

Кривые спектральной плотности в пристенной струе претерпевают значительные изменения по мере увеличения расстояния от сопла. При малых величинах  $x/d \leq 10$  спектр характеризуется повышенными значениями на больших частотах, связанными, вероятно, с интенсивной свободной турбулентностью начального участка струи. Далее, уровень пульсаций в этом диапазоне частот уменьшается с одновременным формированием нового максимума, порождаемого непосредственно пристенной турбулентностью. Начиная со значений  $x/d = 25-30$ , изменение спектра носит уже автомоделный характер и обусловлено лишь уменьшением характерной скорости и интенсивности турбулентности потока. Здесь функции спектральной плотности в области убывания по частоте хорошо описываются степенной зависимостью  $\Phi \sim \omega^{-2}$ .

Поступила 22 VII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Russel P. J., Hatton A. P. Turbulent flow characteristic of an impinging jet. — «Proc. Instn. Mech. Engrs», 1972, vol. 186.
2. Kacker S. C., Whitelaw J. H. Prediction of wall-jet and wall-wake flows. — «J. Mech. Engng Sci.», 1970, vol. 12, N 6.
3. Wolfstein M. Some solution of the plane turbulent impinging jet. — «Trans. of ASME». Ser. D, 1970, vol. 92, N 4. Рус. пер. Вольфштейн М. Некоторые решения задачи о плоской турбулентной струе, падающей на твердую поверхность. — «Труды Америк. об-ва инж.-мех.» Сер. Д, 1970, N 4.
4. C. du P. Donaldson, Snedeker R. S., Margolis D. P. A study of free jet impingement. Pt 2. Free jet turbulent structure and impingement heat transfer. — «J. Fluid Mech.», 1974, vol. 45, pt 3.
5. Random vibration. Massachusetts, 1963. Рус. пер. Случайные колебания. М., «Мир», 1967.
6. Кудашев Е. Б. Микроприемники пульсационного давления. — В кн.: Турбулентные течения. М., «Наука», 1970.
7. Heat and mass transfer in recirculating flows. L.— N. Y., Acad. Press, 1969, Рус. пер. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., «Мир», 1972.
8. Белов И. А., Памани Б. И. Взаимодействие струи с плоской нормально расположенной преградой. — «Инж.-физ. журн.», 1972, т. XXII, № 1.
9. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.

УДК 532.51

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ

В. М. Солопенко

(Киев)

В настоящее время имеется целый ряд работ, где рассматриваются и численно решаются различные типы уравнения движения вязкой жидкости, которые в некотором смысле являются более простыми, чем уравнения Навье—Стокса (например, [1, 2]). Выбор членов, сохраняемых в различных модификациях, обычно обуславливают физическими свойствами конкретной задачи. Для обобщенных уравнений Прандтля в работе [3] исследовалась устойчивость решений в терминах ротора скорости.

Изучается двумерное установившееся течение вязкой жидкости, когда имеется выделенное основное направление течения вдоль твердых поверхностей. Примером является течение в каналах. Уравнения движе-

ния должны тогда удовлетворять двум основным требованиям: пригодности для описания течения как вблизи границы, так и в ядре потока, эволюционному характеру уравнений по продольной координате. Формально они могут быть получены при рассмотрении вывода уравнений Прандтля путем сохранения членов порядка  $(\text{Re})^{-1/2}$ . Отброшенные члены имеют высокий порядок малости вблизи границы и в ядре потока.

Тогда имеем (обозначения общепринятые)

$$(1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (1/\text{Re}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + (1/\text{Re}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь число  $\text{Re}$  определяется, например, по характерному размеру области протекания и средней скорости. Внешнее и внутреннее асимптотические разложения системы уравнения (1) приводят, как и уравнения Навье-Стокса, к уравнениям Эйлера и Прандтля соответственно. Таким образом, имея решение системы (1), можно обойтись без процесса сращения. Кроме того, можно переписать (1) в виде уравнений Коши-Ковалевской

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= (1/\text{Re}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= (1/\text{Re}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (v/u) \frac{\partial v}{\partial y} - (1/u) \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$

что дает принципиальную возможность производить расчет течения от первого сечения вниз по потоку. Укажем два очевидных преимущества расчета системы уравнений (2) по сравнению с решением системы Навье-Стокса: экономия машинного времени, отсутствие часто неприятной необходимости задавать параметры потока в выходном сечении. Ниже исследуются инвариантно-групповые решения системы (1), ее линеаризованные решения и задача Коши для системы (2).

