Здесь $f(r)$ принимает значение от — 2 до ∞, если r изменяется от 0 до ∞. Находим [1], стр. 304)

$$\sigma_r / k = -\int_r^R [f(r) + 2]\, r^{-1} F(r)\, dr, \qquad F(r) \equiv [1 + f(r) + f^2(r)]^{-1/2}$$

$$\sigma_\varphi / k = \sigma_r / k + [f(r) + 2]\, F(r) \qquad (5)$$

$$\sigma_z / k = \sigma_r / k + [2f(r) + 1]\, F(r)$$

где R — произвольная постоянная.

Это решение при $R > 0$, $A > 0$ описывает пластическое течение кругового цилиндра длины L ($-L \leqslant z \leqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant R$), который нагружен по плоским торцам напряжением, распределенным по закону (5), и свободен от напряжений на боковой поверхности.

Заметим, что система (1) после исключения λ допускает алгебру Ли операторов [2,3] с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = r\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial w}$$

$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} + w\frac{\partial}{\partial w}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial \sigma_r} + \frac{\partial}{\partial \sigma_\varphi} + \frac{\partial}{\partial \sigma_z}$$

Эта алгебра — подалгебра Ли операторов, допускаемых системой (1). Решение вида (2), а также решение ([4], стр. 96) суть инвариантные решения, построенные на одномерных подгруппах, порожденных операторами (5).

Поступила 9 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.
3. Аннин Б. Д. Новые частные решения пространственной задачи идеальной пластичности. Аннотация докладов Всесоюзной конференции по применению теории предельного равновесия в статике и динамике тонкостенных пространственных конструкций, Тбилиси, 1971 (доклад публикуется в трудах конференции).
4. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.

УДК 539.375 : 620.171

О РАСЧЕТЕ ДИАГРАММ РАЗРУШЕНИЯ

Е. М. Морозов, В. Т. Сапунов

(Москва)

Рассматриваются уравнения, описывающие критические и докритические диаграммы разрушения, получаемые из энергетического критерия разрушения в интегральной формулировке. Уравнения приближенно учитывают наличие малой пластической области перед концом трещины, включают в себя коэффициент интенсивности напряжений и в случае циклического нагружения один эмпирический коэффициент. Результаты расчета и эксперимента согласуются между собой.

Функциональная зависимость между внешней нагрузкой и длиной магистральной трещины в плоском образце, называемая диаграммой разрушения, отражает способность материала сопротивляться распространению трещины и служит оценочной характеристикой при выборе материала и, возможно, окажется основанием для проведения расчетов деталей конструкции.

Диаграммы разрушения определяются экспериментально с помощью аппаратуры, записывающей длину трещины [1]. Диаграммы разрушения могут быть получены расчетным путем на основании принятой модели разрушения, в формулировку которой входит небольшое число экспериментально определяемых характеристик материала [2,3].

Рассмотрим один из возможных методов такого расчета и сопоставим его результаты с экспериментом.

Запишем энергетический критерий для трещины с тонкой пластической зоной перед ее кромкой [3]. При этом для определенности будем иметь в виду двумерное тело с одиночной прямолинейной трещиной ($y = 0$, $|x| \leqslant l$)

$$\frac{\partial}{\partial l}\int_0^l (2\gamma - \sigma_y v)\, dx - \frac{\partial}{\partial l}\int_l^a (\sigma_y - \sigma_0)\, v\, dx = 0 \tag{1}$$

Здесь $\sigma_y = \sigma_y(x)$ — напряжение от заданной нагрузки, возникающее на оси x в теле без трещины. Это напряжение входит в уравнение (1) с обратным знаком. Перемещение точек поверхности разреза $v = v(x, l)$ возникает в направлении оси y от действия раскрывающего трещину напряжения σ_y в области $y = 0$, $|x| \leqslant l$ и напряжения $\sigma_y - \sigma_0$ в областях $l < |x| \leqslant a$. Пластическая зона занимает область $y = 0$, $l < |x| \leqslant a$, которая для решения задачи заменяется разрезом. Напряжение σ_0 симметрично приложено к поверхностям разреза $l < |x| \leqslant a$ и в дальнейшем полагается равным пределу прочности материала σ_b. Поверхностная плотность энергии разрушения равна γ.

После дифференцирования уравнения (1) получаем

$$2\gamma - \int_0^l \sigma_y \frac{\partial v}{\partial l}\, dx + \sigma_0 v(l, l) - \int_l^a (\sigma_y - \sigma_0)\frac{\partial v}{\partial l}\, dx = 0 \tag{2}$$

Для приближенного учета наличия пластической зоны примем условие малости ее длины $a - l$, состоящее в том, что в интеграле, взятом в пределах от l до a, будем считать $\sigma_y(x) = \sigma_y(l)$. Кроме того, допустим неизменность формы пластической зоны, что выражается условием автомодельности

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Находим (учитывая, что $v(a, l) = 0$)

$$\int_l^a (\sigma_y - \sigma_0)\frac{\partial v}{\partial l}\, dx = [\sigma_y(l) - \sigma_0]\, v(l, l)$$

Подстановка этого интеграла в (2) дает соотношение

$$2\gamma - \sigma_y(l)\, v(l, l) - \int_0^l \sigma_y \frac{\partial v}{\partial l}\, dx = 0 \tag{3}$$

Если в этом уравнении производную $\partial v / \partial l$ определять из упругого решения, то придем к энергетическому критерию вида

$$\delta \int_0^l (2\gamma - \sigma_y v)\, dx = 0 \tag{4}$$

в котором предположение $v(l, l) \neq 0$ приближенно отражает существование пластической зоны в конце разреза.

