

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ДЕТОНАЦИИ В НЕРАВНОМЕРНО  
НАГРЕТОМ ГАЗЕ

Я. Б. Зельдович, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе,  
Г. И. Сивашинский

(Москва)

Обычно исследование газовых детонационных волн проводится в трубах, и детонация инициируется ударной волной или ускоряющимся пламенем; при этом начальная температура горючей смеси близка к комнатной. Факт образования детонационной волны в таких опытах может быть легко установлен по быстрому изменению давления или температуры; как известно, в детонационном режиме скорость химического превращения ускоряется во много раз.

Иная ситуация возникает при работе двигателей внутреннего сгорания, когда наблюдается так называемый «стук». Из-за предварительного поджата горючего газа и его смешения с продуктами сгорания, оставшимися от предыдущего цикла, температура газа в цилиндре может быть настолько велика, что возникают благоприятные условия для взрывообразного объемного протекания химической реакции. Если температурные условия и условия смешения одинаковы по всему объему цилиндра, то химическая реакция приведет к равномерному подъему давления по всему объему. Однако, если температура горючей смеси в разных точках объема отличается, реакция в них протекает неодинаково, вызывая неравномерное расширение газа. Как следствие возможно образование ударных и детонационных волн. В отличие от классических исследований детонации в трубах, зафиксировать переход от режима равномерного, взрывообразного протекания реакции к режиму распространяющейся детонационной волны является трудной экспериментальной задачей и требует точных измерений.

Данная работа посвящена теоретическому исследованию этого вопроса. Численно решается задача о возникновении детонации в неравномерно нагретом газе, способном к химической реакции. Показано, что возможны три режима протекания реакции. Если распределение температуры, задаваемое в начальный момент времени таково, что газ прогрет почти равномерно, то реакция протекает в режиме теплового взрыва. В случае очень крутого начального профиля температуры возникает ударная волна, которая отрывается от волны реакции. Наконец, существует такое распределение температуры, что образующаяся ударная волна способна вызвать реакцию, происходит выход на стационарный режим детонации.

**1. Постановка задачи.** Пусть в начальный момент времени в реакционноспособном газе, заполняющем полупространство  $X > 0$ , задан профиль температуры в виде линейной функции

$$T(0, X) = T_0 - \kappa X \quad (1.1)$$

Кроме того, давление газа  $P$  и относительная концентрация горючей компоненты  $a$  постоянны, а газ покоится, т. е.

$$P(0, X) = P_0, \quad U(0, X) = 0, \quad a(0, X) = 1 \quad (1.2)$$

где  $U(t, X)$  — скорость газа.

Для выполнения условия  $T(t, X) \geq 0$  ( $0 \leq t < \infty$ ) положим, что  $T(0, X) = 0$  при  $X > T_0 / \kappa$ ; если интересоваться только начальным этапом развития возмущений (как будет видно из дальнейшего, этого достаточно), то в силу конечности скорости их распространения, последнее требование не окажется стеснительным.

Газ предполагается идеальным, т. е. уравнение состояния имеет вид

$$PV = RT \quad (1.3)$$

Здесь  $R$  — газовая постоянная,  $V$  — удельный объем газа.

Из постановки задачи видно, что заданное исходное состояние является стационарным для идеального не реагирующего газа; таким образом, газ выходит из начального состояния только благодаря начинающейся химической реакции. При этом в сосуде должно возникнуть движение газа; поскольку у горячей стенки реакция развивается более интенсивно, газ здесь расширяется, и в результате возможно формирование ударной волны, которая при определенных условиях может перейти в волну детонации.

В зависимости от первоначально заданного градиента температуры возможны различные режимы протекания химической реакции.

При больших  $\kappa$  образующаяся ударная волна будет слабой, так как характерное время развития химической реакции при удалении от горячей стенки резко возрастает и к тому времени, когда здесь разовьется реакция, ударная волна далеко убежит от стенки.

При уменьшении  $\kappa$  время индукции уменьшается, в формировании ударной волны начинают играть роль слои газа, находящиеся на более далеком расстоянии от горячей стенки. Ударная волна становится более сильной за счет энергосвободы в этих слоях. Следует ожидать, что существуют такие  $\kappa$ , при которых интенсивность ударной волны окажется достаточной, чтобы инициировать реакцию в газе; тогда реакция будет происходить в детонационном режиме.

