

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ

УДК 517.91:541.128

В. И. Быков, Е. П. Волокитин\*, С. А. Тресков\*

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск  
\* Институт математики СО РАН, 630090 Новосибирск

*На основе методов теории бифуркаций проведен параметрический анализ модели Зельдовича — Семенова, описывающей динамику одной экзотермической реакции в реакторе идеального смешения. В процессе анализа получены бифуркационные диаграммы, которые не были обнаружены в предыдущих исследованиях.*

Одной из базовых моделей теории горения является модель Зельдовича — Семенова, описывающая динамику экзотермической реакции в реакторе идеального смешения [1, 2]. С использованием системы обезразмеривания Д. А. Франк-Каменецкого [2] в простейшем случае одной реакции первого порядка исходная модель сводится к автономной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с четырьмя параметрами [3].

Важным этапом исследования динамических систем является их параметрический анализ. Для предсказания критических явлений в описываемой конкретной системе необходимо знать возможные качественные и количественные характеристики особенностей динамики модели, которые можно получить на основе параметрического анализа.

Современная теория бифуркаций динамических систем позволяет существенно продвинуться в этом направлении. Прикладное значение результатов параметрического анализа состоит в выделении в пространстве физико-кинетических параметров областей с определенным типом динамики. Границы этих областей могут задавать технологические ограничения, нарушение которых (например, потеря устойчивости стационарного режима) приводит к переходу к автоколебаниям или взрыву.

Детальный параметрический анализ широко используемой математической модели имеет и методическое значение, поскольку полное перечисление особенностей модели представляет общий интерес.

Рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma\dot{\vartheta} &= (1 - \eta) \exp(\vartheta/(1 + \beta\vartheta)) - \vartheta/Se, \\ \dot{\eta} &= (1 - \eta) \exp(\vartheta/(1 + \beta\vartheta)) - \eta/Da.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\vartheta$ ,  $\eta$  ( $\vartheta > 0$ ,  $0 < \eta < 1$ ) — безразмерные переменные (температура и степень превращения соответственно),  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $Da$ ,  $Se > 0$  — безразмерные параметры.

Система (1) первоначально была исследована в [4, 5]. В [6, 7] предложена схема анализа системы (1), опирающаяся на качественную теорию дифференциальных уравнений (в частности, на теорию бифуркаций), которая позволила провести более детальное и строгое по сравнению с [4, 5] исследование системы (1). Частный случай системы (1) при  $\beta = 0$  рассматривался в [8, 9].

Проведенное нами исследование, основанное на теории бифуркаций с учетом ее современного состояния, позволяет уточнить и дополнить полученные в [6, 7] результаты. В частности, показано, что система (1) дополнительно к перечисленным в [6, 7] 35 возможным фазовым портретам может иметь фазовые портреты с тремя концентрическими предельными циклами при значениях параметров, отвечающих области множественности стационарных состояний.

Следуя [6, 7], введем параметр  $\nu = Da/Se > 0$ .

Сделаем в системе (1) замену переменных:

$$x = \eta, \quad y = (1 - \eta) \exp(\vartheta/(1 + \beta\vartheta)) - \eta/\nu Se; \quad \vartheta = l_0(x, y)/(1 - \beta l_0(x, y)), \quad \eta = x,$$

где  $l_0(x, y) = \ln((x + \nu Se y)/\nu Se(1 - x))$ . Получим\*<sup>1</sup> систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{y(1 + \nu Se y)}{\nu Se(x - 1)} + \frac{x + \nu Se y}{\gamma \nu Se^2} \left( \frac{x + \nu Se y}{\nu} - \frac{l_0(x, y)}{1 - \beta l_0(x, y)} \right) (1 - \beta l_0(x, y))^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Системы (1) и (2) эквивалентны в интересующих нас областях значений фазовых переменных и параметров, однако система (2) более предпочтительна для изучения с точки зрения применяемых здесь методов.