В системе дифференциальных уравнений (1) число искомых функций  $m = 3$ , а число независимых переменных  $n = 2$ . Разыскиваем базис алгебры Ли инфинитезимальных операторов группы преобразований, допускаемых системой уравнений (1). Для этого в соответствии с общей теорией [4] строим второе продолжение произвольного оператора группы, а затем решаем систему определяющих уравнений. В результате указанный базис  $L_4$  (оказывается,  $R = 4$ ) находим в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} + \\ &+ 2p \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned}$$

Общий ранг матрицы  $\| \xi_{\alpha}^i, \eta_{\alpha}^k \|$ ,  $i = 1, 2$ ;  $k = 1, \dots, 3$ ;  $\alpha = 1, \dots, 4$ , равен 4, он сохраняется на многообразии, задаваемом решениями системы уравнений (1). Обозначим через  $r$  ранг соответствующей подалгебры Ли. Всякое неособое инвариантное многообразие группы  $G_4$  задается в виде

$$\Psi^{\nu} (I_1, \dots, I_t) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \mu.$$

Тогда  $n + m - r = t$ , число  $\rho = t - \mu$  ( $\rho = t - 3$ ) называется рангом частично-инвариантного (инвариантного) решения, а число  $\delta = m - \mu$  — дефектом инвариантности. Необходимое условие существования частично-инвариантного решения в этом случае записывается в виде

$$\max\{r - 2, 0\} \leq \delta \leq \min\{r - 1, 2\},$$

N	R	t	δ	ρ	μ	Вид решения
1	1	4	0	1	3	$I_1, I_2, I_3, (I_4)$
2	2	3	0	0	3	$I_i = C, i=1, \dots, 3$
3	2	3	1	1	2	$I_1, I_2, (I_3)$
4	3	2	1	0	2	$I_i = C_i, i=1, 2$
5	3	2	2	1	1	$I_1 (I_2)$
6	4	1	2	0	1	$I_1 = C$

что позволяет построить таблицу возможных типов частично инвариантных (инвариантных) решений уравнений (1) [5]. С помощью матриц внутренних автоморфизмов алгебры  $L_4$  определяется оптимальная система однопараметрических подгрупп  $\theta_1$ , которая в этом случае имеет вид

$$X_1, \alpha X_2 + \beta X_3 + \gamma X_4.$$

Наибольший интерес представляет инвариантное решение 1, построенное на подгруппе  $H_1$ . Имеем следующий набор инвариантов:

$$I_1 = ux, I_2 = vx, I_3 = px^2, I_4 = y/x.$$

В соответствии с этим решение системы (1) ищем в виде

$$(3) \quad u = (1/x)\varphi(\xi), \quad v = (1/x)\psi(\xi), \quad p = p_0 + (1/x^2)\pi(\xi), \quad \xi = y/x.$$

Подставляя выражение (3) в (2), получим

$$(4) \quad \begin{aligned} \eta' &= -\operatorname{Re} \varphi^2 - (2\eta\xi + 2\pi \operatorname{Re} \xi)/(1 + \xi^2), \\ \varphi' &= \eta, \quad \pi' = (2\eta - 2\pi \operatorname{Re} \xi)/\operatorname{Re}(1 + \xi^2). \end{aligned}$$

Система уравнений (4) может быть успешно применена для расчета течения в плоском диффузоре. Рассмотрим диффузор с углом раскрытия  $2\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha = a$ ). К системе уравнений (4) добавляются граничные условия

$$(5) \quad -a \leq \xi \leq a, \quad \varphi(-a) = 0, \quad \pi(-a) = 0, \quad \eta(-a) = c.$$

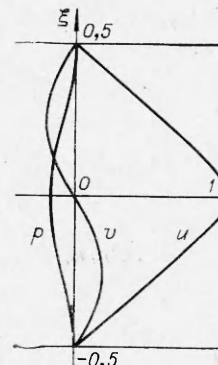
Задача (4), (5) имеет единственное решение. Коэффициент  $c$  при численном расчете выбирается из условия  $\varphi(a) = 0$ . Типичные профили искомым функций при  $\operatorname{Re} = 100$ ,  $a = 0,5$  приведены на фиг. 1. Линиями тока в этом случае являются прямые  $\xi = \text{const}$ .