При малых  $\kappa$  (почти равномерный нагрев газа) реакция будет протекать по всему сосуду и свачки формироваться не будут.

**2. Уравнения и граничные условия.** При исследовании движения газа будем исходить из одномерных уравнений газовой динамики с учетом энергосвободы, обусловленного химической реакцией (для простоты взята реакция первого порядка по  $a$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial X} &= 0 \quad \left( \rho = \frac{1}{V} \right), & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} \\ \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} + \gamma P \frac{\partial U}{\partial X} &= (\gamma - 1) Q a \rho k e^{-E/RT}, & \frac{\partial a}{\partial t} + \\ & + U \frac{\partial a}{\partial X} &= -ka e^{-E/RT} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $Q$  — тепловой эффект,  $E$  — энергия активации,  $k$  — предэкспоненциальный множитель,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Для дальнейшего исследования удобно перейти к лагранжевой координате  $x$  и безразмерным переменным по следующим формулам:

$$\begin{aligned} P &= P_0 p, & T &= T_0 \theta, & U &= \sqrt{\gamma RT_0} u, & V &= \frac{RT_0}{P_0} v \\ t &= \frac{\tau}{k} \exp \frac{E}{RT_0}, & \kappa &= \frac{\lambda k T_0}{\sqrt{\gamma RT_0}} \exp \left( -\frac{E}{RT_0} \right) \\ x &= \frac{P_0 \sqrt{\gamma RT_0}}{k RT_0} \exp \frac{E}{RT_0} = \int_0^x \frac{dX}{V(t, X)} \\ X &= \xi \frac{\sqrt{\gamma RT_0}}{k} \exp \frac{E}{RT_0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения движения (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + p \frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha a \exp \left[ \beta \left( 1 - \frac{1}{\theta} \right) \right], & \gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial \tau} + a \exp \left[ \beta \left( 1 - \frac{1}{\theta} \right) \right] &= 0, & \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= u, & \frac{\partial \xi}{\partial x} &= v \\ \left( \alpha &= \frac{Q}{RT_0}, \beta = \frac{E}{RT_0} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Начальные условия (1.1), (1.2) и уравнение состояния (1.3) после преобразований (2.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta(0, x) &= e^{-\lambda x} (\theta(0, \xi) = 1 - \lambda \xi), \quad v(0, x) = \theta(0, x) \\ \xi(0, x) &= \lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda x}), \quad p(0, x) = 1, \quad a(0, x) = 1, \quad u(0, x) = 0, \\ p v &= \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что если функцию  $T(0, X)$  четным образом продолжить в область  $X < 0$ , то поставленную задачу можно рассматривать как задачу Коши.

**3. Схема расчета на ЭВМ.** Для численного интегрирования системы (2.3) с начальными условиями (2.4) необходимо рассматривать задачу на конечном участке оси  $X$ . В связи с этим введем стенку при  $X = L$ . Тогда граничные условия (условия непроницаемости стенок) записываются так:

$$\begin{aligned} u(\tau, 0) &= u(\tau, x^{(0)}) = 0 \\ x^{(0)} &= -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \lambda \xi^{(0)}), \quad \xi^{(0)} = \frac{kL}{\sqrt{\gamma R T_0}} \exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вводимое здесь граничное условие на холодной стенке, необходимой для ограничения области интегрирования уравнений, не оказывает влияния на протекание реакции, так как нас интересуют времена, меньшие времени, через которое образующаяся ударная волна достигает правой границы.

При решении задачи следует ожидать образования скачков, поэтому введем, следуя Нейману и Р. Д. Рихтмайеру [1], искусственную вязкость, чтобы заменить скачок тонким переходным слоем, в котором величины меняются быстро, но без разрыва. Введение искусственной вязкости позволяет избежать сложного расчета скачков с использованием уравнений Гюгонно. Искусственная вязкость вводится по следующей формуле:

$$q = \gamma \frac{(v\Delta x)^2}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad \text{при} \quad \frac{\partial u}{\partial x} < 0; \quad q = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \geq 0 \quad (3.2)$$

где  $\Delta x$  — шаг по пространственной координате,  $v$  — коэффициент искусственной вязкости.