Стационарные состояния системы (2) имеют вид  $(x_0, 0)$ , где  $x_0$  удовлетворяет условиям

$$(\nu + \beta x_0) l_0(x_0, 0) - x_0 = 0, \quad 0 < x_0 < 1. \quad (3)$$

Соответствующее стационарное состояние системы (1) имеет координаты

$$\vartheta_0 = l_0(x_0, 0)/(1 - \beta l_0(x_0, 0)) = x_0/\nu, \quad \eta_0 = x_0.$$

В [6, 7, 11] проведено исчерпывающее исследование вопроса о количестве, взаиморасположении и типах стационарных состояний системы (1). Полученные там результаты очевидным образом переносятся на случай системы (2). В зависимости от значений параметров система (2) может иметь от одного до трех стационарных состояний в конечной части фазовой плоскости. Отметим, что число стационарных состояний и их координаты не зависят от параметра  $\gamma$ . В случае трех стационарных состояний промежуточный всегда будет седлом, крайние — узлами или фокусами (устойчивыми или неустойчивыми); из последних двух, следуя [6, 7], различают нижний (левый) и верхний (правый) стационары, имея в виду значения координаты  $\eta_0(x_0)$  этих стационаров.

Множественность стационарных состояний в системе (2) имеет место при значениях параметра  $\beta$  из интервала  $(0, 1/4)$ .

Пусть  $(x_0, 0)$  — стационар системы (2). Для изучения бифуркаций этого стационара удобно сделать следующую замену переменных:  $x \mapsto x - x_0$ ,  $y \mapsto y$ . При этом стационар  $(x_0, 0)$  переходит в начало координат.

Имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{y(1 + \nu Se y)}{\nu Se(-1 + x + x_0)} + \\ &+ \frac{x + \nu Se y + x_0}{\gamma \nu Se^2} \left( \frac{x + x_0 + \nu Se y}{\nu} - \frac{l(x, y, x_0)}{1 - \beta l(x, y, x_0)} \right) (1 - \beta l(x, y, x_0))^2, \end{aligned} \quad (4)$$

\*<sup>1</sup>Здесь и ниже мы использовали пакет MATHEMATICA [10].

где  $l(x, y, x_0) = \ln((x + \nu \operatorname{Se} y + x_0)/\nu \operatorname{Se}(1 - x - x_0))$ , или, ограничиваясь достаточно малой окрестностью начала координат, имеем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots, \quad (5)$$

где

$$a_{10} \equiv (\nu - 2x_0 + 2\beta x_0 + 2x_0^2 + (\nu - 2\beta\nu + 4\beta x_0 - 2\beta^2 x_0 - \nu x_0 - 4\beta x_0^2) l_0(x_0, 0) + \\ + \beta(x_0 - 1)(\nu + 2\beta x_0^2) l_0^2(x_0, 0))/\gamma\nu^2 \operatorname{Se}^2(x_0 - 1),$$

$$a_{01} \equiv (\gamma + \nu - 2x_0 + 2\beta x_0 - \nu x_0 + 2x_0^2 - 2\beta x_0^2 + (x_0 - 1)(-\nu + 2\beta\nu - \\ - 4\beta x_0 + 2\beta^2 x_0) l_0(x_0, 0) + \beta(x_0 - 1)(\nu + 2\beta x_0) l_0^2(x_0, 0))/\gamma\nu \operatorname{Se}(x_0 - 1),$$

$$a_{20} \equiv (-\nu + 2\beta\nu + 2x_0 - 6\beta x_0 + 2\beta^2 x_0 - 4x_0^2 + 4\beta x_0^2 + 2x_0^3 + 2\beta(\nu - 2x_0 + 3\beta x_0 + \\ + 4x_0^2 - 2\beta x_0^2 - 2x_0^3) l_0(x_0, 0) + 2\beta^2 x_0(x_0 - 1)^2 l_0^2(x_0, 0))/2\gamma\nu^2 \operatorname{Se}^2 x_0(x_0 - 1)^2,$$

$$a_{11} \equiv (-\nu + 2\beta\nu + 2x_0 - 6\beta x_0 + 2\beta^2 x_0 - \gamma x_0 + \nu x_0 - 2\beta\nu x_0 - 4x_0^2 + 8\beta x_0^2 - 2\beta^2 x_0^2 + 2x_0^3 - 2\beta x_0^3 + \\ + 2\beta(x_0 - 1)(-\nu + 2x_0 - 3\beta x_0 - 2x_0^2 + \beta x_0^2) l_0(x_0, 0) + 2\beta^2 x_0(x_0 - 1)^2 l_0^2(x_0, 0))/\gamma\nu \operatorname{Se} x_0(x_0 - 1)^2$$

...

