ПМТФ, № 5, 1962

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛО- И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЧНО ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА

А. Ф. Настоящий, Л. Д. Пузиков

(*Москва*)

Дается вывод уравнений, описывающих процессы тепло- и электропроводности в частично ионизированном газе. Система кинетических уравнений для смеси электронов, ионов и атомов записана в линейном по градиентам приближении и разрешена относительно потоков. Предполагается, что объемная рекомбинация отсутствует и температуры компонент смеси одинаковы.

Работа возникла в связи с изучением процессов, происходящих в плазменном диоде—термоэлементе с газовым промежутком. Как указали ранее Б. Мойжес и Г. Пикус [1], физические условия в газовом промежутке уже созданных диодов (давление $p \sim 1$ *мм* рт. ст., температура $T \sim 1000°$K) таковы, что процессы тепло- и электропроводности газа будут в основном иметь диффузионный характер. Б Мойжес и Г. Пикус дали также метод расчета плазменного диода в диффузионном приближении и осуществили примерный расчет, исходя из простейших предположений о коэффициентах диффузии, теплопроводности и о проводимости.

Ниже получены более точные выражения для кинетических коэффициентов газа путем разложения функций распределения, входящих в систему кинетических уравнений для смеси электронов, ионов и нейтральных атомов, по степеням градиентов температуры, поля и концентраций; условие применимости данного приближения — малость изменения основных величин на длине свободного пробега частицы.

Аналогичные вопросы рассматривались в работах [2–4], но в них ставились иные задачи (электропроводность в сильных полях и др.).

Общая система уравнений диффузии в газовой смеси при наличии вязкого переноса импульса в газе с использованием приближения «13 моментов» в методе Града дается в работе [5].

§ 1. Кинетические уравнения и функция распределения. В отсутствие объемной рекомбинации система кинетических уравнений для частично ионизированного газа не отличается от соответствующей системы для трехкомпонентной смеси

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{p} \nabla_r f_\alpha - e_\alpha \nabla \varphi \nabla_p f_\alpha = \sum_\beta I_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

Индексы α и β указывают сорт частиц, f_α — функция распределения частиц сорта α, φ — электрический потенциал, e_α — заряд частиц ($+e$, $-e$ или 0). Интеграл столкновений $I_{\alpha\beta}$ записывается для заряженных частиц в форме, предложенной Л. Д. Ландау [6]

$$I_{\alpha\beta} = -\frac{\partial q_{\alpha\beta k}}{\partial p_k}, \qquad q_{\alpha\beta k} = \pi e^4 L n_\alpha n_\beta \int d^3 p' \left(f_\alpha \frac{\partial f_\beta'}{\partial p_l'} - f_\beta \frac{\partial f_\alpha'}{\partial p_l} \right) \frac{g^2 \delta_{kl} - g_k g_l}{g^3}$$

для столкновений с участием нейтральных частиц в больцмановском виде

$$I_{\alpha\beta} = \int (f_\alpha' f_\beta' - f_\alpha f_\beta)\, g \sigma_{\alpha\beta} d\Omega d^3 p_\beta$$

Здесь g — относительная скорость частиц при столкновении и $\sigma_{\alpha\beta}$ — дифференциальное сечение.

В предположении, что основные величины (плотность, температура) мало меняются на расстояниях порядка длины свободного пробега, функции распределения f_α могут быть разложены по градиентам этих величин [7–9]. Удобно осуществить такое разложение методом, предложенным

Градом [8], разлагая функции распределения не непосредственно по градиентам, а по потокам частиц и тепла, которые в данном приближении являются линейными функциями градиентов. Для стационарного режима и в отсутствие макроскопического движения в газе разложение Града записывается следующим образом:

$$f_\alpha = n_\alpha f_{0\alpha}\left\{1 + \frac{\mathbf{j}_\alpha \mathbf{p}}{n_\alpha T} + \frac{\mathbf{b}_\alpha \mathbf{p}}{n_\alpha T}\left[\frac{p^2}{2m_\alpha T} - \frac{5}{2}\right]\right\} \tag{1.2}$$

