

**О ВОЗНИКНОВЕНИИ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА  
МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИМИ  
ЦИЛИНДРАМИ**

*В. Г. Бабский, И. Л. Скловская, Ю. Б. Скловский*

(Харьков)

В линейной постановке исследуется устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости между эксцентрическими цилиндрами, внутренний из которых вращается, наружный неподвижен. Рассмотрен случай узкого зазора между цилиндрами, характерный для задач теории смазки. Основное течение, возмущения и критическое число Рейнольдса найдены в виде разложений по степеням эксцентриситета  $\varepsilon$  с точностью до  $O(\varepsilon^3)$ . Полученные результаты согласуются с известными экспериментальными данными для  $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$  и подтверждают стабилизирующее влияние эксцентриситета.

Экспериментальные работы [1-5] показывают, что при потере устойчивости течения Куэтта между вращающимися эксцентрическими цилиндрами возникает вторичное течение типа вихрей Тейлора. Попытки анализа этого явления методом «локальной устойчивости», т. е. исследования на устойчивость профилей скорости в различных сечениях зазора между цилиндрами, привели к противоречивым результатам [6-8].

С точки зрения расчета подшипников скольжения представляют интерес малые значения зазора  $\psi$  между цилиндрами ( $\psi = (R_2 - R_1) / R_2$ ,  $R_1, R_2$  — радиусы цилиндров). Записав уравнения движения вязкой жидкости в биполярной системе координат и оставив в них члены старшего порядка относительно  $\psi$ , получим следующую систему уравнений, подробный вывод которой приведен в [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - h^2 \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= \text{Re}^* h \left( hV \frac{\partial V}{\partial \varphi} - U \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (hV) = 0 \quad (h = 1 + \varepsilon \cos \varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) компоненты скорости  $V, U$  отнесены к  $\omega R_1$  ( $\omega$  — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра), давление  $P$  — к  $\rho \omega^2 R_1^2 \text{Re}^{*-1}$  ( $\text{Re}^* = \text{Re} \psi$ ,  $\text{Re} = \omega R_1 (R_2 - R_1) / \nu$  — число Рейнольдса,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — вязкость жидкости).

Граничные условия для системы (1) имеют вид

$$V(0, \varphi) = U(0, \varphi) = U(1, \varphi) = 0, \quad V(1, \varphi) = 1 \quad (2)$$

Координата  $y$  отсчитывается от наружного цилиндра и на поверхности внутреннего равна 1. Для функций  $U, V$  и  $P$  должны также выполняться условия периодичности по  $\varphi$ .

Исследование устойчивости течения ( $V, U$ ) методом малых возмущений сводится к задаче на собственные значения относительно числа  $\text{Re}$  [7]

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 h^2 \right)^2 u &= 2k^2 \text{Re}^* h^2 \left\{ Vv + \frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial y} (Uu) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{V}{2h} \frac{\partial}{\partial \varphi} (hu) + \frac{1}{2k^2 h^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ hV \frac{\partial}{\partial \varphi} - U \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 h^2 \right) v &= -\text{Re} h \frac{\partial V}{\partial y} u, \quad u = \frac{\partial u}{\partial y} = v = 0 \quad (y = 0, 1) \end{aligned} \quad (3)$$

с условиями периодичности по  $\varphi$  для  $u, v, p$ .

Здесь  $u, v$  — компоненты скорости возмущения,  $k$  — волновое число. Рассматривается класс возмущений, соответствующий наблюдаемым вихрям Тейлора, т. е. возмущения, которые при  $\varepsilon = 0$  переходят во вращательно-симметричные. Так же как для случая концентрических цилиндров, постулируется «принцип изменения устойчивости».

Задача (1), (2) при исследовании устойчивости является вспомогательной, хотя она представляет самостоятельный интерес (см. [9-12]). Решение этой задачи будем искать в виде рядов по степеням  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots, & V &= V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots \\ P &= P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Сходимость этих рядов при достаточно малых  $\varepsilon$  следует из результатов работы [13].