Отметим, что для небольших углов раскрытия диффузора вторые производные по продольной координате оказываются малыми. Действительно, обозначая через  $l$  ширину проточной части ( $\Delta l = 2 \operatorname{tg} \alpha \Delta x$ ) и  $u_{\text{ср}}$  среднемассовую скорость, имеем

$$\begin{aligned} |\partial^2 u / \partial x^2| : |\partial^2 u / \partial y^2| &\sim (8u_{\text{ср}}/l^2) \operatorname{tg}^2 \alpha : (16/3) \times \\ &\times u_{\text{ср}}/l^2 \sim \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей, можно построить также различные частично-инвариантные решения. Например, частично-инвариантное решение ранга 1 типа 3 на подгруппе  $H_1$  ищется в виде

$$u = (1/x)\varphi(px^2), \quad v = (1/x)\psi(px^2).$$



Фиг. 1

Переходя к изучению линейризованных решений системы уравнений (1), рассмотрим смешанную задачу для течения в канале  $x \in [0, \infty]$ ,  $y \in [-1, 1]$ . Решение ищется в виде

$$(6) \quad u = (1 - y^2) + u_1, v = v_1, p = -\frac{2x}{\text{Re}} + p_1, \int_{-1}^1 u_1 dy = 0,$$

что соответствует числу  $\text{Re}$ , определенному по максимальной скорости в течении Пуазейля и полуширине канала. Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} u_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} v_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} p_1 = 0$ , т. е. справедливо утверждение, что решение линейризованных обобщений уравнений Прандтля для плоской трубы стремится к течению Пуазейля.

Подставляя выражения (6) в систему уравнений (1), полагая  $u_1, v_1, p_1 \ll 1$  и пренебрегая квадратичными членами, получим линейную систему уравнений

$$(7) \quad (1 - y^2)\partial u_1/\partial y - 2yv_1 = -\partial p_1/\partial x + (1/\text{Re})\partial^2 u_1/\partial y^2; \\ (1 - y^2)\partial v_1/\partial x = -\partial p_1/\partial y + (1/\text{Re})\partial^2 v_1/\partial y^2; \partial u_1/\partial x + \partial v_1/\partial y = 0.$$

Для решений системы (7) зададим следующие начальные и граничные условия:

$$(8) \quad u_1(x, \pm 1) = v_1(x, \pm 1) = 0; u_1(0, y) = f(y); f(y) \in C_0[-1, 1].$$

Решение задачи (7), (8) ищем в виде

$$(9) \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n x} u_1^n(y), v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n x} v_1^n(y), \\ p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x} p_1^n(y).$$

Пусть известна система собственных функций  $\{v_1^n\}$  и собственных значений  $\{\lambda_n\}$  краевой задачи, сформулированной ниже. Тогда, полагая  $u_1^n = -(v_1^n)'$  (в соответствии с уравнением неразрывности), имеем

$$B_n = -\lambda_n A_n, p_1^n = B_n \int_{-1}^y \left[ -\lambda_n (1 - y^2) v_1^n + \frac{1}{\text{Re}} (v_1^n)'' \right] dy.$$

Коэффициенты  $A_n$  находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-1}^1 u_1^n u_1^k dy = \int_{-1}^1 f(y) u_1^k dy, k = 1, \dots, \infty.$$

Существование единственного решения этой системы гарантируется полнотой системы собственных функций соответствующей краевой задачи.

Из соотношений (7), (9) получаем уравнения

$$A_n u_1^n (1 - y^2) \lambda_n^2 + 2y \lambda_n v_1^n B_n + \lambda_n^2 p_1^n = -\frac{i}{\text{Re}} (v_1^n)'' B_n; \\ -\lambda_n (1 - y^2) B_n v_1^n = -(p_1^n)' + \frac{1}{\text{Re}} (v_1^n)'' B_n$$

и приходим к следующей краевой задаче:

$$(10) \quad \frac{1}{\text{Re}} (v_1^n)^{\text{IV}} + (v_1^n)'' \left[ \lambda_n (1 - y^2) + \frac{\lambda_n^2}{\text{Re}} \right] + v_1^n [\lambda_n^3 (1 - y^2) + 2\lambda_n] = 0, \\ v_1^n (\pm 1) = (v_1^n (\pm 1))' = 0, n = 1, \dots, \infty.$$