При этом первые два уравнения (2.3) заменяются на уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (p + q) \frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha a \exp\left[\beta \left(i - \frac{1}{\theta}\right)\right] \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (p + q) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Взяв за основу разностную схему типа «треноги» [2], нетрудно получить следующий явный алгоритм для решения задачи:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{(\Delta \tau)_n}{\gamma \Delta x} (p_{j+1/2}^n + q_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n - q_{j-1/2}^n) \\ \xi_j^{n+1} &= \xi_j^n + (\Delta \tau)_n u_j^{n+1}, \quad v_j^{n+1} = (\Delta x)^{-1} (\xi_{j+1/2}^{n+1} - \xi_{j-1/2}^{n+1}) \\ a_j^{n+1} &= a_j^n [1 + (\Delta \tau)_n f(\theta_j^n)]^{-1}, \quad f(\theta_j^n) = \exp\left[\beta \left(1 - \frac{1}{\theta_j^n}\right)\right] \\ p_j^{n+1} &= \frac{(\gamma - 1)^{-1} \theta_j^n + (1/2 p_j^n + q_j^n) (v_j^n - v_j^{n+1}) + \alpha (a_j^n - a_j^{n+1})}{1/2 [(\gamma + 1) (\gamma - 1)^{-1} v_j^{n+1} - v_j^n]} \\ \theta_j^{n+1} &= p_j^{n+1} v_j^{n+1} \\ q_j^n &= \frac{2\gamma v^2}{v_j^n} (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n)^2 \quad \text{при} \quad u_{j+1/2}^n < u_{j-1/2}^n; \quad b_j^n = 0 \quad \text{при} \quad u_{j+1/2}^n \geq u_{j-1/2}^n \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$0 \leq j \leq J \quad (J\Delta x = x^{(0)}), \quad 0 \leq n < \infty$$

Здесь через  $f_j^n$  обозначено значение функции  $f$  в момент времени  $(\Delta\tau)_1 + (\Delta\tau)_2 + \dots + (\Delta\tau)_n$  в точке пространства  $j\Delta x$ ; шаг по времени  $(\Delta\tau)_n$  выбирается из условия устойчивости Куранта (оно обеспечивает невозрастание маленьких погрешностей, возникающих при счете)

$$(\Delta\tau)_n = \frac{\Delta x \sqrt{\gamma/2\nu}}{\max_j \sqrt{\theta_j^n / v_j^n}} \quad (3.5)$$

Граничные и начальные значения величин вычисляются по следующим схемам:  
а) граничные условия

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} = \xi_0^{n+1} = u_J^{n+1} = q_0^{n+1} = q_J^{n+1} = 0, \quad \xi_J^n = \xi^{(0)} \\ a_J^n = a_J^{n-1} [1 + (\Delta\tau)_{n-1} f (\theta_J^{n-1})]^{-1} \\ a_0^n = a_0^{n-1} [1 + (\Delta\tau)_{n-1} f (\theta_0^{n-1})]^{-1} \\ v_J^n = v_J^{n-1} - \frac{(\Delta\tau)_{n-1}}{\Delta x} u_{J-1}^{n-1}, \quad p_J^n = \frac{\theta_J^n}{v_J^n} \\ v_0^n = v_0^{n-1} + \frac{(\Delta\tau)_{n-1}}{\Delta x} u_1^{n-1}, \quad p_0^n = \frac{\theta_0^n}{v_0^n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\theta_J^n = \theta_J^{n-1} + (\Delta\tau)_{n-1} (\gamma - 1) \alpha a_J^n f (\theta_J^{n-1}) + (\gamma - 1) \frac{(\Delta\tau)_{n-1}}{\Delta x} u_{J-1}^{n-1} (p_{J-1}^{n-1} + q_J^{n-1})$$

$$\theta_0^n = \theta_0^{n-1} + (\Delta\tau)_{n-1} (\gamma - 1) \alpha a_0^n f (\theta_0^{n-1}) - (\gamma - 1) \frac{(\Delta\tau)_{n-1}}{\Delta x} u_0^{n-1} (p_0^{n-1} + q_0^{n-1})$$

б) начальные условия

$$\begin{aligned} \theta_j^0 = \exp(-\lambda_j \Delta x), \quad \xi_j^0 = \lambda^{-1} [1 - \exp(-\lambda_j \Delta x)] \\ p_j^0 = a_j^0 = 1, \quad u_j^0 = 0, \quad v_j^0 = \theta_j^0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

**4. Обсуждение результатов.** При расчете выбирались следующие значения для безразмерных параметров, входящих в задачу  $\nu = 1.7$ ,  $J = 350$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 1.2$ ,  $\xi^{(0)} = 55$ .