Нами получены выражения для всех коэффициентов  $a_{ij}$  ( $i + j \leq 7$ ) через  $x_0, \beta, \gamma, \nu, \operatorname{Se}$ , однако здесь они не приводятся. Отметим только, что эти выражения задают гладкие функции перечисленных аргументов при условии, что  $0 < x_0 < 1, \beta, \gamma, \nu, \operatorname{Se} > 0$ .

В терминах коэффициентов  $a_{ij}$  легко указать бифуркации стационара  $(0, 0)$  в системе (5). Так, например, бифуркация кратности (граница области множественности) задается условием  $a_{10} = 0$ , бифуркация Андронова — Хопфа — условиями  $a_{01} = 0, a_{10} < 0$ , бифуркация Богданова — Такенса — совокупностью условий  $a_{10} = a_{01} = 0$ , и т. д. (Мы опускаем здесь условия невырожденности бифуркаций.)

Соответствующие бифуркации имеют место и для стационара  $(x_0, 0)$  системы (2), а также для соответствующего стационара  $(\vartheta_0, \eta_0)$  системы (1).

Перечислим некоторые из бифуркаций, которые обнаружены в ходе исследования. Используемая нами терминология в основном заимствована из [12], там же приведены соответствующие бифуркационные диаграммы.

При описании всех бифуркаций будем предполагать выполненным равенство (3), которое является условием того, что точка  $(0, 0)$  — стационар системы (4). Это равенство можно переписать в виде

$$\operatorname{Se} = \frac{x_0}{\exp(x_0/(\beta x_0 + \nu))\nu(1 - x_0)}.$$

Бифуркация кратности задается соотношениями

$$a_{10} = 0, \quad a_{20} \neq 0.$$

С учетом (3) равенство  $a_{10} = 0$  можно записать в виде

$$\nu^2 - \nu x_0 + 2\beta\nu x_0 + \beta^2 x_0^2 + \nu x_0^2 = 0. \quad (6)$$

Как и следовало ожидать, соотношения (3), (6), задающие условия кратности стационара, не содержат параметра  $\gamma$ . Эти равенства выделяют в пространстве параметров бифуркационное множество коразмерности 1, которое допускает параметризацию

$$Se = \frac{x_0}{\exp(x_0/(\beta x_0 + \nu))\nu(1-x_0)}, \quad \hat{\rho}, \gamma, \nu > 0,$$

где  $x_0$  — корень уравнения (6) из промежутка  $(0, 1)$ .

Бифуркация Андронова — Хопфа задается соотношениями

$$\gamma\nu^2 + \nu^3 + 2\beta\gamma\nu x_0 - \nu^2 x_0 + 2\beta\nu^2 x_0 - \nu^3 x_0 + \beta^2\gamma x_0^2 + \beta^2\nu x_0^2 + \nu^2 x_0^2 - 2\beta\nu^2 x_0^2 - \beta^2\nu x_0^3 = 0, \quad (7)$$

$$(\nu^2 - \nu x_0 + 2\beta\nu x_0 + \beta^2 x_0^2 + \nu x_0^2)(\nu^2 - \nu x_0 + 2\beta\nu x_0 + \beta^2 x_0^2) < 0, \quad (8)$$

$$l_1 \equiv a_{11}a_{20} - a_{10}a_{02}a_{11} - a_{10}a_{21} + 3a_{10}^2a_{03} \neq 0. \quad (9)$$

Равенство (7) следует из условия  $a_{01} = 0$ . Неравенство (8) равносильно неравенству  $a_{10} < 0$  и означает, что рассматриваемый стационар является сложным фокусом (с чисто мнимыми собственными числами). Условие (9) влечет за собой то обстоятельство, что кратность этого фокуса равна 1. (Здесь и далее  $l_k$  —  $k$ -я ляпуновская величина сложного фокуса.)

Условия (3), (7), (8) выделяют в пространстве параметров бифуркационное множество коразмерности 1. Это множество допускает параметризацию

$$Se = \frac{x_0}{\exp(x_0/(\beta x_0 + \nu))\nu(1-x_0)}, \quad \gamma = \frac{\nu(x_0 - 1)(\nu^2 - \nu x_0 + 2\beta\nu x_0 + \beta^2 x_0^2)}{(\nu + \beta x_0)^2}, \quad \beta, \nu > 0,$$

где  $x_0$  удовлетворяет условию (8) и  $0 < x_0 < 1$ .

