

ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

И. В. Немчинов, А. С. Фонарев

(Москва)

Рассматривается течение вязкого теплопроводного газа между двумя параллельными пластинами (течение Куэтта) с учетом переноса тепла излучением. Простая структура такого течения позволяет легко выяснить характер передачи тепла при учете излучения, вид и число граничных условий при наличии и отсутствии молекулярного переноса тепла и вязкости.

§ 1. Запишем уравнения движения, энергии, лучистого и молекулярного переноса тепла для случая, когда вязкая жидкость течет между двумя бесконечными параллельными пластинами, расстояние между которыми равно h , причем одна из пластин неподвижна, а другая движется со скоростью v_∞ относительно первой. Это простейшее течение (течение Куэтта) хорошо исследовано без учета лучистого переноса тепла [1].

Считая, что все величины изменяются только вдоль оси (направление, перпендикулярное пластинам) и направляя скорость течения по оси x , получим из уравнений движения Навье — Стокса

$$\frac{d}{dz} \left(\mu \frac{du}{dz} \right) = 0, \quad p = p_0 = \text{const} \quad (1.1)$$

где u — скорость газа, $\mu(T, p_0)$ — вязкость, T — температура, p — давление, а из уравнения энергии получим

$$\frac{dq}{dz} = \mu \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \quad (1.2)$$

где q — полный поток тепла, складывающийся из обычного, т. е. молекулярного (атомарного, ионного, электронного) переноса тепла q_m , осуществляющегося путем взаимодействия частиц газа, и лучистого потока тепла q_r

$$q = q_m + q_r$$

причем молекулярный поток тепла в случае термодинамического равновесия определяется обычным образом:

$$q_m = -k dT / dz \quad (1.3)$$

где $k(T, p_0)$ — коэффициент теплопроводности.

Лучистый поток тепла получается интегрированием интенсивности излучения

$$q_r = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(s) s d\omega$$

где s — единичный вектор, направленный вдоль луча, $d\omega$ — бесконечно-малый телесный угол с осью s , а интенсивность излучения частоты ν удовлетворяет уравнению переноса [2]

$$dI_\nu / ds = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu \quad (1.4)$$

где s отсчитывается вдоль луча, составляющего угол ϑ с направлением оси z , j_ν — интенсивность испускания частоты ν и κ_ν — коэффициент поглощения частоты ν .

Уравнение для потока тепла можно получить, проведя осреднение интенсивности по углам в двух полусферах $0 \leq \vartheta \leq 1/2 \pi$ и $1/2 \pi \leq \vartheta \leq \pi$ и по частотам $0 \leq \nu < \infty$ и предполагая локальное термодинамическое равновесие; в результате получим

$$\alpha^2 l(T) \frac{d}{dz} \left(l(T) \frac{dq_r}{dz} \right) = q_r + 2\alpha l(T) \frac{dB}{dz} \quad (B(T) = \sigma T^4) \quad (1.5)$$

Здесь $l(T)$ — средний пробег излучения, причем σ — константа в законе Стефана — Больцмана, величина α ($1/2 \leq \alpha \leq 1$ в зависимости от изотропности $I(\vartheta)$) возникает при осреднении по углам. Обсуждение уравнения переноса (1.4) и осредненного уравнения для потока (1.5) можно найти в работах [2, 3] и других, например, [4].

Граничными условиями для уравнения (1.4) будет заданная интенсивность

$$I_\nu = I_\nu(\vartheta) \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2} \pi, \quad I_\nu = I_\nu(\vartheta) \quad \text{при } z = h, \quad \frac{1}{2} \pi \leq \vartheta \leq \pi$$

а для уравнения (1.8) — заданные полные потоки входящего в газ излучения F_+ и F_- .

Если пластины излучают как абсолютно-черное тело, то

$$F_+ = \sigma T_+^4, \quad F_- = \sigma T_-^4$$

где T_+ и T_- — истинные температуры пластин.

Потоки F_+ и F_- в положительном и отрицательном направлениях оси z связаны с фигурирующим в уравнении (1.5) полным лучистым потоком тепла следующим образом:

$$q_r = F_+ - F_-, \quad 2F_\pm = \pm q_r - \frac{dq_r}{dz} \alpha l + 2\sigma T^4 \quad (1.6)$$

Если существенна обычная молекулярная теплопроводность, то следует задать температуру газа у пластин, равной температуре пластин

$$T = T_+ \quad \text{при } z = 0, \quad T = T_- \quad \text{при } z = h \quad (1.7)$$

а вследствие наличия вязкости

$$u = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad u = v_\infty \quad \text{при } z = h. \quad (1.8)$$

(скачками температуры и скорости газа, которые следует ввести при больших пробегах частиц, если плотность газа низка, пренебрегаем).