Подставляя (4) в (1), (2), получим

$$V_0 = y, \quad U_0 \equiv 0, \quad P_0 \equiv \text{const} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} - \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} &= \text{Re}^* \left( y \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} - U_1 \right), & \frac{\partial P_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + y \sin \varphi &= 0, & U_1 = V_1 &= 0 \quad (y=0, 1) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} - \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} &= \text{Re}^* \left( y \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - U_2 \right) + 2 \cos \varphi \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \\ &+ \text{Re}^* \left[ V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + U_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + \cos \varphi \left( 2y \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} - U_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_1 \cos \varphi) = 0, \quad U_2 = V_2 = 0 \quad (y=0, 1)$$

Представляя решения задач (6), (7) в виде рядов Фурье по  $\varphi$ , убеждаемся, что они имеют вид

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{11}(y) \sin \varphi + V_{12}(y) \cos \varphi \\ U_1 &= U_{11}(y) \sin \varphi + U_{12}(y) \cos \varphi \\ P_1 &= P_{11} \sin \varphi + P_{12} \cos \varphi \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= V_{20}(y) + V_{21}(y) \sin 2\varphi + V_{22}(y) \cos 2\varphi \\ U_2 &= U_{21}(y) \sin 2\varphi + U_{22}(y) \cos 2\varphi \\ P_2 &= P_{20} + P_{21} \sin 2\varphi + P_{22} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

Задача (6) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{U}_{11}^{IV} + \text{Re}^* y U_{12}'' &= 0, & \bar{U}_{11}(0) &= \bar{U}_{11}'(0) = \bar{U}_{11}(1) = U_{11}'(1) = 0 \\ U_{12}^{IV} - \text{Re}^* y \bar{U}_{11}'' &= \text{Re}^* (4y - 6y^2), & U_{12}(0) &= U_{12}'(0) = U_{12}(1) = \\ &= U_{12}'(1) = 0 \\ V_{11} &= U_{12}', & V_{12} &= -y - U_{11}' \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\bar{U}_{11} = U_{11} - y^2(1 - y) \quad (11)$$

Аналогично задача (7) приводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} U_{21}^{IV} + 2\text{Re}^* y U_{22}'' &= F_1, & U_{21}(0) &= U_{21}'(0) = U_{21}(1) = U_{21}'(1) = 0 \\ U_{22}^{IV} - 2\text{Re}^* y U_{21}'' &= F_2, & U_{22}(0) &= U_{22}'(0) = U_{22}(1) = U_{22}'(1) = 0 \\ V_{21} &= 1/2 (U_{22}' - V_{11}), & V_{22} &= -1/2 (U_{21}' + V_{12}) \\ V_{20} &= 1/2 \text{Re}^* (U_{11} V_{11}' + U_{12} V_{12}' + U_{12} + 2y V_{11}) + V_{12}''(0), & V_{20}(0) &= \\ &= V_{20}(1) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= \operatorname{Re}^* [U_{12}V_{12}'' + U_{12}'V_{12}' + U_{11}V_{11}'' + U_{11}'V_{11}' + U_{12}' - \\ &\quad - 2V_{11}V_{12}' - 2V_{11}'V_{12} - yV_{11}'] \\ F_2 &= \operatorname{Re}^* [2V_{11}V_{11}' - 2V_{12}V_{12}' - U_{11}V_{12}'' - U_{11}'V_{12}' - \\ &\quad - U_{12}V_{11}'' - U_{12}'V_{11}' - U_{11}' - yV_{12}' + y] \end{aligned} \quad (13)$$

Для решения задач (10) и (12) был применен метод моментов [14] (один из вариантов метода Петрова — Галеркина). Решение разыскивалось в виде

$$\begin{aligned} U_{11,n} &= y^2(1-y)^2 \sum_{k=0}^n A_k y^k, & U_{12,n} &= y^2(1-y)^2 \sum_{k=0}^n B_k y^k \\ U_{21,n} &= y^2(1-y)^2 \sum_{k=0}^n a_k y^k, & U_{22,n} &= y^2(1-y)^2 \sum_{k=0}^n b_k y^k \end{aligned} \quad (14)$$

