frac{\mu_3}{2(c_2 - c_3)}\right] \sin\beta \qquad (7.15)$$

$$\frac{dJ}{dt} = 2R_2 (c_1 - c_3) \cos\beta \sin\beta J \qquad (7.16)$$

Подставив (7.13) в (7.5), приходим к утверждению: если кинетическая энергия (1.12) выражена формулой

$$2T = a(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + b_2(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) + 2c_1P_1R_1 + 2c_2P_2R_2 + 2c_3P_3R_3 + (c_1 - c_2)[(c_1 - c_2)/a - k] R_1^2 + (c_2 - c_3)[(c_2 - c_3)/a - k] R_3^2 + 2[k - 2(c_1 - c_3)/a](c_1 - c_3) \cos\beta \sin\beta R_1R_3 \qquad (7.17)$$

и выполнены условия (7.14), то функция (7.15) удовлетворяет соотношению (7.16) (величина β находится из (7.12)).

Соотношение (7.16) допускает частное решение $J = 0$. В этом решении сохранены 14 параметров: a, c_1, c_2, c_3, b_2, k, λ_1, μ_1, μ_3, h, m, R^2 и две постоянные остальных интегралов.

§ 8. Третий случай интегрируемости с произвольной постояной в четвертом интеграле. Потребуем, чтобы квадратичная форма (7.17) и условия (7.14) допускали замену β на $-\beta$. Это возможно, если

$$k = 2(c_1 - c_3) / a, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_3 = 0$$

При этом (7.17) принимает вид

$$2T = a(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{(c_2 - c_3)^2}{a} R_1^2 + \frac{(c_3 - c_1)^2}{a} R_2^2 + \frac{(c_1 - c_2)^2}{a} R_3^2 + 2c_1P_1R_1 + 2c_2P_2R_2 + 2c_3P_3R_3 + b(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2)\left(b = b_2 - \frac{(c_1 - c_3)^2}{a}\right) \qquad (8.1)$$

Заменяя в (7.15), (7.16) β на $-\beta$, получаем

$$J^* = \left[P_1 - \frac{c_2 - c_3}{a} R_1 - \frac{\mu_1}{2(c_1 - c_2)}\right] \cos\beta + \left[P_3 + \frac{c_1 - c_2}{a} R_3 + \frac{\mu_3}{2(c_2 - c_3)}\right] \sin\beta \qquad (8.2)$$

$$\frac{dJ^*}{dt} = -2R_2(c_1 - c_3) \cos\beta \sin\beta J^* \qquad (8.3)$$

Из (7.16), (8.3)

$$JJ^* = \text{const}$$

или, с учетом (7.15), (8.2), (7.12)

$$(c_2 - c_1)\left[P_1 - \frac{c_2 - c_3}{a} R_1 + \frac{\mu_1}{2(c_2 - c_1)}\right]^2 + (c_2 - c_3)\left[P_3 - \frac{c_2 - c_1}{a} R_3 + \frac{\mu_3}{2(c_2 - c_3)}\right]^2 = C \qquad (8.4)$$

Таким образом, если кинетическая энергия (1.12) имеет вид (8.1) при условиях $\lambda_i = 0$, $\mu_2 = 0$, то уравнения (1.14) имеют четвертый интеграл

(8.4), содержащий [15] произвольную постоянную C. В этом решении имеется 13 параметров.

При $\mu_1 = \mu_3 = 0$ полученное здесь решение сводится к случаю интегрируемости, установленному Ляпуновым [7].

По поводу интеграла (8.4) может быть высказано замечание, аналогичное сделанному в § 6 по отношению к интегралу (6.14).

Поступила 10 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirichlet L. Über einige Fälle in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressiben Flüssigen. Berl., Ber., 1852.
2. Clebsch. Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbarn Flüssigkeit. J. reine und angew. Math., 1856, Bd. 53.
3. Clebsch. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann., 1870, Bd. 3.
4. Thomson W., Tait P. Treatise on natural phylosophy. Oxford, 1867.
5. Kirchhoff G. R. Über die Bewegung eines Rortationkörpers in einer Flüssigkeit. J. reine und angew. Math., 1870, Bd. 3.
6. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
7. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости. Сообщ. Харьковск. матем. о-ва, т. IV; 1893; Собр. соч., т. 1, Изд. АН СССР, 1954.
8. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья первая). Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествозн., 1894, т. VI; Собр. соч., т. 1, Гостехиздат, 1948.
9. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья вторая). Матем. сб., 1897, т. XX; Собр. соч., т. 1, Гостехиздат, 1948.
10. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествозн., 1903, т. XI; Собр. соч., т. 1, Гостехиздат, 1948.
11. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. Acta math., 1889, v. 12; Научные работы. Изд. АН СССР, 1948.
12. Харламов П. В. Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в жидкости. Докл. АН СССР, 1956, т. 107, № 3.
13. Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 2.
14. Харламов П. В. Поступательные движения тяжелого твердого тела в жидкости. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
15. Харламов П. В. Один общий случай интегрируемости уравнений Кирхгофа. Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. XX, вып. 1.
16. Харламов П. В. О линейном интеграле уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости. Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. XX, вып. 1.
17. Харламов П. В. Два линейных интеграла уравнений Кирхгофа. Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. XX, вып. 1.
18. Basset. On the motion of a ring in an infinite liquid. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1887, vol. VI.
19. Fawcett. On the motion of solids in a Liquid. Quart. J. Math., 1893, vol. XXVI.
20. Ламб Г. Гидродинамика. Огиз, 1947.
21. Суслов Г. К. Теория потенциала и гидродинамика, т. II, Киев, 1910.
22. Brun F. Rotation kring en fix punkt. Ofversigt af Konql. Svenska Vetensk. Akad. Vörhandlingar. Stokhlom, 1893.
23. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.
24. Харламова Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1959, № 6.
25. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2.
26. Белецкий В. В. Об одном случае движения твердого тела около закрепленной точки в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
27. Stekloff W. Remarque sur un probléme de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indefini et sur le probleme de M. de Brun. Compt. rend., 1902, v. 135.
28. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика, т. II, Гостехиздат, 1950.
29. Hess W. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung dans Problems der Bewegung eines festen Punkt. Math. Ann., 1890, Bd. 37.