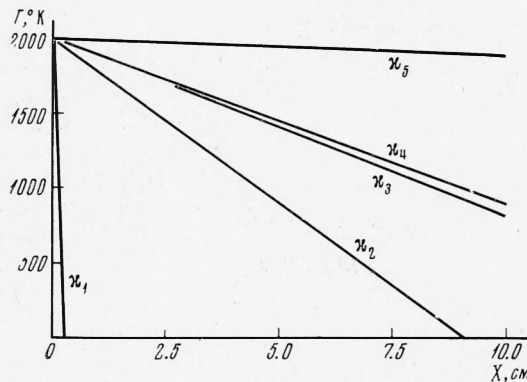
В дальнейшем результаты будут иллюстрироваться в физических переменных для  $k = 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ ,  $T_0 = 2000 \text{ }^\circ\text{K}$  (в этом случае  $L = 10 \text{ см}$ ).

Кроме того, выберем  $\lambda_1 = 0.66$  ( $\kappa_1 = 7360 \text{ град/см}$ ),  $\lambda_2 = 0.02$  ( $\kappa_2 = 220$ ),  $\lambda_3 = 0.0107$  ( $\kappa_3 = 118$ ),  $\lambda_4 = 0.01$  ( $\kappa_4 = 110$ ),  $\lambda_5 = 0.001$  ( $\kappa_5 = 11$ ).

На фиг. 1 изображено начальное распределение температуры для этих значений  $\kappa$  в физических переменных.

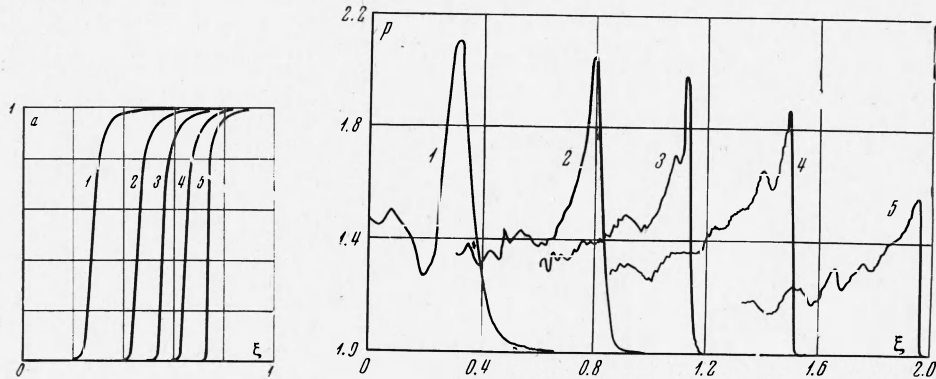
Рассмотрим сначала случай больших начальных градиентов температуры ( $\lambda_1 = 0.66$ ). На фиг. 2, а, б, в, г, изображены распределения величин  $a$ ,  $p$ ,  $\theta$ ,  $u$  по координате; кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют моментам времени  $\tau = 0.41$ , 0.82, 1.22, 2.44, 3.93.

При  $\tau = 0.41$  волна реакции и ударная волна совпадают (фиг. 2, а и б). В последующие моменты времени расстояние между ударной волной и волной реакции увеличивается все больше; происходит отрыв ударной волны от волны реакции.



Фиг. 1

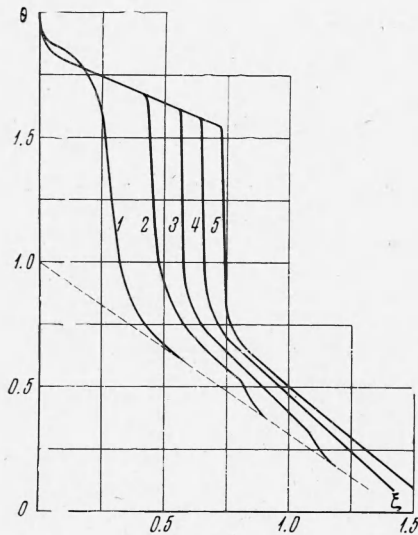
Фиг. 2, б показывает, что давление за фронтом ударной волны пульсирует, причем можно выделить пульсации с незначительной амплитудой (рябь) и крупномасштабные пульсации, которые представляют собой акустические возмущения, распространяющиеся за фронтом ударной волны.