Здесь n_α — плотность частиц α, $f_{0\alpha}$ — локальное максвеллово распределение по импульсам. Постоянная Больцмана положена равной единице. Величина $\mathbf{j}_\alpha$ представляет собой поток частиц α, а величина $\mathbf{b}_\alpha$ является комбинацией потока тепла $\mathbf{q}_\alpha$, переносимого частицами α, и потока $\mathbf{j}_\alpha$

$$\frac{5}{2}\mathbf{b}_\alpha = \frac{\mathbf{q}_\alpha}{T} - \frac{5}{2}\mathbf{j}_\alpha \tag{1.3}$$

В этом нетрудно убедиться, подставив выражение (1.2) в определения потока частиц и потока тепла

$$\mathbf{j}_\alpha = \int \frac{\mathbf{p}}{m_\alpha} f_\alpha d^3p, \qquad \mathbf{q}_\alpha = \int \frac{\mathbf{p}}{m_\alpha}\frac{p^2}{2m_\alpha} f_\alpha d^3p$$

§ 2. Преобразование системы кинетических уравнений. Подстановка функции распределения (1.2) в кинетические уравнения (1.1) позволяет получить, во-первых, уравнения для потоков $\mathbf{j}_\alpha$ и $\mathbf{q}_\alpha$, и, во-вторых, выражения, связывающие потоки и градиенты плотностей и температуры.

Первое из уравнений получается простым интегрированием системы (1.1) по импульсам; при этом правая часть обращается в нуль (вследствие предполагаемого отсутствия рекомбинации в объеме)

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_\alpha = 0 \tag{2.1}$$

Второе уравнение для потоков, выражающее закон сохранения энергии при прохождении электрического тока через газ, получается при интегрировании левой и правой частей системы (1.1) с весом $p^2 / 2m_\alpha$ и суммировании результатов для всех компонент

$$\operatorname{div}(\mathbf{q} + \varphi\mathbf{j}) = 0 \qquad \left(\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \mathbf{j}_\alpha,\ \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha\right) \tag{2.2}$$

Правая часть обратилась в нуль вследствие сохранения энергии при столкновениях.

Здесь $\mathbf{q}$ — полный поток тепла и $\mathbf{j}$ — электрический ток.

При вычислении момента первого порядка от кинетических уравнений (1.1) получается система уравнений следующего вида:

$$\nabla(n_\alpha T) - n_\alpha e_\alpha \mathbf{E} = \sum_\beta \eta_{\alpha\beta}\mathbf{j}_\beta + \sum_\beta \zeta_{\alpha\beta}\mathbf{b}_\beta \tag{2.3}$$

Здесь обращается в нуль сумма правых частей (вследствие закона сохранения импульса):

$$\nabla p - \rho E = 0 \qquad \left(p = \sum_\alpha n_\alpha T,\ \rho = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha\right)$$

(p — давление газа и ρ — заряд единицы объема).

Уравнение для тепловых потоков получается при взятии момента третьего порядка от системы (1.1) (т. е. при интегрировании системы (1.1), умноженной на $\mathbf{p}p^2 / 2m_\alpha$)

$$\frac{5}{2} n_\alpha \nabla T = \sum_\beta \eta'_{\alpha\beta}\mathbf{j}_\beta + \sum_\beta \zeta_{\alpha\beta}\mathbf{b}_\beta \tag{2.4}$$

Приведем результаты вычислений коэффициентов в уравнениях (2.3) и (2.4).

Для столкновений заряженных частиц

$$
\begin{aligned}
&\eta_{\alpha\beta} = \frac{4}{3} g_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha\sigma_k \quad (\alpha\neq\beta), && \eta_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta\neq\alpha}\eta_{\beta\alpha}\\
&\zeta_{\alpha\beta} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\beta}\eta_{\alpha\beta} \quad (\alpha\neq\beta), && \zeta_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta\neq\alpha}\zeta_{\beta\alpha}\\
&\eta'_{\alpha\beta} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha}\eta_{\alpha\beta} \quad (\alpha\neq\beta), && \eta'_{\alpha\beta} = \frac{m_\beta}{m_\alpha}\zeta_{\alpha\beta}\\
&\zeta'_{\alpha\beta} = \frac{27}{4}\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta}\eta_{\alpha\beta} \quad (\alpha\neq\beta), && \eta'_{\alpha\alpha} = \zeta_{\alpha\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\zeta'_{\alpha\alpha} = -\frac{4}{3} g_{\alpha\alpha}m_\alpha n_\alpha\sigma_k - \sum_{\beta\neq\alpha}\eta_{\beta\alpha}\left\{\frac{15}{2}\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\beta^2} + \frac{13}{4}\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha^2} + 4\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta}\right\}
$$