§ 2. Введем безразмерные величины

$$T = \bar{T} T_0, \quad z = \bar{z} h, \quad q_r = \bar{q}_r 2\sigma T_0^4, \quad q_m = \frac{k_0 T_0}{h} \bar{q}_m, \quad k = k_0 \bar{k}$$

$$\mu = \mu_0 \bar{\mu}, \quad F_+ = f_+ \sigma T_0^4, \quad F_- = f_- \sigma T_0^4, \quad l = \bar{l} l_0, \quad u = v_\infty \bar{u}$$

Уравнения (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) представляются (черточки опустим) так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\bar{\mu} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) &= 0, & -\frac{dq_r}{dz} + \varepsilon_1 \frac{dq_m}{dz} &= \varepsilon_2 \bar{\mu} \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \\ q_m &= -k \frac{dT}{dz}, & \lambda^2 l \frac{d}{dz} \left(l \frac{dq_r}{dz} \right) &= q_r + 4\lambda T^3 l \frac{dT}{dz} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выше, в (2.1), были введены безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{\alpha l_0}{h}, \quad \varepsilon_1 = \frac{k_0 T_0}{2\sigma T_0^4 h}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\mu_0 v_\infty^2 h}{2\sigma T_0^4}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = M^2 P (\kappa - 1)$$

M — число Маха, P — число Прандтля, κ — показатель адиабаты.

Для граничных условий имеем

$$\begin{aligned} z = 0, \quad u = 0, \quad T = T_+, \quad f_+ &= q_r - \lambda l \frac{dq_r}{dz} + T_+^4 \\ z = 1, \quad u = 1, \quad T = T_-, \quad f_- &= -q_r - \lambda l \frac{dq_r}{dz} + T_-^4 \end{aligned} \quad (2.2)$$

§ 3. В дальнейшем для простоты будем считать коэффициенты вязкости и теплопроводности постоянными, т. е. $k = 1$, $\mu = 1$. Тогда первое и второе уравнения системы (2.1) легко проинтегрировать

$$u = z, \quad q_r + q_m \varepsilon_1 = \varepsilon_2 z + C_0 \quad (3.1)$$

Если температуры пластин одинаковы, то из соображения антисимметрии потока тепла

$$q = q_r + q_m \varepsilon_1 = 0 \quad \text{в точке } z = \frac{1}{2}, \quad C_0 = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \quad \text{или} \quad q = \varepsilon_2 \left(z - \frac{1}{2}\right)$$

и полный поток на пластинах определяется только количеством диссипированной вследствие трения энергии независимо от механизма переноса тепла.

Систему (2.1) легко свести к одному уравнению относительно T

$$\lambda^2 l \frac{d}{dz} \left[l \varepsilon_2 + l \varepsilon_1 \frac{d^2 T}{dz^2} \right] = \varepsilon_2 z + C_0 + \frac{dT}{dz} (\varepsilon_1 + 4\lambda T^3) \quad (3.2)$$

где $l = l(T)$. Граничные условия примут вид

$$(f_+ - T_+^4) = C_0 + \varepsilon_1 \frac{dT}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{d^2 T}{dz^2} \lambda, \quad T = T_+ \quad \text{при } z = 0 \quad (3.3)$$

$$(f_- - T_-^4) = -(C_0 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \frac{dT}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \lambda \frac{d^2 T}{dz^2}, \quad T = T_- \quad \text{при } z = 1$$

Здесь граничных условий четыре, так как константа C_0 в самом уравнении (3.2) неопределена.

§ 4. Пусть $l(T) = \text{const} = 1$ и изменения температуры малы. Тогда уравнения (3.2) можно линеаризовать

$$\lambda^2 \varepsilon_1 \frac{d^2 \theta}{dz^2} - (\varepsilon_1 + 4\lambda) \frac{d\theta}{dz} = \varepsilon_2 z + C_0 \quad (\theta = T - 1)$$

Его решением будет

$$\theta = -\frac{C_0}{\varepsilon_1 \alpha^2} z - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \alpha^2} z^2 + \frac{C_2}{\alpha} e^{\alpha z/\lambda} - \frac{C_3}{\alpha} e^{-\alpha z/\lambda} + C_4 \quad \left(\alpha^2 = \frac{\varepsilon_1 + 4\lambda}{\varepsilon_1}\right) \quad (4.1)$$