Фиг. 2 а, б

Незначительные колебания давления на профиле волны обусловлены свойствами конечно-разностной схемы (3.4). Величина этих пульсаций определяет точность, с которой можно доверять полученным результатам.

Максимальная интенсивность ударной волны  $p/p_0 \cong 2.1$ . После отрыва ударной волны от волны реакции происходит ее затухание, вследствие того, что волны разрежения (впадины на профиле волны) догоняют ударную волну.



Фиг. 2 в

На фиг. 2, в пунктиром показано начальное распределение температуры. Видно, что основное повышение температуры вызывается волной реакции; нагревание газа ударной волной незначительно. Поэтому волна реакции замедляется (фиг. 2, а). Если бы уравнения содержали члены, описывающие процессы диффузии и теплопроводности, то образовалось бы нормально распространяющееся пламя. Отметим, что скорость ударной волны намного больше нормальной скорости распространения пламени, поэтому отсутствие этих членов не влияет на формирование и распространение ударной волны.



Фиг. 2 г

Фиг. 2, г показывает, как меняется во времени скорость газа относительно стенок.

Для  $\lambda_2 = 0.02$  осуществляется тот же режим реакции; на фиг. 3 представлены распределения величин  $a$  и  $p$ , кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям времени  $\tau = 7.44, 11.49, 16.65, 22.15$ .

Отличие от предыдущего случая заключается в том, что отрыв ударной волны от волны реакции происходит в значительно более поздние моменты времени и на больших расстояниях от горячей стенки (при  $\tau = 7.44$  и  $\xi = 23.0$  они еще совпадают), так как в образовании ударной волны участвует большая масса прореагировавшего газа. По этой же причине максимальная интенсивность ударной волны значительно больше, чем в предыдущем случае, и равна 6.6.

Протекание реакции в режиме детонации показано на фиг. 4, а, б. В этом случае  $\lambda_3 = 0.0107$ . Это тот критический градиент  $\lambda_1^*$ , при котором наступает детонация. Полученные в результате решения кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют значениям времени  $\tau = 5.73, 7.84, 9.53, 11.23, 12.96, 14.76$ .

Из фиг. 4 можно вычислить скорость волны; она равна 15.07, 5.57, 5.80, 5.29, 4.88, 4.53 в указанные выше промежутки времени (величина скорости обезразмерена на скорость звука при  $300^\circ\text{K}$ ).

С другой стороны, из формулы для сильной детонации [3]

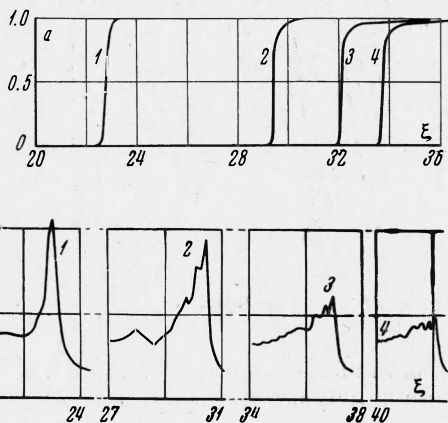
$$D = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)Q} \quad (4.1)$$

где  $D$  — скорость детонационной волны, получим  $D = 4.95$ .

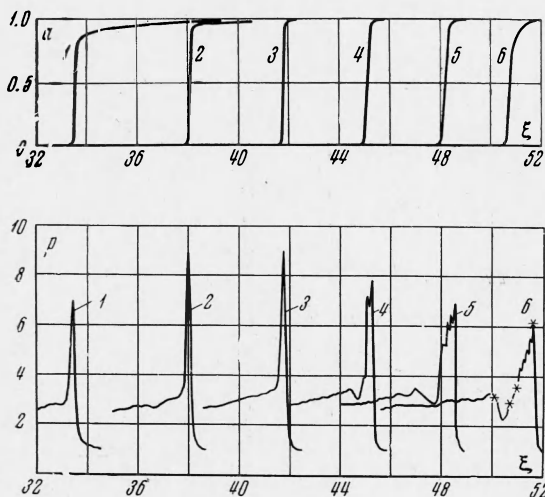
Видимо, к моменту времени  $\tau = 14.76$  происходит выход детонационной волны на режим Чепмена — Жуге. Это подтверждается вычислением скорости детонационной волны относительно продуктов детонации, которая равна местной скорости звука. Вычисления производились в точках, которые помечены на фиг. 4, б звездочками. Величина  $(D - w) / c$  ( $w$  —

скорость продуктов реакции в данной точке,  $c$  — скорость звука в этой же точке) равна 0.97, 1.06, 0.98, 0.53 (в порядке возрастания  $\xi$ ). Последняя величина относится к точке, где реакция еще не начиналась. Отклонения приведенных величин от единицы находятся в пределах точности определения скорости волны.