Здесь

$$
\sigma_k = \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{T}\right)^2 L, \qquad \mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \qquad g_{\alpha\beta} = 2\sqrt{\frac{2T}{\pi\mu_{\alpha\beta}}}
$$

Для столкновений с участием атомов

$$
\begin{aligned}
&\eta_{\alpha\beta} = \frac{4}{3} g_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{11} \quad (\alpha\neq\beta), && \eta_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta\neq\alpha}\eta_{\beta\alpha}\\
&\zeta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\beta}\left[\frac{1}{2} + \frac{d\ln\sigma_{\alpha\beta}^{11}}{d\ln T}\right] \quad (\alpha\neq\beta), && \zeta_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta\neq\alpha}\zeta_{\beta\alpha}\\
&\eta'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha}\left[\frac{1}{2} + \frac{d\ln\sigma_{\alpha\beta}^{11}}{d\ln T}\right] \quad (\alpha\neq\beta), && \eta'_{\alpha\alpha} = \zeta_{\alpha\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\zeta'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta}\left\{10 - 2\frac{\sigma_{\alpha\beta}^{22}}{\sigma_{\alpha\beta}^{11}} + \frac{1}{\sigma_{\alpha\beta}^{11}}\left(\frac{3}{4}\sigma_{\alpha\beta}^{11} + 2\frac{d\sigma_{\alpha\beta}^{11}}{d\ln T} + \frac{d^2\sigma_{\alpha\beta}^{11}}{d(\ln T)^2}\right)\right\}
$$

$$
\zeta'_{\alpha\alpha} = -\frac{2}{3} g_{\alpha\alpha}n_\alpha m_\alpha\sigma_{\alpha\alpha}^{22} - \sum_{\beta\neq\alpha}\eta_{\beta\alpha}\left\{\frac{5}{2}\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha^2} + \frac{15}{2}\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\beta^2} + \right.
$$

$$
\left. + 2\frac{\mu_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta}\frac{\sigma_{\alpha\beta}^{22}}{\sigma_{\alpha\beta}^{11}} + \left(\frac{3}{4} + 2\frac{d\ln\sigma_{\alpha\beta}^{11}}{d\ln T} + \frac{1}{\sigma_{\alpha\beta}^{11}}\frac{d^2\sigma_{\alpha\beta}^{11}}{d(\ln T)^2}\right)\right\}
$$

Величина $\sigma_{\alpha\beta}^{lr}$ — усредненное по углам и энергиям сечение рассеяния

$$
\sigma_{\alpha\beta}^{lr} = \int_0^\infty e^{-x^2}x^{2r+3}dx\int\sigma_{\alpha\beta}\left(x\sqrt{\frac{2T}{\mu_{\alpha\beta}}},\ \cos\vartheta\right)(1-\cos^l\vartheta)\,d\Omega \tag{2.7}
$$

Сечение $\sigma_{\alpha\beta}^{lr}$ просто связано с обычно используемыми [9] коэффициентами $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$

$$
\Omega_{\alpha\beta}^{lr} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{lr} \tag{2.8}
$$

При вычислениях было использовано рекуррентное соотношение

$$
\sigma_{\alpha\beta}^{lr} = (r+1)\,\sigma_{\alpha\beta}^{lr-1} + \frac{d\sigma_{\alpha\beta}^{lr-1}}{d\ln T} \tag{2.9}
$$

причем в формулах для коэффициентов $\zeta'_{\alpha\beta}$ величина в круглых скобках может быть опущена, согласно приближению Кихара [10].

Полученные выражения годятся при любом числе компонент смеси и любом соотношении между массами компонент.

§ 3. Вычисление кинетических коэффициентов. Общие выражения для потоков, которые можно получить из уравнений (2.3), (2.4), являются довольно сложными, но для частично ионизированного газа могут быть существенно упрощены в ряде случаев.