Постоянные  $A_k, B_k, a_k, b_k$  определялись из систем уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\bar{U}_{11,n}^{IV} + \operatorname{Re}^* y U_{12,n}'') y^k dy &= 0 \\ \int_0^1 (U_{12,n}^{IV} - \operatorname{Re}^* y \bar{U}_{11,n}'') y^k dy &= 6 \operatorname{Re}^* / (3+k) \quad (k=0, 1, \dots, n) \\ \int_0^1 (U_{21,n}^{IV} + 2 \operatorname{Re}^* y U_{22,n}'') y^k dy &= \int_0^1 F_1 y^k dy \\ \int_0^1 (U_{22,n}^{IV} - 2 \operatorname{Re}^* y U_{21,n}'') y^k dy &= \int_0^1 F_2 y^k dy \end{aligned} \quad (15)$$

Решение алгебраических систем уравнений (15) и (16) для различных  $\operatorname{Re}^*$  осуществлялось на ЭЦВМ М-20 при различных  $n$  до достижения требуемой точности. Как правило, практическая сходимость наблюдалась при  $n=9$ .

При решении задачи устойчивости (3) собственное число  $\operatorname{Re}$  и соответствующие ему собственные функции  $u, v$  для достаточно малых эксцентриситетов могут быть представлены в виде рядов по степеням  $\varepsilon$

$$\operatorname{Re} = \operatorname{Re}_0 + \varepsilon \operatorname{Re}_1 + \varepsilon^2 \operatorname{Re}_2 + \dots \quad (17)$$

$$u(y, \varphi) = u_0(y) + \varepsilon u_1(y, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(y, \varphi) + \dots$$

$$v(y, \varphi) = v_0(y) + \varepsilon v_1(y, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(y, \varphi) + \dots \quad (18)$$

Подстановка разложений (4), (17) и (18) в (3) приводит к следующим рекуррентным задачам:

$$\begin{aligned} (d^2 / dy^2 - k^2) u_0 - 2k^2 \operatorname{Re}^* y v_0 &= 0, & u_0 &= du_0 / dy = 0 \quad (y=0, 1) \\ (d^2 / dy^2 - k^2) v_0 + \operatorname{Re}_0 u_0 &= 0, & v_0 &= 0 \quad (y=0, 1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right)^2 - \operatorname{Re}^* \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} - k^2 y \right) \right] u_1 - 2k^2 \operatorname{Re}^* y v_1 &= \\ = 4k^2 \cos \varphi \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) u_0 + \operatorname{Re}^* \left( y \frac{d^2 u_0}{dy^2} \sin \varphi + \frac{du_0}{dy} \sin \varphi - \right. \\ - U_1 \frac{d^3 u_0}{dy^3} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \frac{d^2 u_0}{dy^2} + k^2 u_0 \frac{\partial U_1}{\partial y} + k^2 \frac{du_0}{dy} U_1 + \\ \left. + k^2 u_0 y \sin \varphi + 2k^2 v_0 V_1 + 8k^2 v_0 y \cos \varphi \right) \equiv \Phi_{11} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right)v_1 + \operatorname{Re}_0 u_1 &= 2k^2 v_0 \cos \varphi - \operatorname{Re}_0 u_0 \left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \cos \varphi\right) - \\ &- \operatorname{Re}_1 u_0 \equiv \Phi_{12}, \quad u_1 = \partial u_1 / \partial y = v_1 = 0 \quad (y = 0, 1) \\ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right)^2 - \operatorname{Re}^* \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} - k^2 y\right)\right] u_2 - 2k^2 \operatorname{Re}^* y v_2 &= \Phi_{21} \\ (\partial^2 / \partial y^2 - k^2) v_2 + \operatorname{Re}_0 u_2 &= \Phi_{22}, \quad u_2 = \partial u_2 / \partial y = v_2 = 0 \quad (y = 0, 1) \end{aligned} \quad (21)$$

Функции  $u_1$ ,  $v_1$  и  $u_2$ ,  $v_2$  должны также удовлетворять условиям периодичности по  $\varphi$ . Выражения для  $\Phi_{21}$  и  $\Phi_{22}$  не приводятся из-за громоздкости.