Несовпадение скорости волны, вычисленной по результатам счета и по формуле (4.1) объясняется, видимо, тем, что структура детонационной

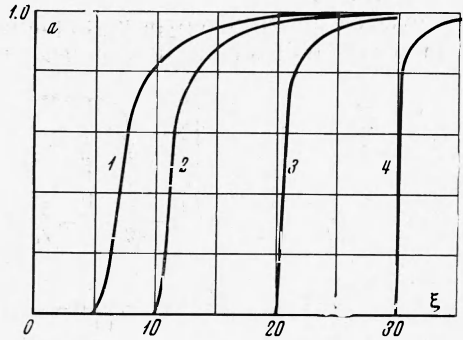


Фиг. 3



Фиг. 4 а, б

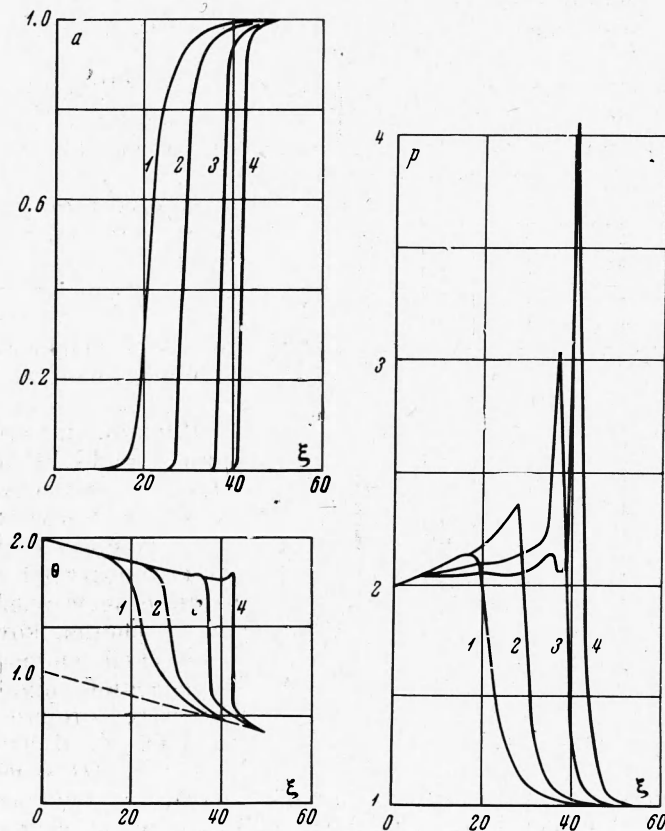
волны является нестационарной. Это было отмечено в работах [4-6], в которых исследовалась неустойчивость одномерного распространения детонационной волны. Отмеченные в работах [5, 6] пульсации давления во фронте волны наблюдались и нами (эти результаты здесь не приводятся). Заметим, что в работах [5, 6] в отличие от рассматриваемого случая скорость детонационной волны и степень пересжатия задавались внешними условиями — движением поршня.



Фиг. 5

Следует также напомнить, что само рассмотрение плоской детонационной волны является в достаточной степени условным из-за ее неустойчивости к пространственным искривлениям. Экспериментально наблюдаемые детонационные волны имеют сложную трехмерную нестационарную структуру. Расчет, проведенный выше, таким образом, мо-

жет иллюстрировать лишь первую стадию образования детонационной волны, пока еще не успела сформироваться ее пространственная структура.



Фиг. 6 а, б, в

жет иллюстрировать лишь первую стадию образования детонационной волны, пока еще не успела сформироваться ее пространственная структура.