A. Заряженные частицы отсутствуют. В этом случае $n_i = n_e = 0$, $n_n \equiv n$, $\mathbf{j}_n \equiv \mathbf{j}$ и т. д. Из коэффициентов (2.5), (2.6) отличен от нуля только ζ'_{nn}, который равен

$$\zeta'_{nn} = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{MT}{\pi}}\, n\sigma_{nn}^{22}$$

Система уравнений, описывающих газ, принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, \qquad nT = \mathrm{const}, \qquad \mathbf{q} - \frac{5}{2}T\mathbf{j} = -\varkappa\nabla T$$

Коэффициент теплопроводности равен

$$\varkappa = -\frac{25}{4}nT\frac{1}{\zeta'_{nn}} = \frac{75}{32}\sqrt{\frac{\pi T}{M}}\frac{1}{\sigma_{nn}^{22}}$$

Если сечение не зависит ни от углов, ни от энергий, то $\sigma_{nn}^{22} = 2\sigma_{nn}^{11}$ и (ср. [11], стр. 401)

$$\varkappa = \frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi T}{M}}\frac{1}{\sigma_{nn}}$$

B. Газ полностью ионизирован и электрически нейтрален. В этом случае $n_n = 0$, $n_i = n_e \equiv n$. Если ввести величину $a = 4/3\ g_e\, mn\sigma_k$, то матрицы коэффициентов можно записать в следующем виде:

$$(\eta) = a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad (\zeta) = -\frac{3}{2}a\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$(\eta') = -\frac{3}{2}a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -0\end{pmatrix}, \qquad (\zeta') = \begin{pmatrix}\zeta'_{ee} & 0\\ 0 & \zeta'_{ii}\end{pmatrix}$$

$$\zeta'_{ee} = -a\left(\sqrt{2} + 13/4\right), \qquad \zeta'_{ii} = -a\left(\sqrt{2M/m} + 15/2\right)$$

Разрешая систему (2.4) относительно $\mathbf{b}_\alpha$, получим

$$(\mathbf{b}_\alpha) = \begin{pmatrix}\mathbf{b}_e\\ \mathbf{b}_i\end{pmatrix} = \frac{5}{2}n\nabla kT\,(\zeta')^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - (\zeta')^{-1}(\eta')(\mathbf{j}_\alpha)$$

или в компонентах

$$\mathbf{b}_e = \frac{5}{2}\frac{n}{\zeta'_{ee}}\nabla kT + \frac{3}{2}\frac{a}{\zeta'_{ee}}(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e), \qquad \mathbf{b}_i = \frac{5}{2}\frac{n}{\zeta'_{ii}}\nabla kT$$

Отсюда видно, что перенос тепла в основном (с точностью до отношения $\zeta'_{ee} / \zeta'_{ii}$, т. е. с точностью $\sqrt{2m/M}$) осуществляется электронами. Складывая эти два уравнения и переходя к потоку тепла и электрическому току, получаем

$$\mathbf{q} - \frac{5}{2}kT(\mathbf{j}_e + \mathbf{j}_i) = -\varkappa\nabla T + \alpha T\mathbf{j}$$

где

$$\varkappa = -\frac{25}{4}\frac{nk^2T}{\zeta'_{ee}} = \frac{75}{32}\sqrt{\frac{\pi k^3 T}{m}}\frac{1}{\sigma_k}\frac{1}{2 + 13/4\sqrt{2}}$$
$$\alpha = \frac{15}{4}\frac{ak}{e\zeta'_{ee}} = -\frac{15}{4}\frac{k}{e}\frac{1}{\sqrt{2} + 13/4} \tag{3.1}$$

Сумма уравнений (2.3) равна нулю, откуда следует, что $\nabla(nkT) = 0$.

Если подставить в (2.3) выражение для $(\mathbf{b}_\alpha)$ из (2.4), то получится

$$neE\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = [(\eta) - (\zeta)(\zeta')^{-1}(\eta')](\mathbf{j}_\alpha) + \frac{5}{2}n\nabla kT(\zeta)(\zeta')^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Выпишем одно из этих уравнений (другое является его следствием)

$$ne\mathbf{E} = \left(a + \frac{9}{4}\frac{a^2}{\zeta'_{ee}}\right)(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e) + \frac{15}{4}\frac{nka}{\zeta'_{ee}}\nabla T$$

или если разрешить относительно тока, то получим

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha\nabla T) \qquad \left(\sigma = ne^2\left(a + \frac{9}{4}\frac{a^2}{\zeta'_{ee}}\right)^{-1} = \frac{3}{4}\frac{e^2}{\sigma_k}\sqrt{\frac{\pi}{2mkT}}\right)$$

Здесь σ — проводимость, коэффициент α тот же, что в уравнении для переноса тепла, что находится в согласии с принципами симметрии кинетических коэффициентов (см. [12], стр. 142).

