ПМТФ, № 3, 1971

ОБ ОДНОМ ПЛОСКОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА С СИЛЬНЫМ РАЗРЫВОМ

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

Рассматривается задача о плоском нестационарном движении газа под действием поршня, имеющего форму двугранного угла и вдвигающегося в газ с постоянной скоростью. В отличие от одномерного движения под действием плоского поршня здесь возникает криволинейная ударная волна и течение становится неизэнтропическим и вихревым. В данной работе эта задача рассмотрена в линейной постановке, когда угол излома поршня предполагается малым. Линейная задача сводится к неоднородной задаче Римана — Гильберта, решение которой находится явно.

Рассматриваемая задача примыкает к кругу задач, связанных с дифракцией и отражением ударных волн, изученных в работах Лайтхилла [1], Смирла [2], Тер-Минасянца [3] и других.

1. Постановка задачи. Политропный газ, покоящийся при $t \leqslant 0$, приходит в движение под действием стенок двугранного угла, которому в момент $t = 0$ сообщается постоянная скорость $\mathbf{U}_0 = (U_0, V_0)$ такая, что нормальные составляющие скоростей движения стенок направлены в сторону газа. Перед угловым поршнем образуется ударная волна, фронт которой будет плоским вдали от вершины угла и искривленным в области влияния вершины. Требуется рассчитать поле скоростей и давление в области влияния вершины угла, в частности определить форму ударной волны и давление на поршне.

Введем в плоскости течения декартову прямоугольную систему координат X, Y, так, чтобы начало координат в момент $t = 0$ совпадало с вершиной угла, а ось X была направлена по оси симметрии поршня. Вдали от вершины течение описывается известным одномерным решением.

Решение в возмущенной области ищем в классе конических течений [4], полагая все искомые функции u°, v°, p°, ρ°, S° зависящими от переменных $\xi = X / t$, $\eta = Y / t$. Здесь $\mathbf{u}^\circ = (u^\circ, v^\circ)$ — скорость газа, p° — давление, ρ° — плотность, S° — энтропия, t — время.

Введем новые искомые функции

$$U = u^\circ - \xi, \quad V = v^\circ - \eta, \qquad P = p^\circ(\xi, \eta), \quad R = \rho^\circ(\xi, \eta), \quad S = S^\circ(\xi, \eta) \tag{1.1}$$

Система уравнений газовой динамики приведется к следующему виду:

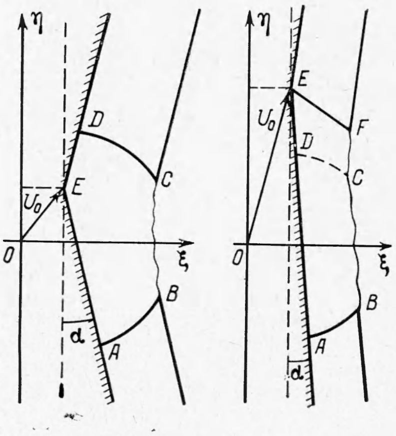
$$(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} + R^{-1}\nabla P + \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U}\cdot\nabla R + R(\operatorname{div}\mathbf{U} + 2) = 0, \quad \mathbf{U}\cdot\nabla S = 0 \tag{1.2}$$

Область возмущенного течения ограничена линией вырождения типа системы (1.2) (AB и CD на фиг. 1)

$$|\mathbf{U}|^2 = U^2 + V^2 = C^2 \qquad (C^2 = \gamma R^{-1} P) \tag{1.3}$$

неизвестным фронтом ударной волны BC и поршнем AED при дозвуковой скорости V_0.

Если скорость V_0 больше скорости звука, вершина угла E находится вне области эллиптичности (задаваемой неравенством $|\mathbf{U}| < C$) и к области эллиптичности $ABCD$ добавляется область гиперболичности ($|\mathbf{U}| > C$) $EDCF$; линия EF будет либо характеристикой, либо фронтом ударной волны в зависимости от того, будет ли угол раствора поршня больше или меньше π.



Фиг. 1

На фронтах ударных волн должны выполняться условия Гюгонио, связывающие решение в возмущенной области с известными решениями в других областях, на поршне должно выполняться условие не протекания, на всех остальных границах — условия непрерывного примыкания.