Задача (19) соответствует случаю вращающихся концентрических цилиндров, и решение ее известно (см., например, [15]).

Для разрешимости задач (20) и (21) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (\Phi_{11} u_0^* + \Phi_{12} v_0^*) dy d\varphi = 0 \quad (22)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (\Phi_{21} u_0^* + \Phi_{22} v_0^*) dy d\varphi = 0 \quad (23)$$

Здесь  $u_0^*$  и  $v_0^*$  — решения сопряженной задачи

$$\begin{aligned} (d^2 / dy^2 - k^2) u_0^* + \operatorname{Re}_0 v_0^* &= 0, \quad u_0^* = du_0^* / dy = 0 \quad (y = 0, 1) \\ (d^2 / dy^2 - k^2) v_0^* - 2k^2 \operatorname{Re}^* y u_0^* &= 0, \quad v_0^* = 0 \quad (y = 0, 1) \end{aligned} \quad (24)$$

Из условия (22) после подстановки в  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{12}$  представлений (8) следует, что

$$\operatorname{Re}_1 = 0$$

Обозначим  $T_0 = 2\operatorname{Re}_0^2 \psi$  — число Тейлора для задачи о вращающихся концентрических цилиндрах. Если искать  $u_0$ ,  $v_0$  в виде

$$u_{0n} = y^2 (1 - y)^2 \sum_{k=0}^n C_k y^k, \quad v_{0n} = (2k^2 \operatorname{Re}^*)^{-1} y (1 - y) \sum_{k=0}^n D_k y^k \quad (25)$$

то уравнения метода моментов в применении к задаче (19) позволяют определить наименьшее собственное значение  $T_0$  как функцию волнового числа  $k$ , причем  $T_{0 \min} = 3389.9$  при  $k = 3.13$  для  $n = 6$ . Определяются также соответствующие собственные функции согласно (25) и аналогично собственные функции сопряженной задачи (24).

Полагая в (20)  $\operatorname{Re}_1 = 0$  и зная  $u_0$ ,  $v_0$ , определим функции  $u_1$ ,  $v_1$ , разложение которых в ряд Фурье имеет вид

$$u_1 = u_{11}(y) \sin \varphi + u_{12}(y) \cos \varphi, \quad v_1 = v_{11}(y) \sin \varphi + v_{12}(y) \cos \varphi \quad (26)$$

Подстановка (26) в (20) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^2 u_{11} + \operatorname{Re}^* \left(y \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} - k^2 y\right) u_{12} - 2k^2 \operatorname{Re}^* y v_{11} &= \\ = \operatorname{Re}^* \left( \int_{11} \frac{d^3 u_0}{dy^3} - \frac{dU_{11}}{dy} \frac{d^2 u_0}{dy^2} + y \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \frac{du_0}{dy} + \right. \\ \left. + k^2 u_0 \frac{dU_{11}}{dy} + k^2 \frac{du_0}{dy} U_{11} + k^2 y u_0 + \frac{1}{\operatorname{Re}^*} V_{11} v_0 \right) \end{aligned}$$