Как уже отмечалось, условия  $a_{10} = a_{01} = 0$  (вместе с равенством (3)) выделяют в пространстве параметров бифуркационное множество коразмерности 2, отвечающее бифуркации «двукратное нейтральное равновесие» (бифуркация Богданова — Такенса). Условие невырожденности данной бифуркации является неравенство  $a_{11}a_{20} \neq 0$ . Строение параметрической окрестности этого вырождения хорошо известно.

Выполнение условий (7), (8) совместно с равенством  $l_1 = 0$  влечет за собой наличие в системе сложного фокуса, кратность которого больше 1. Если кратность этого фокуса равна 2 ( $l_2 \neq 0$ ), мы имеем дело с бифуркацией коразмерности 2 «нуль первой ляпуновской величины». Соответствующие точки в пространстве параметров являются граничными для бифуркационной поверхности коразмерности 1, отвечающей наличию в системе двукратного цикла.

Условия  $a_{10} = a_{01} = a_{11} = 0$  вместе с равенством (3) выделяют в пространстве параметров одномерное бифуркационное многообразие  $M_0$ , отвечающее бифуркации коразмерности 3 «двукратное нейтральное равновесие с дополнительным вырождением». Условие  $a_{20}l_2^1 \neq 0$ ,  $l_2^0 \equiv a_{02}a_{20}a_{21} - 3a_{03}a_{20}^2 + a_{20}a_{31} - a_{21}a_{30}$ , является условием невырожденности этой бифуркации.

Можно показать [13], что при выполнении условий  $a_{10} = a_{01} = a_{11} = 0$ ,  $a_{20} \neq 0$ ,  $l_2^0 = 0$  в любой сколь угодно малой окрестности соответствующей параметрической точки существуют значения параметров, при которых система имеет фокус кратности 3.

Проведенные исследования показали, что  $a_{20} \neq 0$  во всех точках многообразия  $M_0$ .

Исследуя поведение величины  $i_2^0$  в точках многообразия  $M_0$ , мы установили, что  $i_2^0 = 0$  при значениях параметров  $\beta = \beta^* \approx 0,0764987$ ,  $\gamma = \gamma^* \approx 0,0834939$ ,  $\nu = \nu^* \approx 0,157978$ ,  $Se = Se^* \approx 0,494461$ . При этом  $i_2^0 < 0$  в точках многообразия  $M_0$  при  $\beta > \beta^*$  и  $l_2^0 > 0$  в точках многообразия  $M_0$  при  $\beta < \beta^*$ .

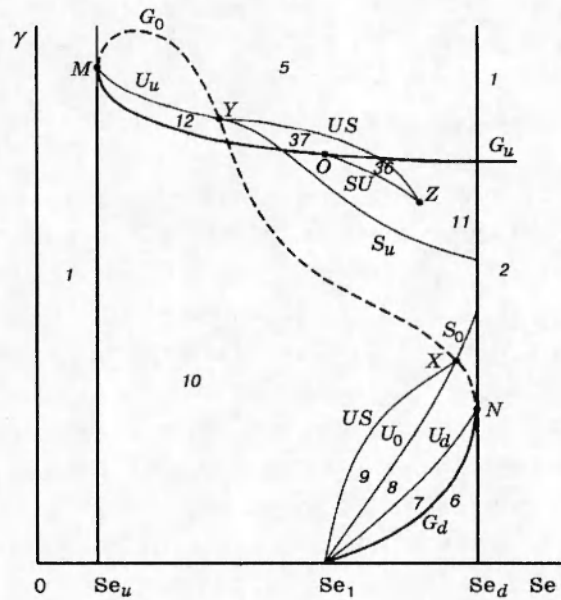


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма систем (1), (2), (4)

Таким образом, в пространстве параметров системы (4) существует непустое одномерное бифуркационное многообразие коразмерности 3 «нуль второй ляпуновской величины», отвечающее наличию в системе сложного фокуса кратности 3.<sup>\*2</sup> Это многообразие существует при  $\beta > \beta^*$ , точка  $(\beta^*, \gamma^*, \nu^*, Se^*)$  является его концевой точкой. Многообразие имеет непустое пересечение с областью множественности в окрестности точки  $(\beta^*, \gamma^*, \nu^*, Se^*)$ . Трехкратный фокус устойчив в точках этого многообразия, расположенных вблизи множества  $M_0$ . в этих точках  $l_3 < 0$ .