С. Ионы и нейтральные атомы бесконечно тяжелы. 1°. Рассматривая случай квазинейтральной плазмы $n_i = n_e = n$, допустим, что все произведения $n_\alpha\sigma_{\alpha\beta}$ и $n\sigma_k$ одного порядка. В этом случае можно в качестве малого параметра использовать отношение $\sqrt{m/M}$.

Снова разрешим систему (2.4) относительно потоков $\mathbf{b}_\alpha$

$$(\mathbf{b}_\alpha) = \frac{5}{2}\nabla kT\zeta'^{-1}(n_\alpha) - \zeta'^{-1}\eta'(\mathbf{j}_\alpha) \tag{3.2}$$

Величины в скобках — столбцы, составленные из соответствующих величин. Буквами η, ζ и т. д. обозначены соответствующие матрицы. Если просуммировать эти три уравнения, то получится

$$\mathbf{b} = \sum_\alpha \mathbf{b}_\alpha = \frac{5}{2}\nabla kT\sum_{\alpha\beta}(\zeta'^{-1})_{\alpha\beta}n_\beta - \sum_{\alpha\beta}(\zeta'^{-1}\eta')_{\alpha\beta}\mathbf{j}_\beta \tag{3.3}$$

Отсюда нетрудно получить общее выражение для коэффициента теплопроводности

$$\varkappa = -\frac{25}{4}k^2T\sum_{\alpha\beta}(\zeta'^{-1})_{\alpha\beta}n_\beta \tag{3.4}$$

Если подставить выражение (3.2) в систему (2.3), то получится следующая система уравнений:

$$\nabla(n_\alpha kT) - n_\alpha e\mathbf{E} = \eta^j(\mathbf{j}_\alpha) + \frac{5}{2}\nabla kT\zeta\zeta'^{-1}(n_\alpha) \tag{3.5}$$

Здесь

$$\eta^j = \eta - \zeta\zeta'^{-1}\eta'$$

Первые два из этих трех уравнений ($\alpha = e, i, n$) можно разрешить относительно электронного и ионного токов (третье уравнение является следствием первых двух)

$$\mathbf{j}_e = \frac{1}{|\eta^{\times j}|}[\nabla(nkT)(\eta^j_{ii} - \eta^j_{ie}) + ne\mathbf{E}(\eta^j_{ii} + \eta^j_{ie})] - \tag{3.6}$$

$$-\frac{5}{2}\frac{1}{|\eta^{\times j}|}[(\zeta\zeta'^{-1}n)_e\eta^j_{ii} - (\zeta\zeta'^{-1}n)_i\eta^j_{ie}]\nabla kT - \mathbf{j}_n\frac{1}{|\eta^{\times j}|}(\eta^j_{ii}\eta^j_{en} - \eta^j_{ie}\eta^j_{in})$$

$$\mathbf{j}_i = \frac{1}{|\eta^{\times j}|}[\nabla(nkT)(-\eta^j_{ei} + \eta^j_{ee}) - ne\mathbf{E}(\eta^j_{ei} + \eta^j_{ee})] - \tag{3.7}$$

$$-\frac{5}{2}\frac{1}{|\eta^{\times j}|}[(\zeta\zeta'^{-1}n)_e(-\eta^j_{ei}) + (\zeta\zeta'^{-1}n)_i\eta^j_{ee}]\nabla kT - \mathbf{j}_n\frac{1}{|\eta^{\times j}|}(\eta^j_{ee}\eta^j_{in} - \eta^j_{ei}\eta^j_{en})$$

Величина $|\eta^{\times j}|$ есть определитель матрицы

$$\eta^{\times j} = \begin{pmatrix}\eta^j_{ee} & \eta^j_{ei}\\ \eta^j_{ie} & \eta^j_{ii}\end{pmatrix}$$

В случае квазинейтральной плазмы коэффициенты при $\mathbf{j}_n$ в приведенных выражениях одинаковы. Чтобы убедиться в этом, составим их разность

$$(\eta_{ee}^j \eta_{in}^j - \eta_{ei}^j \eta_{en}^j) - (\eta_{ii}^j \eta_{en}^j - \eta_{en}^j \eta_{in}^j) = \eta_{ni}^j \eta_{en}^j - \eta_{ne}^j \eta_{in}^j \qquad \Big\{\sum_\alpha \eta_{\alpha\beta}^j = 0\Big\}$$

Здесь использовано соотношение, указанное в фигурных скобках.