2. Уравнения и граничные условия линейной задачи. Пусть угол излома поршня α мал. Линеаризуем задачу по малому параметру α, взяв в качестве основного решения одномерное течение, которое получается при $\alpha = 0$. Представим искомые функции в следующем виде:

$$U = U_0 - \xi + \alpha U_0 u, \quad V = -\eta + \alpha U_0 v, \quad P = p_1 + \alpha \rho_1 C_1 U_0 p,$$
$$R = \rho_1 (1 + \alpha\rho) \tag{2.1}$$

Здесь p_1, ρ_1, C_1 — параметры газа в основном постоянном решении. После линеаризации получается линейная система уравнений для безразмерных возмущений u, v, p, ρ, рассматриваемых как функции от безразмерных переменных x и y

$$(\mathbf{x}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = \nabla p$$
$$(\mathbf{x}\cdot\nabla)\,\rho = U_0\,(\operatorname{div}\mathbf{u})\,/\,C_1 \qquad \left(x = \frac{\xi - U_0}{C_1}, \quad y = \frac{\eta}{C_1}\right)$$
$$(\mathbf{x}\cdot\nabla)\,p = \operatorname{div}\mathbf{u} \tag{2.2}$$

Исключая u и v из последнего уравнения, получаем уравнение для одной функции p

$$(x^2 - 1)p_{xx} + 2\,xyp_{xy} + (y^2 - 1)\,p_{yy} + 2xp_x + 2yp_y = 0 \tag{2.3}$$

Граничные условия линейной задачи получаются линеаризацией граничных условий нелинейной задачи и переносом их на соответствующие невозмущенные границы. Запишем уравнение возмущенного участка фронта ударной волны BC в форме

$$x = k + \alpha f(y) \qquad \left(k = \frac{D_0 - U_0}{C_1} = \left[\frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - \gamma + 1}\right]^{1/2}, \ M = \frac{D_0}{C_0}\right) \tag{2.4}$$

Здесь D_0 — скорость невозмущенной ($\alpha = 0$) ударной волны, C_0 — скорость звука в покоящемся газе перед ударной волной, γ — показатель адиабаты. Используя соотношения Гюгонио на ударной волне, можно вычислить u, v, p, ρ на фронте (2.4)

$$u = LN^{-1}(f(y) - yf'(y)) \qquad \left(L = \frac{1}{2k}\,\frac{M^2+1}{M^2}\right)$$
$$v = -f'(y) \qquad \left(N = \frac{(\gamma+1)}{2}\,\frac{M^2-1}{(\gamma-1)M^2+2}\right) \tag{2.5}$$
$$p = N^{-1}(f(y) - yf'(y)), \qquad \rho = \frac{4}{(\gamma+1)kM^2}\,(f(y) - yf'(y))$$

Из (2.5) и (2.2) следует соотношение, которому должна удовлетворять функция p на границе BC (BF) (фиг. 2)

$$(k^2 - 1)p_x + [(L + k)y - Nky^{-1}]p_y = 0 \tag{2.6}$$

При дозвуковой скорости V_0, т. е. когда $V_0 < C_1$ (не теряя общности, можно считать, что $V_0 \geqslant 0$), вершина E находится внутри области эллиптичности.

Из условия непротекания получаем

$$u/_{AF} = V_0 \,/\, U_0, \quad u/_{ED} = -V_0 \,/\, U_0$$

Следовательно, на границе AED имеем

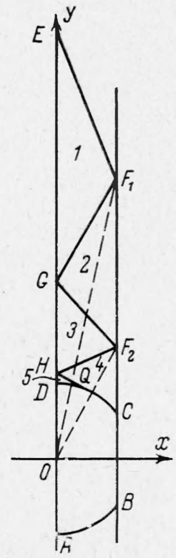
$$p_x = -Tk_1\delta(y - k_1) \qquad \left(T = \frac{k_1[(\gamma-1)M^2+2]}{k(M^2-1)},\ k_1 = \frac{V_0}{C_1}\right) \tag{2.7}$$