Известно, что в пространстве параметров к точкам, отвечающим нулю второй ляпуновской величины, примыкает область значений параметров, при которых система имеет три concentрических предельных цикла вокруг стационарного состояния.

Таким образом, мы доказали, что существуют значения параметров, которым отвечают фазовые портреты системы (4), где имеются три стационарных состояния и три concentрических предельных цикла вокруг одного из них, при этом два из этих циклов устойчивы.

На рис. 1 приведена полная бифуркационная диаграмма системы (4) в плоскости  $Se, \gamma$  при соответствующим образом фиксированных значениях параметров  $\beta, \nu^{*3}$ . Эта диаграмма годится также для систем (1), (2).

Диаграмма, представленная на рис. 1, довольно типична и, в частности, имеет общие черты с приведенными в [6, 7]. Мы сохраняем введенные в [6, 7] обозначения и ограничимся лишь краткими пояснениями по поводу интересующих нас элементов бифуркационной диаграммы.

Область множественности представляет собой вертикальную полосу, ограниченную осью абсцисс  $\gamma = 0$  и двумя прямыми  $Se = Se_u, Se = Se_d$ . Прямые отвечают бифуркации кратности:  $Se = Se_u$  — кратности правого стационара,  $Se = Se_d$  — левого стационара.

<sup>\*2</sup>В [6, 7] ошибочно утверждалось, что кратность сложного фокуса системы (1) не превосходит 2. Возможность существования сложного фокуса кратности 3 в системе (1) доказана также в [14].

<sup>\*3</sup>В численных расчетах использованы значения  $\beta = 0,1, \nu = 0,1339$ .

Ветви  $G_u$ ,  $G_d$ ,  $G_0$  образуют линию  $G$ . Ветвь  $G_u$  определяет границу области устойчивости правого стационара и отвечает его бифуркации Андронова — Хопфа. Ветвь  $G_d$  определяет границу области устойчивости левого стационара и отвечает его бифуркации Андронова — Хопфа. Ветвь  $G_0$  (штриховая линия на рис. 1) отвечает седлу с равной нулю суммой собственных чисел.

Точки  $M$ ,  $N$  отвечают бифуркации «двукратное нейтральное равновесие».

Точка  $O$  на линии  $G_u$  отвечает сложному фокусу с равной нулю первой ляпуновской величиной  $l_1$ ; при этом  $l_1$  положительна в точках линии  $G_u$ , расположенных левее точки  $O$ , и отрицательна в точках линии  $G_u$ , расположенных правее  $O$ . Вторая ляпуновская величина  $l_2$  положительна в точке  $O$ . Точка  $O$  является концевой для линии  $SU$  кратных циклов, устойчивых изнутри.

Точки объединения линий  $U_u$ ,  $S_u$  отвечают петле сепаратрисы седла вокруг правого состояния равновесия. На линии  $U_u$  эта петля неустойчивая, на линии  $S_u$  — устойчивая. Левая концевая точка линии петли сепаратрисы совпадает с точкой  $M$ , как это предписывается теорией бифуркаций. Точка  $Y$  отвечает петле сепаратрисы седла с нулевой седловой величиной и является концевой для линии  $US$  кратных циклов, устойчивых снаружи. Наличие точки  $Y$  на бифуркационной диаграмме следует из результатов анализа бифуркации «двукратное нейтральное равновесие с дополнительным вырождением» применительно к нашему случаю.

Линии  $SU$ ,  $US$  сливаются в точке  $Z$ , отвечающей трехкратному циклу системы (4). Точка  $Z$  лежит на границе области значений параметров, при которых система (4) имеет три концентрических предельных цикла вокруг правого стационара.

Обозначения и смысл остальных приведенных на рисунке элементов бифуркационной диаграммы достаточно ясны и, кроме того, полностью совпадают с таковыми, приведенными в [6, 7], поэтому мы опускаем их описание.

Как обычно, на рисунке указано лишь взаиморасположение бифуркационных множеств без соблюдения масштаба. Изображение этих множеств в реальном масштабе наталкивается на трудности технического характера, поскольку некоторые из них расположены чрезвычайно близко друг к другу.

Множества локальных бифуркаций (кратность, нейтральность и т. д.) могут быть описаны явными формулами (см. выше). Поэтому их построение не вызывает трудностей. Что касается множеств нелокальных бифуркаций (петли сепаратрис, кратные циклы и т. д.), то при их построении мы руководствовались общими результатами теории бифуркаций и результатами численных экспериментов.