Условие (4) служит для расчета: а) критической диаграммы разрушения при

$$\delta = \frac{\partial}{\partial l}\,\delta l$$

и б) докритической диаграммы разрушения при

$$\delta = \left(\frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{dp}{dl}\right)\delta l$$

где p — параметр внешней нагрузки ($\sigma_y(x) = pf(x)$).

Учитывая далее известное соотношение

$$K^2 / E = \int_0^l \sigma_y (\partial v / \partial l)\, dx$$

и полагая [4], что

$$\sigma_y(l)\, v(l) = 2\gamma\sigma_y^2(l) / \sigma_b^2$$

получаем

для случая а)

$$2\gamma\,[1 - \sigma_y^2(l) / \sigma_b^2] - K^2 / E = 0 \tag{5}$$

для случая б)

$$\frac{dp}{dl} = \frac{2\gamma\,[1 - \sigma_y^2(l) / \sigma_b^2] - K^2 / E}{(2 / E)\int K(\partial K / \partial p)\, dl + 4\gamma l\sigma_y(l) / \sigma_b^2} \tag{6}$$

В безразмерном виде уравнения (5) и (6) соответственно имеют вид (здесь $\sigma_y(x) \equiv \equiv \mathrm{const} = p$)

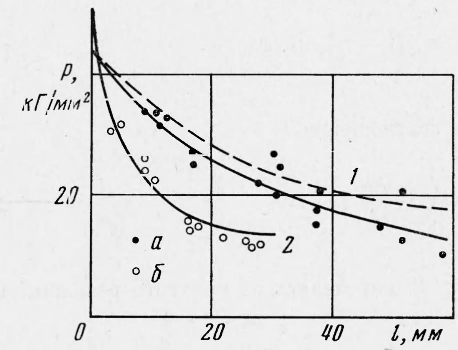
$$1 - \lambda^2 - K_0^2 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d\lambda}{d\zeta} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \lambda^2 - K_0^2}{\lambda\zeta + \int K_0 (\partial K_0 / \partial\lambda)\, d\zeta} \tag{8}$$

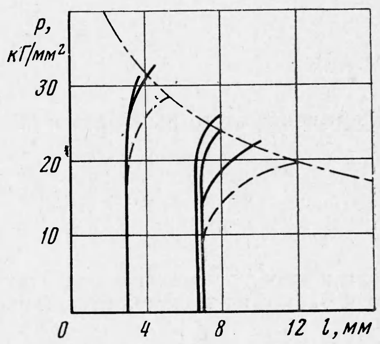
$$(\lambda = p / \sigma_b,\ \zeta = l / c,\ K_0 = K / K_c,\ c = \pi K_c^2 / 8\sigma_b^2)$$

где K_c — критический коэффициент интенсивности напряжений.

Эти уравнения учитывают форму тела и схему нагружения посредством коэффициента интенсивности напряжений K.



Фиг. 1



Фиг. 2

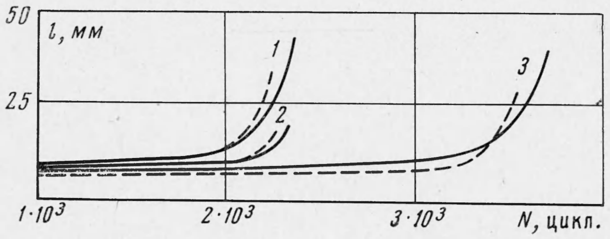
Для растяжения полосы шириной $2b$ с центральной трещиной длиной $2l$ имеем ($\beta = b / c$) [5]

$$K_0 = \pi\lambda\sqrt{\zeta / 8}\,[1 + 0.595\,(\zeta / \beta)^2 + 0.481\,(\zeta / \beta)^4] \tag{9}$$

Критические диаграммы разрушения, построенные по уравнению (7) с учетом выражения (9), показаны на фиг. 1 сплошными линиями. Вычисления проводились для плоских образцов из алюминиевых сплавов Д16Т-1 точки *а*, кривая *1* ($\sigma_b = 44.6$ *кг*/*мм*^{2}, $E = 7\cdot10^3$ *кг*/*мм*^{2}, $K_c = 252$ *кг*/*мм*$^{3/2}$) размером $600 \times 200 \times 1.4$ *мм*^{3} и ВАД-23 точки *б*, кривая *2* ($\sigma_b = 49.7$ *кг*/*мм*^{2}, $E = 7{,}3\cdot10^3$ *кг*/*мм*^{2}, $K_c = 125$ *кг*/*мм*$^{3/2}$) размером $300 \times 100 \times 1.8$ *мм*^{3}. Там же нанесены экспериментальные точки — каждая точка соответствует одному образцу. Пунктирной линией показана критическая диаграмма для плоскости, полученная для сплава Д16Т-1 по энергетическому критерию с учетом тонкой пластической зоны перед концом трещины [3]. Для ВАД-23 решения для полосы и плоскости практически совпадают.