Произведем сравнение полученных результатов с распространением реакции в несжимаемом газе. Полагая в уравнениях (2.3) производную  $\partial u/\partial x = 0$ , легко получить следующее соотношение, определяющее изменение концентрации  $a$  во времени

$$e^{\beta\tau} = Ei \left[ \frac{\beta}{\Delta - a\sigma} \right] - Ei \left[ \frac{\beta}{\Delta - \sigma} \right] + e^{\beta/\Delta} \left\{ Ei \left[ \frac{\beta\sigma}{\Delta(\Delta - \sigma)} \right] - Ei \left[ \frac{\beta a \sigma}{\Delta(\Delta - \sigma a)} \right] \right\} \quad (4.2)$$

$$\left( \sigma = \alpha(\gamma - 1), \Delta = 1 + \sigma - \lambda\xi, Ei[x] = \int_{-\infty}^x \frac{e^z}{z} dz, x > 0 \right)$$

Результаты вычисления решений по формуле (4.2) приведены на фиг. 5, где кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют моментам времени  $\tau = 0.27, 0.42, 1.34, 6.75$  ( $\lambda_3 = 0.0107$ ).

Фиг. 6, а, б, в позволяют проследить, как происходит формирование детонационной волны ( $\lambda_2 = 0.04$ ). Решения 1, 2, 3, 4 соответствуют моментам времени  $\tau = 1.55, 3.10, 7.75, 10.75$ . Сначала распределения всех величин довольно плавные, затем по мере формирования волны градиенты становятся все круче. Волна здесь формируется позже, чем в предыдущем случае.

Если еще более уменьшить наклон температурного профиля, то, начиная с  $\lambda_2^* = 0.003$ , реакция происходит по всему сосуду, т. е. в режиме теплового взрыва.

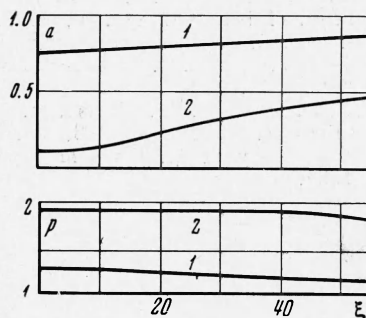
Заметим, что значения критических градиентов  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_2^*$  являются функциями длины сосуда. Действительно, если длина сосуда меньше расстояния, на котором происходит выход на режим Чепмена — Жуге, то режим протекания реакции может классифицироваться как тепловой взрыв.

На фиг. 7 изображены решения для  $\lambda_3 = 0.001$ , кривые 1, 2 нанесены в моменты  $\tau = 0.18, 0.34$ . К моменту времени  $\tau = 0.47$  происходит полное выгорание горючей компоненты. Давление по всему сосуду поднимается почти равномерно до  $2P_0$ . Это легко получить из системы уравнений (2.1), если положить производные по  $x$  равными нулю.

**5. К объяснению природы стука в двигателях внутреннего сгорания.** Процесс сгорания горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания может происходить со взрывом. Это явление получило название стук. В настоящее время принято объяснять это явление с точки зрения кинетических представлений. При этом выводы, которые делаются различными авторами, весьма противоречивы и не объясняют в должной мере накопившийся экспериментальный материал. Подробное изложение существующих взглядов на этот вопрос имеется в монографиях [7, 8]. Отметим также недавнюю работу [9].

Чисто тепловое объяснение этого явления, предлагаемое в данной работе, основывается на возможности возникновения детонационной волны в результате неравномерного прогрева реакционноспособной газовой смеси. Образование детонационной волны объясняет причину того, что при стуке наблюдается большая термическая и механическая перегрузка двигателя. Например, для случая  $\lambda_2 = 0.0107$  интенсивность образовавшейся детонационной волны равна  $\sim 6$ . По формуле отражения детонационной волны от твердой стенки [10] давление за отраженной волной равно  $\sim 15P_0$ .

Образование детонационных волн при стуке наблюдалось в экспериментах. Они описаны в [8].



Фиг. 7



Авторы выражают глубокую благодарность Л. А. Чудову за большую помощь, оказанную при решении задачи.

Поступила 25 IV 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Neuman I., Richtmyer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, No. 3.
2. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. Теория детонации. М., Гостехиздат, 1955.
4. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. Одномерная неустойчивость и затухание детонации. ПМТФ, 1963, № 6.
5. Fickett W., Wood W. W. Flow calculations for pulsating onedimensional detonations. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No 5.
6. Егренбек I. I. Nonlinear theory of unstable one - dimensional detonations. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2.
7. Иост В. Взрывы и горение в газах. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
8. Соколик А. С. Самовоспламенение, пламя и детонация в газах. М., Изд-во АН СССР, 1960.
9. Affleck W. S., Fish A. Knock: flame acceleration or spontaneous ignition. Combust. and flame, 1968, vol. 12, No. 3.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.