Проведем исследование первых собственных значений задачи (10) для больших чисел  $\text{Re}$ . Полагая  $\mu_n = \lambda_n \text{Re}$  и пренебрегая членами  $\mu^2/\text{Re}^2$  и  $\mu^3/\text{Re}^2$ , получим вместо (10)

$$(11) \quad (v_1^n)^{\text{IV}} + \mu_n [(v_1^n)'' (1 - y^2) + 2v_1^n] = 0.$$

Аналогичное дифференциальное уравнение получено в работе [6]. Краевая задача для уравнения (11) может быть изучена методом Шварца ((11) имеет вид  $M[v] = \mu N[v]$ ). Это дает наличие бесконечного набора собственных функций и (соответственно) спектра собственных значений. Последовательность возрастающая, а приближенное вычисление дает величину  $\mu_1 = 13,9$ . Таким образом, предельным решением задачи (7), (8) является течение Пуазейля. Как следует из формул (9), отклонения от параболического профиля падают в  $e$  раз на расстоянии  $x = \text{Re}/13,9$ . Для числа  $\text{Re} = 25$   $x \approx 0,9$  диаметра трубы. Это хорошо согласуется с результатом численного расчета [7]. То же значение из работы [6] оказывается примерно в два раза завышенным.

Наконец, рассмотрим задачу Коши (либо смешанную краевую задачу) для системы обобщенных уравнений Прандтля в виде (2). В силу отсутствия в первом и третьем уравнениях соответствующих вторых производных по координате  $y$  данная система уравнений не является параболической по Петровскому (не говоря о наличии нелинейных членов). Поэтому при построении численной схемы, позволяющей рассчитать течение от начального сечения к конечному, необходимо для устойчивости решения убедиться в сжимающем характере оператора задачи. Применим метод расщепления [7, 8] в модификации, когда первая часть расщепленного оператора является параболической. Вторая же часть допускает аналитическое исследование. Выпишем достаточные условия корректности аналитической задачи Коши, соответствующей второму оператору, которые являются необходимыми для реализации численного решения. Кроме того, применим к системе (2) известный метод параболической регуляризации. Достаточность проводимого ниже анализа для устойчивости показана численным экспериментом.

Таким образом, переход от предыдущего слоя к последующему вдоль эволюционной координаты в системе уравнений (2) производится в два этапа. На первом полушаге решается эволюционная задача

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & (u - \alpha) \frac{\partial}{\partial y} & -v \frac{\partial}{\partial y} \\ -\left(\frac{1}{u} + b\right) \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{u \text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\frac{v}{u} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \\ u \end{pmatrix} \equiv A_1 \begin{pmatrix} p \\ v \\ u \end{pmatrix}$$

с соответствующими граничными условиями, а на втором полушаге имеем оператор

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \alpha \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \nu \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \\ u \end{pmatrix} \equiv A_2 \begin{pmatrix} p \\ v \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\alpha, \beta, b = \text{const}$ . Очевидно, при  $\beta \rightarrow 0$  имеем  $A_1 + A_2 = A$ , где  $A$  — полный эволюционный оператор системы уравнений (2).

Как известно [8], ошибка на одном шаге вследствие расщепления пропорциональна величине  $\|A_1 A_2\| h_x^2$ , где  $h_x$  — шаг вдоль эволюционной координаты. Таким образом, при ограниченности обоих операторов можно достигнуть весьма высокой точности. Видно, что (12) представляет собой параболическую систему уравнений относительно двух неизвестных функций  $p, v$ . Такие системы изучались в работе [9] при достаточно «хороших» сомножителях при производных в правой части. При численном счете решают, по сути дела, линейную задачу, беря сомножители при производных на предыдущем слое. Это дает ошибку на одном шаге  $\sim h_x^2$ .