Существенным отличием нашей бифуркационной диаграммы от диаграммы, полученной в [6, 7], является наличие на ней областей 36, 37. Области типа 36, 37 и соответствующие фазовые портреты не были обнаружены в [6, 7]. Причиной этому послужил, в частности, неправильно проведенный анализ поведения второй ляпуновской величины.

Схемы фазовых портретов системы (4), отвечающих областям 36, 37, изображены на рис. 2. Мы не приводим здесь схемы фазовых портретов, отвечающих остальным параметрическим областям, изображенным на бифуркационной диаграмме, поскольку, с одной стороны, эти схемы приведены в [6, 7], а с другой стороны, при желании легко могут быть восстановлены на основе содержащейся в бифуркационной диаграмме информации.

На рис. 3 изображен фазовый портрет системы (1) при значениях параметров  $\beta = 0,1$ ,  $\gamma = 0,06497764691$ ,  $Da = 0,0661456149$ ,  $Se = 0,4939926431$ . Эти значения отвечают области 36. На рис. 4 в увеличенном масштабе изображен фрагмент фазового портрета, содержащий три предельных цикла вокруг верхнего стационара.

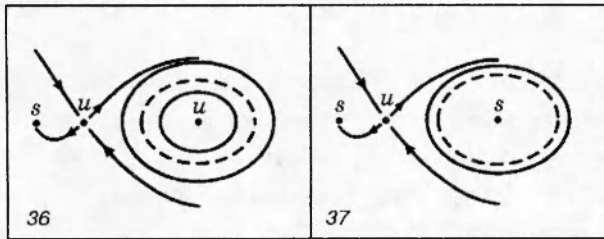


Рис. 2. Схемы фазовых портретов системы (4) при значениях параметров из областей 36, 37 бифуркационной диаграммы

Изображенные на рис. 3, 4 траектории системы (1) порождены соответствующими траекториями системы (4). Для значений параметров из области 36 сепаратрисы седла, огибающие правый стационар, и подходящий отрезок оси  $Ox$  образуют  $\omega$ -инвариантный мешок Бендиксона для траекторий системы (4). В силу этого мы можем определить отображение Пуанкаре отрезка, соединяющего седло и правый стационар, в себя.

Приведенные значения параметров отвечают точке в пространстве параметров  $\beta, \gamma, \nu, Se$ , расположенной внутри области 36 в непосредственной близости от бифуркационных множеств  $G_u, US, SU, S_u, O$ . Вследствие этого введенное отображение Пуанкаре близко к тождественному. Мы исследовали это отображение численно и показали, что оно имеет внутри рассматриваемого отрезка три неподвижные точки. Этот факт подтверждает наличие трех предельных циклов вокруг правого стационара в системе (4) при выбранных значениях параметров.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Область 36 естественным образом обнаруживается в ходе полного параметрического анализа системы (4), поскольку, как отмечалось выше, граница этой области содержит непустое многообразие коразмерности 3, отвечающее локальной бифуркации «нуль второй ляпуновской величины». Мы провели такой анализ, однако изложение его

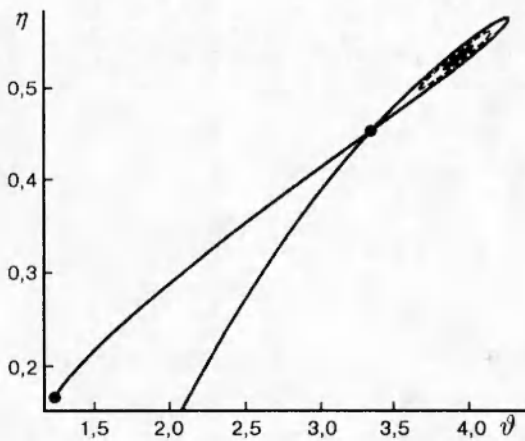


Рис. 3

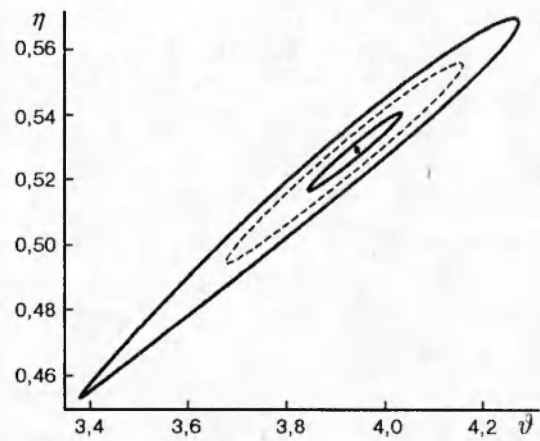


Рис. 4

Рис. 3. Траектории системы (1) при значениях параметров из области 36 бифуркационной диаграммы:

$$\beta = 0,1, \gamma = 0,06497764691, Da = 0,0661456149, Se = 0,4939926431$$

Рис. 4. Траектории периодических решений системы (1) при значениях параметров из области 36 бифуркационной диаграммы:

$$\beta = 0,1, \gamma = 0,06497764691, Da = 0,0661456149, Se = 0,4939926431$$

результатов выходит за рамки настоящей статьи и будет представлено в последующих работах.

Итак, в результате проведенного исследования базовой модели теории горения расширен список возможных фазовых портретов системы (1), перечисленных в [6, 7]: их не 35, а, по крайней мере, не менее 37. В том числе возможен фазовый портрет, характеризующийся двумя устойчивыми предельными циклами вокруг высокотемпературного стационарного состояния, что представляет несомненный интерес с технологической точки зрения. Применение современных методов теории бифуркаций позволило более корректно по сравнению с [6, 7] описать перестройки бифуркационных диаграмм рассмотренной системы и дает основание надеяться на существенное продвижение в детальном параметрическом анализе классической модели.

Авторы выражают глубокую благодарность фирме Wolfram Research за то, что она безвозмездно передала в распоряжение Сибирского общества содействия науке и образованию пакет МАТНЕМАТИСА, а также Американскому математическому обществу и Г. Д. Ковалевой за их содействие в этой передаче.

Авторы признательны В. К. Рябинину за содержательные замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01631).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Математическая** теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович и др. М.: Наука, 1980.
2. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
3. **Абрамов В. Г., Мержанов А. Г.** Нестационарные процессы в проточных реакторах идеального смешения // Теоретические основы химической технологии. 1975. Т. 9. С. 863–874.
4. **Uppal A., Ray W. H., Poore A. B.** On the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors // Chem. Eng. Sci. 1974. V. 29, N 4. P. 967–985.
5. **Uppal A., Ray W. H., Poore A. B.** The classification of the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors — influence of reactor resident time // Chem. Eng. Sci. 1976. V. 31, N 3. P. 205–214.
6. **Ваганов Д. А., Абрамов В. Г., Самойленко Н. Г.** Определение областей существования колебательных процессов в реакторах идеального смешения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 3. С. 640–643.
7. **Vaganov D. A., Samoilenko N. G., Abramov V. G.** Periodic regimes of continuous stirred tank reactors // Chem. Eng. Sci. 1978. V. 33, N 5. P. 1133–1140.
8. **Pismen L. M.** Dynamics of lumped chemically reacting systems near singular bifurcation points // Chem. Eng. Sci. 1984. V. 39, N 6. P. 1063–1077.
9. **Pismen L. M.** Dynamics of lumped chemically reacting systems near singular bifurcation points — II. Almost Hamiltonian dynamics // Chem. Eng. Sci. 1985. V. 40, № 6. P. 905–916.
10. **Wolfram Research, Inc.** Mathematica. Version 2.2. Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 1994.
11. **Быков В. И., Пушкарева Т. П.** Параметрические портреты локальных бифуркаций в модели реактора идеального смешения // Эволюционное моделирование и кинетика: Сб. науч. тр. Новосибирск: Наука, 1992. С. 93–104.



12. Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И. Портреты бифуркаций. М.: Знание, 1989.
13. Волокитин Е. П., Тресков С. А. О поведении ляпуновских величин сложного фокуса для систем, близких к системе с нильпотентной линейной частью // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 31, № 10. С. 1704–1707.
14. Шеплев В. С., Слинько М. Г. Периодические режимы в проточном реакторе смешения // XIII Международная конф. по химическим реакторам ХИМРЕАКТОР-13: Тез. докл. Ч. II. Новосибирск, 1996. С. 53–59.

*Поступила в редакцию 30/VII 1996 г.*

---