На фиг. 2 приведено сравнение докритических диаграмм разрушения, полученных из эксперимента и построенных по уравнению (8) для сплава ВАД-23, сплошные линии — экспериментальные, пунктирные — расчетные.

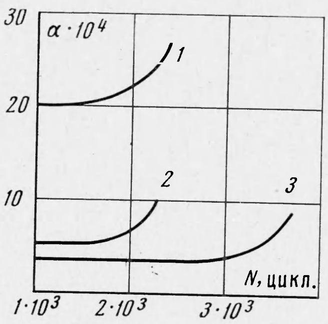
Уравнение (6) или (8) позволяет также вычислить рост длины трещины с числом циклов N при повторно-переменной нагрузке. С этой целью строится семейство интегральных кривых p (l) уравнения (6), параметрами которых служит исходная длина трещины. Каждому циклу нагружения, когда параметр нагрузки меняется в пределах от



Фиг. 3

$p_{\min}$ до $p_{\max}$, соответствует приращение длины трещины Δl, определяемое по интегральной кривой p (l) [3]. Долговечность по числу циклов определяется условием $dp/dl = 0$, т. е. расчет заканчивается в момент, когда длина трещины достигнет критического значения при $p_{\min} < p \leqslant p_{\max}$.

На фиг. 3 показаны результаты расчета и эксперимента при повторно-статическом нагружении для листовых образцов прежних размеров из Д16Т-1 и САП ($\sigma_b = 32.5$ *кг*/*мм*^{2}, $E = 7\cdot10^3$ *кг*/*мм*^{2}, $K_c = 245$ *кг*/*мм*$^{3/2}$) и листовых образцов, вырезанных в направлении прокатки размером $300 \times 100 \times 1.5$ *мм*^{3} из титанового сплава ВТ-14 ($\sigma_b = 130$ *кг*/*мм*^{2}, $E = 11.5\cdot10^3$ *кг*/*мм*^{2}, $K_c = 200$ *кг*/*мм*$^{3/2}$). Начальная длина трещины в алюминиевых образцах $2l_0 = 12$ *мм*, максимальное напряжение цикла $p_{\max} = 16$ *кг*/*мм*^{2}, коэффициент асимметрии цикла $r = 0.2$, частота 200 цикл./*мин*. Для титанового сплава $2l_0 = 10$ мм, $p_{\max} = 26$ *кг*/*мм*^{2}, $r = 0.2$. Сплошные линии — расчет, пунктирные — результат эксперимента, *1* — Д16Т-1, *2*-ВТ-14, *3* — САП.



Фиг. 4

При расчете кривых l — N учитывалось частичное уменьшение длины трещины при разгрузке. Этот экспериментально известный эффект [6], по-видимому, вызывается остаточными сжимающими напряжениями, возникающими при снятии нагрузки, в области пластических деформаций у конца трещины. Закрытие трещины учитывалось коэффициентом α, который вводился следующим образом: $l_{i+1} = l_i + \alpha\Delta l$, где l_{i+1} — длина трещины перед $i + 1$ циклом, а Δl — приращение длины трещины на i-м цикле. Подбором установлено, что коэффициент α меняется в зависимости от числа циклов по закону, представленному на фиг. 4. Обозначения те же, что и на фиг. 3. Эту зависимость можно считать характерной для данного материала и ее предлагается использовать при расчете долговечности элементов конструкций, форма которых отличается от формы образца.

Авторы благодарят В. М. Маркочева и Б. А. Дроздовского за любезное предоставление результатов эксперимента.

Поступила 31 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Дроздовский Б. А., Маркочев В. М., Фридман Я. Б. Диаграммы разрушения твердых тел. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 4.
2. Черепанов Г. П. К математической теории равновесных трещин. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
3. Морозов Е. М. Энергетическое условие роста трещин в упруго-пластических телах. Докл. АН СССР 1969, т. 187, № 1.
4. Морозов Е. М., Партон В. З. Применение вариационного принципа в задачах теории трещин. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
5. Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968.
6. Дроздовский Б. А., Маркочев В. М., Гольцев В. Ю. Диаграммы разрушения листовых материалов. В сб. «Деформация и разрушение при термических и механических воздействиях», вып. 3, М., Атомиздат, 1969.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 2/II-1973 г. Т-05315 Подписано к печати 23/III-1973 г. Тираж 1945 экз.
Зак. 1677 Формат бумаги 70×108 1/16 Усл. печ. л. 15,4 Бум. л. 5 1/2 Уч.-изд. л. 14,2

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10