Далее нетрудно убедиться, что матрицы $\eta, \ldots, \zeta'$ можно записать в следующем виде:

$$\eta = (n)\,\lambda_1, \qquad \zeta = (n)\,\lambda_2\,(1\,/\,m), \qquad \eta' = (n\,/\,m)\,\lambda_2, \qquad \zeta' = (n)\,\lambda_3$$

где (n), $(1\,/\,m)$ и $(n\,/\,m)$ — диагональные матрицы с плотностями и массами на диагонали, а λ_1, λ_2 и λ_3 — симметричные матрицы. Отсюда следует, что

$$\eta^j = (n)\,\lambda_1 - (n)\,\lambda_2 \left(\frac{1}{m}\right) \lambda_3^{-1} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) \lambda_2 =$$
$$= (n) \left(\lambda_1 - \lambda_2 \left(\frac{1}{m}\right) \lambda_3^{-1} \left(\frac{1}{m}\right) \lambda_2\right) = (n)\,\lambda^j$$

где λ^j — также симметричная матрица. Имеем теперь

$$\eta_{ni}^j \eta_{en}^j - \eta_{ne}^j \eta_{in}^j = n\,(n_e - n_i) = \lambda_{ni}^j \lambda_{ne}^j$$

т. е. при равенстве плотностей ионов и электронов разность обращается в нуль. Поэтому в выражение для электрического тока $\mathbf{j}_n$ не входит

$$\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e = \frac{\mathbf{j}}{e} = \Big\{\nabla\,(nkT)\,(\eta_{ni}^j - \eta_{ne}^j) + ne\mathbf{E}\,(\eta_{ni}^j + \eta_{ne}^j) -$$
$$- \frac{5}{2}\,[(\zeta\zeta'^{-1}\,n)_e\,\eta_{ni}^j - (\zeta\zeta'^{-1}\,n)_i \eta_{ne}^j]\,\nabla kT\Big\} \frac{1}{|\,\eta^{\times j}\,|} \qquad (3.8)$$

Отсюда получается выражение для проводимости

$$\sigma = \frac{ne^2}{|\,\eta^{\times j}\,|}\,(\eta_{ni}^j + \eta_{ne}^j) \qquad (3.9)$$

Если теперь при помощи уравнения (3.7) исключить $\mathbf{j}_n$ из (3.3), то в выражении для потока тепла члены с токами войдут в следующей комбинации:

$$- \mathbf{j}_e \sum_\alpha (\zeta'^{-1}\eta')_{\alpha e} - \mathbf{j}_i \sum_\alpha (\zeta'^{-1}\eta')_{\alpha i} - \frac{n_n}{n_i}\,\mathbf{j}_i \sum_\alpha (\zeta'^{-1}\eta')_{\alpha n} =$$
$$= (\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e) \sum_\alpha (\zeta'^{-1}\eta')_{\alpha e} = (\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e)\,\frac{\eta'_{ee}}{\zeta'_{ee}} \qquad (3.10)$$

так как коэффициент при $\mathbf{j}_i$

$$- \sum_{\alpha\beta} \left(\eta'_{\beta i} + \frac{n_n}{n_i}\,\eta'_{\beta n}\right) (\zeta'^{-1})_{\alpha\beta} = - \sum_{\alpha\beta} (-\,\eta_{\beta e})\,(\zeta'^{-1})_{\alpha\beta}$$

Здесь опущены члены более низкого порядка по $\sqrt{M/m}$. Для величины $\mathbf{b}$ получим

$$\mathbf{b} = \frac{5}{2}\,\frac{n_e}{\zeta'_{ee}}\,\nabla kT + \mathbf{j}\,\frac{\eta'_{ee}}{e\zeta'_{ee}} \qquad (3.11)$$

Пренебрегаем также членами низших по $\sqrt{M\,/\,m}$ порядков в выражении для проводимости (3.9). Тогда получается следующая система уравнений:

$$\mathbf{j} = \sigma\,(\mathbf{E} - \alpha\nabla T + \gamma\nabla\,(nkT)), \qquad \mathbf{q} - \frac{5}{2}\,kT \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha = -\,\varkappa\nabla T + \alpha T\mathbf{j} \qquad (3.12)$$