Граничные условия (3.3) переписутся (для простоты считаем, что пластины светят как черное тело) так:

$$C_0 + \varepsilon_1 \frac{d\theta}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{d^2 \theta}{dz^2} \lambda = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (4.2)$$

$$-(C_0 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \frac{d\theta}{dz} - \lambda \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{d^2 \theta}{dz^2} \lambda = 0, \quad \theta = \theta_1 \quad \text{при } z = 1$$

где θ_1 — отклонение температуры стенки при $z = 1$ от $T = 1$. Условия (4.2) с использованием (4.1) дают уравнения

$$\frac{C_2}{\alpha} - \frac{C_3}{\alpha} + C_4 = 0, \quad -\frac{C_0}{\varepsilon_1 \alpha^2} - \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \alpha^2} + \frac{C_2}{\alpha} e^{\alpha/\lambda} - \frac{C_3}{\alpha} e^{-\alpha/\lambda} + C_4 = \theta_1$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\lambda} (C_2 + C_3) - \beta C_0 = \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \alpha (C_2 - C_3) - \beta \varepsilon_2 \lambda \quad \left(\beta = \frac{1}{\alpha^2} - 1\right)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\lambda} (C_2 e^{\alpha/\lambda} + C_3 e^{-\alpha/\lambda}) + \beta (-\varepsilon_2 - C_0) = -\varepsilon_1 \frac{\alpha}{\lambda} (C_2 e^{\alpha/\lambda} - C_3 e^{-\alpha/\lambda}) + \beta \varepsilon_2 \lambda$$

из которых можно найти постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{\Delta_1} \left[\frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 - \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + 1/2 \lambda^{-1})}{(1 - \alpha) e^{-\alpha/\lambda} + \alpha \beta \lambda (e^{-\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 + \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + 1/2 \lambda^{-1})}{(1 + \alpha) + \alpha \beta \lambda (e^{-\alpha/\lambda} - 1)} \right] \\ C_3 &= -\frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 - \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + 1/2 \lambda^{-1})}{(1 + \alpha) e^{\alpha/\lambda} - \alpha \beta \lambda (e^{\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{\varepsilon_1 \alpha^2 \beta \theta_1 + \varepsilon_2 \beta \lambda (1 + 1/2 \lambda^{-1})}{(1 - \alpha) + \alpha \beta \lambda (e^{\alpha/\lambda} - 1)} \right] \\ C_4 &= \frac{C_3 - C_2}{\alpha}, \quad C_0 = \left[\varepsilon_2 \lambda + \varepsilon_1 C_2 \frac{1 - \alpha}{\beta \lambda} + \varepsilon_1 C_3 \frac{1 + \alpha}{\beta \lambda} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \left[\frac{(1-\alpha) - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)}{(1+\alpha) + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{(1+\alpha)e^{\alpha/\lambda} - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)}{(1-\alpha)e^{-\alpha/\lambda} + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)} \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \left[\frac{(1-\alpha)e^{-\alpha/\lambda} + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)}{(1+\alpha)e^{\alpha/\lambda} - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)} - \frac{(1+\alpha) + \alpha\beta\lambda(e^{-\alpha/\lambda} - 1)}{(1-\alpha) - \alpha\beta\lambda(e^{\alpha/\lambda} - 1)} \right]$$

Теперь для θ и q имеем:

$$\theta = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\alpha^2} \left(\lambda z + \frac{z^2}{2} \right) - \frac{1}{\beta\lambda\alpha^2} [(1-\alpha)C_2 + (1+\alpha)C_3] z +$$

$$+ \left[\frac{C_2}{\alpha} (e^{\alpha z/\lambda} - 1) - \frac{C_3}{\alpha} (e^{-\alpha z/\lambda} - 1) \right]$$

$$q = \varepsilon_2(z + \lambda) + \frac{\varepsilon_1}{\beta\lambda} [(1-\alpha)C_2 + (1+\alpha)C_3] \quad (4.4)$$

Чтобы выяснить вопрос, когда можно пренебречь обычной теплопроводностью, получим решение для $\varepsilon_1 = 0$ и сравним его с (4.4) при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Из системы (2.1) при $\varepsilon_1 = 0$ легко получить уравнения

$$\lambda \frac{dq_r}{dz} - \varepsilon_2\lambda = 0, \quad \lambda^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = q_r + 4\lambda \frac{d\theta}{dz} = 0 \quad (4.5)$$