Здесь $\delta(x)$ — функция Дирака. При $k_1 > 1$ на ADE выполняется условие $p_x = 0$. На линии вырождения типа уравнения (2.3) AB ($x^2 + y^2 = 1$; фиг. 2) выполняются условия непрерывного примыкания к известному течению

$$p = p_2, \quad \rho = \rho_2, \quad u = u_2, \quad v = v_2$$

Все эти величины вычисляются по формулам (2.5), если положить

$$f(y) = -y + \frac{\gamma+1}{2}k_1\frac{M^2}{M^2+1}$$



Фиг. 2

В дозвуковом случае на CD также имеет место непрерывное примыкание

$$p = -p_2, \quad \rho = -\rho_2, \quad u = -u_2, \quad v = -v_2$$

При $k_1 > 1$ через слабый скачок уплотнения или разрежения EF (в зависимости от знака α) это же течение примыкает к возмущенному в гиперболической области $EFCD$. Кроме перечисленных выше условий должно выполняться условие гладкости фронта ударной волны в точках B и C

$$\int_{-k'}^{k'} \frac{p_y}{y}\,dy = -N^{-1}(1 + f'(k')) = K \qquad (x = k,\ k' = \sqrt{1-k^2}) \tag{2.8}$$

Если $k_1 < 1$, то $f'(k') = 1$, если $k_1 > 1$, то $f'(k')$ определяется после решения задачи в гиперболической области.

3. Решение задачи в области гиперболичности. Можно показать, что в области гиперболичности функция p будет кусочно-постоянной. Области постоянства p будут связаны через слабые скачки уплотнения и разрежения. Скачки разрежения возникают из линеаризации некоторых волн разрежения в нелинейной задаче. Фронты этих скачков в первом приближении совпадают с характеристиками — касательными к единичной окружности. Из условий Гюгонио для слабых скачков можно получить следующие соотношения:

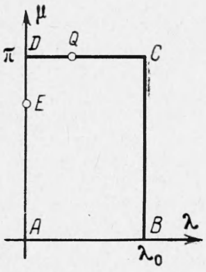
$$u_2 - u_1 = (p_2 - p_1)n_1, \quad v_2 - v_1 = (p_2 - p_1)n_2, \quad \rho_2 - \rho_1 = U_0C_1^{-1}(p_2 - p_1) \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ — нормаль к характеристике, по которой в линейном приближении происходит скачок; нижний индекс 1 обозначает состояние перед скачком, индекс 2 — состояние за скачком. Количество скачков зависит от величины k_1. При помощи соотношений (3.1) все слабые скачки легко рассчитываются.

Для примера рассмотрим случай, изображенный на фиг. 2, когда таких скачков пять. На разрыве EF_1 давление p^1 определяется в области *1* из условия непротекания $u = V_0 / U_0$ на EG. В области *2* искомые функции должны удовлетворять условиям Гюгонио на F_1G и F_1F_2.

Такое решение можно построить, вводя контактный разрыв, идущий в первом приближении по прямой контактной характеристике F_1O основного решения. Величина p^2 определяется из условия на контактном разрыве. Действительно, по известной p^2 определяется функция $f(y)$ из (2.5) и условия прохождения фронта через точку F_1. По известной $f(y)$ определяются u и v за контактным разрывом. Перед контактным разрывом u и v выражаются через p^2 из условий (3.1) на скачке F_1G. Условие равенства нормальной составляющей скорости газа на F_1O дает уравнение для определения p^2. В области *3* определяем p^3 из условия непротекания на границе GH, как и в области *1*, при этом условия на контактном разрыве F_1O выполняются автоматически. В области *4* нужно вводить новый контактный разрыв F_2O и p^4 определять из условий на этом контактном разрыве, как и в области *2*, и т. д.

После расчета в гиперболической области определятся u, v, p, ρ вдоль CD. Все эти величины имеют разрыв в точке Q, а u, v, ρ — в точках пересечения контактных характеристик F_jO со звуковой окружностью. Пусть $p = p_*$ на DQ и $p = p^*$ на QC. Положение точки Q задается полярным углом $\theta^* = \theta^*(k_1)$, отсчитываемым от оси x.