где (3.13)

$$\sigma = -\frac{ne^2}{\eta^{j}_{ee}} = \frac{-ne^2\zeta'_{ee}}{\eta_{ee}\zeta'_{ee} - \zeta_{ee}\eta'_{ee}}, \quad \alpha = \frac{5}{2}\frac{k}{e}\frac{\zeta_{ee}}{\zeta'_{ee}}, \quad \varkappa = -\frac{25}{4}n\frac{k^2T}{\zeta'_{ee}}, \quad \gamma = \frac{1}{ne}$$

К этим уравнениям нужно добавить еще законы сохранения

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{q} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{3.14}$$

2. В двух предельных случаях аналогичное рассмотрение дает:

а) слабоионизированная плазма ($\lambda_{ea} \ll \lambda_{ek}$, λ_{ea} — длина свободного пробега для столкновений с атомами)

$$\mathbf{j}_\alpha = \frac{1}{|\eta^\alpha|}\left\{[\nabla(n_\alpha kT) - n_\alpha e\mathbf{E}]\,\zeta'_{\alpha\alpha} - \frac{5}{2}n_\alpha\nabla kT\zeta_{\alpha\alpha}\right\} \quad (\alpha = e,\ i)$$

$$\mathbf{b}_\alpha = -\frac{\eta'_{\alpha\alpha}}{\zeta'_{\alpha\alpha}}\mathbf{j}_\alpha + \frac{5}{2}n_\alpha\nabla kT\frac{1}{\zeta'_{\alpha\alpha}} \quad (\alpha = e,\ i,\ n)$$

$|\eta^\alpha|$ — определитель матрицы из диагональных элементов

$$\eta^\alpha = \begin{pmatrix}\eta_{\alpha\alpha} & \zeta_{\alpha\alpha}\\ \eta'_{\alpha\alpha} & \zeta'_{\alpha\alpha}\end{pmatrix}$$

б) сильно ионизированная плазма ($\lambda_{ea} \gg \lambda_{ek}$)

$$\mathbf{j} = e(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_e) = e\frac{1}{|\eta^e|}\left\{-\zeta'_{ee}[\nabla(n_ekT) + ne\mathbf{E}] + \frac{5}{2}n_e\nabla kT\zeta_{ee}\right\}$$

$$b_\alpha = -\frac{\eta'_{\alpha\alpha}}{\zeta'_{\alpha\alpha}}\mathbf{j}_\alpha + \frac{5}{2}n_\alpha\nabla kT\frac{1}{\zeta'_{\alpha\alpha}} \quad (\alpha = e,\ i,\ n)$$

Выражения для σ, α, γ в обоих случаях совпадают между собой и с соответствующими выражениями (3.13); коэффициент теплопроводности

$$\varkappa = -\frac{25}{4}k^2T\left\{\frac{n_e}{\zeta'_{ee}} + \frac{n_i}{\zeta'_{ii}} + \frac{n_n}{\zeta'_{nn}}\right\} \tag{3.15}$$

Формулы (3.13), (3.15) могут быть использованы для вычисления проводимости и теплопроводности в газе с произвольной ионизацией.

В заключение авторы благодарят Я. А. Смородинского за внимание к работе, А. Сазыкина и Ю. Кагана за советы и обсуждения.

Поступила 15 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Мойжес Б., Пикус Г. К теории плазменного термоэлемента, ФТТ, 1960, т. 2, вып. 4.
2. Dreicer H. Electron velocity distribution in a partially ionized gases, Phys. Rev., 1960, vol. 117, p. 343.
3. Pipkin A. Electrical Conductivity of the partially ionized gases. Phys. fluids 1961, vol. 4, p. 154.
4. Herdan R. Dynamical equations and transport relationship for a thermal plasma Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, p. 731.
5. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 3.
6. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение при кулоновском взаимодействии. ЖЭТФ, 1937, т. 7, вып. 2, стр. 203.
7. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
8. Grad H. On the kinetic theory of rare gases. Commun. Pure Appl. Math., 1949, vol. 2, p. 331.
9. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
10. Kihara T. Virial coefficients and model of molecules of gases. Rev. Mod Phys., 1953, vol. 25, p. 831.
11. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. Изд-во иностр. лит-ры, 1956.
12. Де Гроот С. Термодинамика необратимых процессов. Изд-во иностр. лит-ры, 1956.