При расчете полезно убедиться, что оператор  $A_1$  является сжимающим. Исследуем оператор  $A_2$ . Произведя в уравнении (13) замену переменных (6), получим

$$(14) \quad \begin{aligned} \partial p_1 / \partial x &= (1/\text{Re}) \partial^2 u_1 / \partial y^2 + (\beta/\text{Re}) \partial^2 p_1 / \partial y^2 + \alpha \partial v_1 / \partial y; \\ \partial v_1 / \partial x &= b \partial p_1 / \partial y; \quad \partial u_1 / \partial x = -\partial v_1 / \partial y. \end{aligned}$$

Для исследования поведения решений системы (14) теперь можно применить метод Фурье. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda p_1^1 &= \frac{1}{\text{Re}} u_1^1 + \frac{\beta}{\text{Re}} p_1^1 + \alpha v_1^1; \quad \lambda v_1^1 = b p_1^1; \\ \lambda u_1^1 &= -v_1^1 \quad (y \rightarrow p_1^1, v_1^1, u_1^1). \end{aligned}$$

Исключая функции  $u_1^1$  и  $p_1^1$ , найдем, что  $v_1^1$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v_1^{1IV} - \left( \frac{\lambda^2 \beta / \text{Re} + \lambda \alpha b}{b} \text{Re} \right) v_1^{1''} + \frac{\lambda^3}{b} \text{Re} v_1^1 = 0.$$

Добавляя к этому уравнению краевые условия, например, в виде (10), найдем, что краевая задача окажется разрешимой, если корни характеристического уравнения

$$z^4 - \left( \frac{\lambda^2 \beta / \text{Re} + \lambda \alpha b}{b} \text{Re} \right) z^2 + \frac{\lambda^3}{b} \text{Re} = 0$$

будут иметь вид  $z_{1,2} = \pm i \xi$ ;  $z_{3,4} = \pm \eta$ , где  $\xi$  — вещественное число;  $\eta$  — произвольно комплексное, связанное с  $\xi$  условием обращения в нуль характеристического определителя. Обозначив  $\xi^2 = C$ ,  $-\eta^2 = c$ , найдем из теоремы Виета связь между характеристическими числами  $\lambda$  и  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$

$$(15) \quad -\lambda^2 s - \lambda t = C + c; \quad q \lambda^3 = Cc,$$

где  $q = \text{Re}/b$ ;  $s = \beta/b$ ;  $t = \alpha \text{Re}$ .

Из (15) получаем алгебраическое уравнение относительно числа  $\lambda$

$$(16) \quad \lambda^3 + \lambda^2 s C / q + \lambda t C / q + C^2 / q = 0.$$

Вопрос о корректности задачи Коши для оператора  $A_2$  сводится, таким образом, к исследованию корней уравнений (16). Условие  $\text{Re} \lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$  выполняется только тогда, когда

$$sC/q > 0, \quad tC/q > 0, \quad C^2/q > 0, \quad (sC/q)(tC/q) > C^2/q.$$

Это дает условие корректности эволюционной задачи для оператора  $A_2$  в виде

$$(17) \quad \alpha \beta > 1.$$

В силу соответствующего выбора расщепления условие (17) не зависит от спектра собственных чисел краевой задачи для

$$v_1^1: \{C_n\}, n=1, \dots, \infty.$$

Условие (17), однако, накладывает существенное ограничение на величину шага  $h_x$ . Действительно, поскольку  $\|A_1 A_2\| \sim \alpha^2$ , ошибка в расчете при переходе от предыдущего слоя к последующему оценивается соотношением

$$\Delta \sim \|A_1 A_2\| h_x^2 \sim \alpha h_x^2 \sim \left(\frac{hx}{\beta}\right)^2.$$

Таким образом, предельный переход  $\beta \rightarrow 0$  требует для сохранения точности расчета измельчения шага  $h_x$ .

Перейдем к численному решению задачи о течении жидкости в плоской трубе. В упрощенном виде эта задача решена в работе [10]. К системе уравнений (2) добавляются следующие условия:

$$\begin{aligned} u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0, \quad u(0, y) = u_0(y), \quad v(0, y) = v_0(y), \\ p(0, y) = p_0(y); \quad x \in [0, \infty], \quad y \in [-1, 1]; \quad u_0, v_0, p_0 \in C_0[-1, 1]. \end{aligned}$$