Фиг. 3

4. Нахождение решения в области эллиптичности. В области эллиптичности уравнение (2.3) преобразованием Буземана — Чаплыгина

$$r = \frac{2\beta}{\beta^2 + 1}, \qquad \theta = \theta' \quad \left(\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}(y/x) \end{array} \right) \tag{4.1}$$

приводится к уравнению Лапласа. Пусть

$$\xi_1 = \beta\cos\theta, \quad \eta_1 = \beta\sin\theta, \quad \zeta = \xi_1 + i\eta_1$$

Конформное преобразование

$$z = \ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \frac{1}{2}\pi i \tag{4.2}$$

отображает область $ABCD$ в плоскости ζ в прямоугольник

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+k}{1-k}, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant \pi$$

в плоскости $z = \lambda + i\mu$ (фиг. 3).

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\Phi(z) = p_\lambda - ip_\mu \tag{4.3}$$

В силу условий краевой задачи для нее возникает неоднородная задача Гильберта с разрывными коэффициентами

$$a(z)p_\lambda - b(z)\,p_\mu = \varphi(z) \quad (z \in \Gamma) \tag{4.4}$$

Здесь Γ — контур $ABCD$, а коэффициенты a, b и φ задаются формулами

$$\begin{gathered} \lambda = \lambda_0: \quad a = \sin\mu\cos\mu, \quad b = Nk(1-k^2)^{-1} - L\cos^2\mu, \quad \varphi = 0 \\ \lambda = 0: \; a = 1, \quad b = 0, \quad \varphi = \begin{cases} -Tk_1(1-k_1{}^2)^{-1/2}\,\delta(\mu-\mu_0) & (k_1 < 1) \\ 0, \quad (k_1 > 1) \end{cases} \\ \mu = \pi: \; a = 1, \quad b = 0, \quad \varphi = \begin{cases} 0, \quad (k_1 < 1) \\ (p^* - p_2)\,\delta(\lambda - \lambda_1) & (k_1 > 1) \end{cases} \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\mu = 0:\quad a = 1,\quad b = 0,\quad \varphi = 0$$

$$\left(\mu_0 = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{1-k_1^2}}{k_1},\quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta^*}{1-\cos\theta^*}\right)$$

Так как коэффициенты задачи Гильберта разрывны в точках B и C, множество ее решений можно разбить на классы либо ограниченных, либо неограниченных в данных точках. Кроме условий (4.4), (4.5) необходимо наложить дополнительные — условие гладкости фронта ударной волны в точках B и C (2.8) и условие изменения p вдоль BC на определенную величину

$$\lambda = \lambda_0:\ \int_0^\pi p_\mu\, d\mu = \begin{cases} -2p_2 & (k_1 < 1), \\ p^* - p_2 & (k_1 > 1), \end{cases}\quad \int_0^\pi \frac{p_\mu}{\cos\mu}\, d\mu = -k'K \tag{4.6}$$

Решение задачи (4.4) — (4.6) в классе функций, ограниченных в точках разрыва коэффициентов, единственно. Для его построения отобразим прямоугольник $ABCD$ на верхнюю полуплоскость при помощи функции

$$w(z) = \frac{\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(-iz, q)}{\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(-iz, q)}\qquad \left(q = \frac{1-k}{1+k}\right) \tag{4.7}$$

Здесь и далее $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ — эллиптические тэта-функции [5]. Задача Гильберта в полуплоскости известным образом сводится к задаче Римана [6]. Индекс задачи Римана оказывается равным единице, т. е. решение определяется с точностью до двух произвольных постоянных, которые однозначно находятся из условий (4.6). Если известно каноническое решение $X(w)$ соответствующей однородной задачи, то решение неоднородной задачи выписывается явно в виде

$$\Phi(w) = \frac{X(w)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(a - ib)\, X^+(\zeta)(\zeta - w)} + X(w)(B_1 w + D_1) \tag{4.8}$$

где B_1 и D_1 — произвольные вещественные постоянные, $X^+(\zeta)$ — предельные значения функции $X(w)$ из верхней полуплоскости. Таким образом решение задачи сводится к построению канонического решения однородной задачи. Представим $X(w)$ в виде

$$X(w) = X_1(w) X_2(w) \tag{4.9}$$

где $X_1(w)$ удовлетворяет условию на BC, а $X_2(w)$ имеет кусочно-постоянный аргумент на границе.