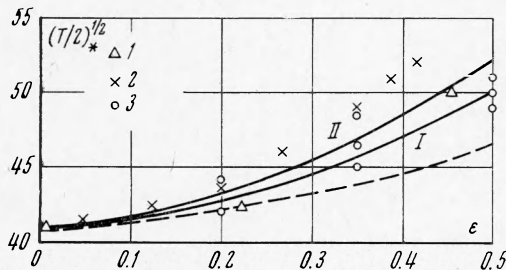
$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 u_{12} - \text{Re}^* \left( y \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} - k^2 y \right) u_{11} - 2k^2 \text{Re}^* y v_{12} = \\
 & = 4k^2 \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) u_0 + \text{Re}^* \left( -U_{12} \frac{d^3 u_0}{dy^3} - \frac{dU_{12}}{dy} \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \right. \\
 & \quad \left. + k^2 u_0 \frac{dU_{12}}{dy} + k^2 \frac{du_0}{dy} U_{12} + \frac{1}{\text{Re}^*} V_{12} v_0 + \frac{4}{\text{Re}^*} y v_0 \right) \quad (27) \\
 & \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) v_{11} + \frac{T_0}{2 \text{Re}^*} u_{11} = - \frac{T_0}{2 \text{Re}^*} u_0 \frac{dV_{11}}{dy} \\
 & \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) v_{12} + \frac{T_0}{2 \text{Re}^*} u_{12} = \frac{1}{\text{Re}^*} v_0 - \frac{T_0}{2 \text{Re}^*} u_0 \left( \frac{dV_{12}}{dy} + 1 \right) \\
 & u_{11}(0) = u_{11}(1) = du_{11}/dy(0) = du_{11}/dy(1) = 0 \\
 & u_{12}(0) = u_{12}(1) = du_{12}/dy(0) = du_{12}/dy(1) = 0 \\
 & v_{11}(0) = v_{11}(1) = v_{12}(0) = v_{12}(1) = 0
 \end{aligned}$$

Функции  $u_{11}$ ,  $u_{12}$ ,  $v_{11}$ ,  $v_{12}$  определялись описанным выше способом моментов при фиксированных значениях  $k$  и  $\text{Re}^*$ . Затем для тех же значений  $k$  и  $\text{Re}^*$  решения задач (19) и (20) подставлялись в выражения для  $\Phi_{21}$  и  $\Phi_{22}$  в условии разрешимости (23), откуда вычислялось значение  $\text{Re}_2(k, \text{Re}^*)$ .

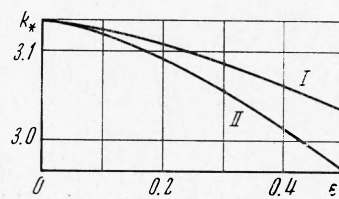
Полученные результаты приводились к виду

$$(T/2)^{1/2} = \text{Re} \psi^{1/2} = (T_0/2 + \varepsilon^2 \text{Re}_2 \text{Re}^* + \dots)^{1/2} \quad (28)$$

Для фиксированных значений  $\text{Re}^*$  и  $\varepsilon$  из интервалов  $0.1 \leq \text{Re}^* \leq 9$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$  определялась величина  $(T/2)_*^{1/2} = \min_k (T/2)^{1/2}$  и соответствующее критическое волновое число  $k_*$ . Эти результаты вместе с известными экспериментальными данными представлены на фиг. 1, 2 ( $I - \text{Re}^* = 0.1$ ,  $II - \text{Re}^* = 9$ ,  $1 - \psi = 0.08$  [1],  $2 - \psi = 0.045$  [3],  $3 - \psi = 0.01$  [2]). Не приведенные здесь расчетные кривые для  $0.1 < \text{Re}^* < 9$  располагаются на обоих графиках между кривыми  $I$  и  $II$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, из линейной теории устойчивости следует, что при относительно малых эксцентриситетах имеется тенденция к уменьшению  $k_*$  с ростом  $\varepsilon$ , а критическое число Тейлора монотонно возрастает с увеличением эксцентриситета. При этом увеличение модифицированного числа Рейнольдса  $\text{Re}^*$  (равносильное росту относительного зазора  $\psi$ ) способствует усилению каждого из этих эффектов.

Подобные результаты были получены недавно другим способом и при дополнительных предположениях (в частности, волновое число  $k$  принимало фиксированное значение  $k = 3.127$ ) Р. Диприма и Дж. Стюартом [16, 17]. Они приведены для сравнения на фиг. 1 (пунктирная линия).

Авторы благодарны Н. П. Артеменко, А. Д. Мышкису и Р. Диприма за полезное обсуждение задачи.

Поступила 8 XII 1972