Применяя расщепление (12), (13), рассмотрим каждую задачу в отдельности. Разностная схема, соответствующая первому оператору (12), записывается в виде

$$\begin{aligned} p_j^{i+1} - p_j^i &= \frac{\tau\beta}{\text{Re } h^2} (p_{j-1}^{i+1} - 2p_j^{i+1} + p_{j+1}^{i+1} + \tau(2u_j^i - u_j^{i-1} - \\ &- \alpha) \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_{j-1}^{i+1}}{2h} - \tau(2u_{j+1}^i - 2u_{j-1}^{i-1} + u_{j-1}^{i-1} - u_{j+1}^{i-1}) \frac{v_j^{i+1}}{2h}; \\ v_j^{i+1} - v_j^i &= \frac{\tau}{(2u_j^i - u_j^{i-1}) \text{Re } h^2} (v_{j-1}^{i+1} - 2v_j^{i+1} + v_{j+1}^{i+1}) - \\ &- \tau \frac{2v_j^i - v_j^{i-1}}{2u_j^i - u_j^{i-1}} \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_{j-1}^{i+1}}{2h} - \frac{\tau}{2h} \left( \frac{1}{2u_j^i - u_j^{i-1}} + b \right) (p_{j+1}^{i+1} - p_{j-1}^{i+1}), \\ i &= 0, \dots, \infty, \quad j = 0, \dots, 2N, \quad h = 1/N, \quad \tau = hx; \\ v_0^i &= v_{2N}^i = 0, \quad p_0^{i+1} = p_0^i, \quad p_{2N}^{i+1} = p_{2N}^i. \end{aligned}$$

Данная разностная краевая задача решается методом прогонки

$$\begin{aligned} p_j &= A_{j+1} p_{j+1} + B_{j+1} v_{j+1} + C_{j+1}; \\ v_j &= D_{j+1} p_{j+1} + E_{j+1} v_{j+1} + F_{j+1}, \end{aligned}$$

применяемой обычно для параболических систем, и не встречает существенных трудностей. Оператор  $A_1$  является параболическим нелинейным оператором. При всех численных просчетах его норма оказывалась меньше единицы. Численный расчет второй части задачи требует специального подхода. Запишем разностную схему оператора (13)

$$\begin{aligned} (18) \quad p_j^{i+1} - p_j^i &= \frac{\tau\beta}{\text{Re } h^2} (p_{j-1}^{i+1} - 2p_j^{i+1} + p_{j+1}^{i+1}) + \frac{\tau}{\text{Re } h^2} (u_{j-1}^{i+1} - \\ &- 2u_j^{i+1} - u_{j+1}^{i+1} + \frac{\alpha}{2h} (v_{j+1}^{i+1} - v_{j-1}^{i+1})); \\ u_j^{i+1} - u_j^i + u_{j+1}^{i+1} - u_{j+1}^i &= \frac{2\tau}{h} (v_j^{i+1} - v_{j+1}^{i+1}); \end{aligned}$$



$$v_j^{i+1} - v_j^i + v_{j+1}^{i+1} - v_{j+1}^i = \frac{2\tau b}{h} (p_{j+1}^{i+1} - p_j^{i+1});$$

$$u_0^i = u_{2N}^i = v_0^i = v_{2N}^i = 0.$$

Как видно из соотношений (18), два последних уравнения записаны для фиктивной промежуточной точки  $j + 1/2$ . Отсутствие граничных условий для  $p$  требует соответственного увеличения уравнений численной схемы. По этой же причине прогонка реализуется в виде

$$u_j = A_{j+1}u_{j+1} + B_{j+1}v_{j+1} + C_{j+1};$$

$$v_j = D_{j+1}u_{j+1} + E_{j+1}v_{j+1} + F_{j+1};$$

$$p_j = G_{j+1}u_{j+1} + H_{j+1}v_{j+1} + K_{j+1}.$$

Для начала прогоночного цикла необходимо, дважды используя два последних уравнения системы (18), записать в окрестности границы систему уравнений вида

$$lp_0 + mp_1 + lp_2 + n(u_2 - 2u_1) + tv_2 = -p_1^0,$$

$$u_1 + \mu v_1 = \xi_0, \quad u_2 + u_1 + \mu(v_2 - v_1) = \xi_1, \quad v_1 + \nu(p_1 - p_0) = \eta_0,$$