Первое условие (4.4), (4.5) можно записать в виде [1]

$$\begin{gathered}\arg X(w(z)) = \operatorname{arc\,tg}(\alpha_1 \operatorname{tg}\mu) + \operatorname{arc\,tg}(\beta_1 \operatorname{tg}\mu) \\ \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} = L - N\frac{k}{1-k^2},\qquad \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1} = \frac{Nk}{1-k^2}\end{gathered} \tag{4.10}$$

Разложим правую часть (4.10) в ряд Фурье по синусам

$$\arg X(w(z)) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2 - a_1^n - b_1^n)}{n}\sin 2n\mu \tag{4.11}$$

$$a_1 = (\alpha_1 - 1)/(\alpha_1 + 1),\qquad b_1 = (\beta_1 - 1)/(\beta_1 + 1)$$

Положим $X_1(w)$ равным

$$X_1(w(z)) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}(2 - a_1^n - b_1^n)\frac{\operatorname{ch} 2nz}{n \operatorname{sh} 2n\lambda_0}\right\} \tag{4.12}$$

Аргумент этой функции на BC с точностью до аддитивной постоянной равен (4.11). Для определения $X_2(w)$ получается смешанная задача теории функций, решение которой дается формулой

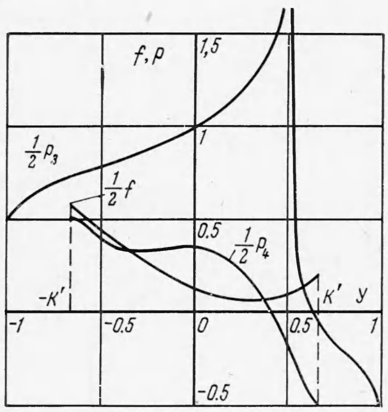
$$X_2(w) = \frac{i}{\sqrt{1-w^2}} = i\frac{\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(-iz,q)}{\vartheta_4(0,q)\,\vartheta_4(-iz,q)} \tag{4.13}$$

Окончательно получаем

$$\Phi(z) = X(w(z))\left[-\frac{1}{\pi i}\frac{T_1}{w(i\mu_0)-w(z)} + B_1 w(z) + D_1\right] \quad (k_1<1)$$
$$\Phi(z) = X(w(z))\left[\frac{1}{\pi i}\frac{T_2}{w(\lambda_1)-w(z)} + B_1 w(z) + D_1\right] \quad (k_1>1) \tag{4.14}$$

Здесь функция $X(w(z))$ определена формулами (4.9), (4.12), (4.13), а

$$T_1 = \frac{Tk_1}{\sqrt{1-k_1^2}}\,\frac{\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_4^2(0,q)\,\vartheta_2(\mu_0,q)\,\vartheta_4(\mu_0,q)}{\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3^2(\mu_0,q)\,X^+(i\mu_0)}$$
$$T_2 = (p^*-p_*)\frac{\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2^2(0,q')\,\vartheta_2(\lambda_1,q')\,\vartheta_1(\lambda_1,q')}{\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3^2(\lambda_1,q')\,X^+(\lambda_1)} \quad \left(q' = \exp\frac{\pi^2}{\ln q}\right) \tag{4.15}$$



Фиг. 4

Вычисляя предельные значения $\Phi(z)$ на BC и отделяя мнимую часть, находим p_μ, после чего из условий (4.6) определяем постоянные B_1 и D_1.

По полученным формулам проводились численные расчеты для различных значений k и k_1. На фиг. 4 представлены графики функций $p_3 = p(0, y)$ — давления на поршне, $p_4 = p(k, y)$ — давления за ударной волной на ее фронте и функции $f(y)$, задающей форму ударной волны, рассчитанные для $k = {}^3/_4$, $k_1 = {}^1/_2$. Как видно из графика, давление на поршне монотонно возрастает при приближении к точке E — вершине двугранного угла. В точке E функция p имеет логарифмическую особенность. После того как функция p определена в области эллиптичности функции u, v, ρ находятся из (2.2) квадратурами.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова за интерес к данной работе и полезные советы.

Поступила 15 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. Diffraction of blast. Proc. Roy. Soc., 1950, Ser. A, vol. 200, pp. 554—565.
2. Smyrl J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speed. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt 2.
3. Ter-Minassiants S. M. The diffraction accompanying the regular reflexion of a plane obliquely impining shock wave from the walls of an obtuse wedge. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt 2.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.