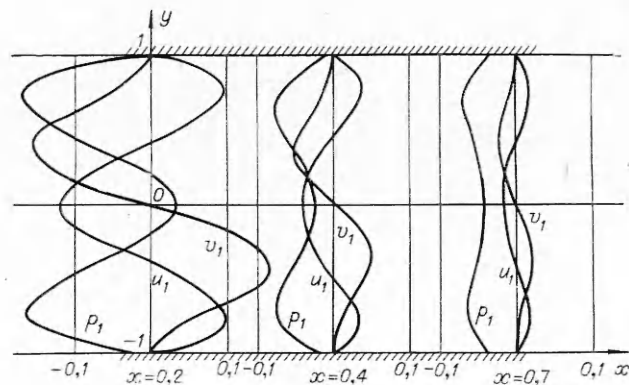
$$v_2 + v_1 + \nu(p_2 - p_1) = \eta_1,$$

$$l, m, n, t, p_1^0, \mu, \xi_0, \xi_1, \nu, \eta_0, \eta_1 = \text{const},$$

из которой можно выразить  $p_0, p_1, p_2, v_1, u_1$  через  $v_2$  и  $u_2$ , что обеспечивает начало прогонки. В процессе счета величина  $p_{j+1}$  в первом из уравнений (18) исключается с помощью третьего уравнения. В остальном процесс прогонки является стандартным. Возможность непротиворечивого построения указанной схемы, являющейся на первый взгляд недоопределенной, обеспечивается тем, что система уравнений (13) имеет четвертый порядок по переменной  $y$ .

При численном расчете после определенного количества шагов был предусмотрен вывод на печать сеточной нормы в  $L_2$  искомым функций после каждого из операторов  $A_i$ . Таким образом, численно проверялся сжимающий характер обоих операторов. Для улучшения устойчивости решения в случае больших чисел  $Re$  на втором полушаге проводилась повторная итерация.

До чисел  $Re$  порядка 1000 наблюдается устойчивый счет всей схемы в целом. Решение задачи имеет своим пределом профиль Пуазейля. Типичные профили по сечениям проведены на фиг. 2 ( $p_1 = p_2 + 2x/Re$ ;



Фиг. 2



$u_1 = u - (1 - y^2)$ ;  $v_1 = v$ ;  $Re = 10$ ). Следует отметить, что данная методика позволяет без принципиальных затруднений ввести в расчет полуэмпирические турбулентные напряжения.

Автор выражает благодарность Н. Х. Ибрагимову и А. К. Янко за полезное обсуждение работы.

Поступила 5 XI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Солопенко В. М., Янко А. К. Приближенные уравнения течения вязкой жидкости в приложении к осесимметричному потоку.— «Изв. АН БССР», 1975, № 2.
2. Inger G. R. Strong blowing across a Couette-Poiseuille shear flow.— «Phys. Fluids», 1969, vol. 12, N 9, p. 1741—1746.
3. Stefan Loer. Examination of the stability of disturbed boundary-layer-flow by a numerical method. Lecture at IUTAM Symposium. Montrey, California, August, 1968.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Ибрагимов И. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1967.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
7. Тейлор Т. Д., Хиде Э. Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления.— In: Proc. 2nd Intern. Conf. Numer. Meth. Fluid Dynamics. Berlin, Springer-Verlag, 1971. Рус. пер. Численные методы в механике жидкости. М., «Мир», 1973.
8. Яненко Н. И. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
9. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., «Наука», 1964.
10. Янко А. К. Регулярные решения уравнений движения вязкой жидкости и расчет течения в плоской трубе.— «Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук», 1974, № 8, вып. 2.

УДК 518 : 517.9 : 532

#### РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА, МГНОВЕННО ПРИВЕДЕННОГО В ДВИЖЕНИЕ

В. И. Кравченко, Ю. Д. Шевелев, В. В. Щенников

(Москва)

1. Первые результаты, относящиеся к решению задачи о нестационарном обтекании тела конечного размера, мгновенно приведенного в движение, получены в рамках теории пограничного слоя.

Блазиус [1] получил для начальной стадии течения два первых члена разложения решения в ряд по степеням  $t$  ( $t$  — время), причем найденное им решение справедливо при  $Re \rightarrow \infty$ .

В работе [2] приводится уточнение решения, найденного Блазиусом. В дальнейшем была предпринята попытка распространить решение Блазиуса на случай малых чисел Рейнольдса [3,4].

Более перспективным подходом к решению рассматриваемой задачи оказывается использование численных методов решения нестационарных уравнений Навье—Стокса [5 — 10]. В работе [10] приводится обзор литературы по рассматриваемому вопросу. В случае внезапно возникающего движения цилиндра одна из трудностей состоит в определении начальных условий.

Из теории пограничного слоя следует [11], что завихренность потока жидкости в начальный момент будет иметь бесконечно большую величину и сосредоточена в бесконечно тонкой области, окружающей поверхность цилиндра. По