или

$$4\theta = -\frac{\varepsilon_2 z^2}{2\lambda} - \frac{C_0 z}{\lambda} + 4C_1, \quad q_r = \varepsilon_2 z + C_0 \quad (4.6)$$

Граничные условия при этом будут иметь вид

$$f_+ = +q_r - \lambda \frac{dq_r}{dz} + (1 + 4\theta) \quad \text{при } z = 0$$

$$f_- = -q_r - \lambda \frac{dq_r}{dz} + (1 + 4\theta) \quad \text{при } z = 1$$

Из (4.7) с использованием (4.6), полагая $f_+ = 1$ и приближенно считая $f_+ - f_- = -4\theta_1$, найдем постоянные C_0 и C_1 , и полученное решение при $\varepsilon_1 = 0$ отметим индексом

$$\theta^0 = -\frac{\varepsilon_2 z^2}{8\lambda} + \left(\frac{\varepsilon_2}{8} + \frac{\theta_1}{2 + \lambda^{-1}} \right) \frac{z}{\lambda} + \left(\frac{\varepsilon_2\lambda(2 + \lambda^{-1})}{8} + \frac{\theta_1}{2 + \lambda^{-1}} \right)$$

$$q_r^0 = \varepsilon_2 z - \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{4\theta}{2 + \lambda^{-1}} \right) \quad (4.8)$$

На фиг. 1 дано распределение температуры при $\lambda = 1, \varepsilon_2 = 0, \theta_1 = 0.2$ для различных ε_1 , в том числе и для $\varepsilon_1 = 0$. Видно, что при малых ε_1 отличие от решения при $\varepsilon_1 = 0$ заметно лишь вблизи стенок, где имеют место резкие изменения температуры, в пределе переходящие в скачки температуры. Разницу температур при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ (т. е. $\alpha \rightarrow \infty$) и $\varepsilon_1 = 0$ можно записать в виде:

$$\Delta\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{4\lambda\theta_1}{2\lambda + 1} - \varepsilon_2\lambda \left(1 + \frac{1}{2\lambda} \right) \right] e^{-\alpha(1-z)/\lambda} - \frac{1}{4} \left[\frac{4\lambda\theta_1}{2\lambda + 1} + \varepsilon_2\lambda \left(1 + \frac{1}{2\lambda} \right) \right] e^{-\alpha z/\lambda}$$

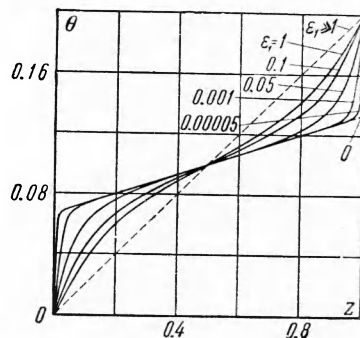
Отсюда видно, что $\Delta\theta$ при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ как угодно мало отличается от 0 в области $0 < z < 1$.

Выпишем решение для случая, когда можно пренебречь лучистым переносом тепла

$$\theta = -\frac{\varepsilon_2 z^2}{\varepsilon_1 2} + \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) z \quad (4.9)$$

что имеет место либо при $\lambda \rightarrow 0$, либо при $\varepsilon_1 \gg 1$.

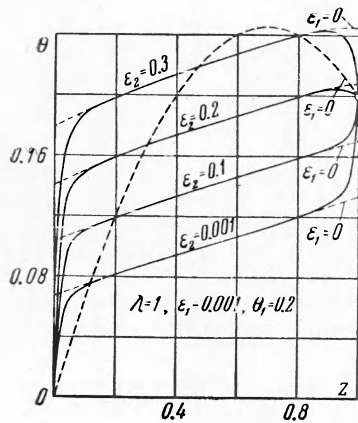
На фиг. 2 пунктиром приведено распределение температуры при $\theta_1 = 0.2, \varepsilon_1 = 0.001, \varepsilon_2 = 0.001$ и $\lambda = 0$.



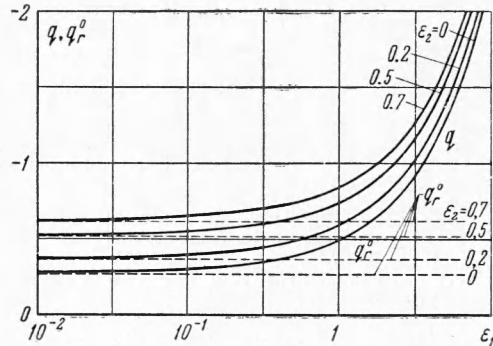
Фиг. 1

Легко заметить, что при наличии лучистого переноса тепла ($\lambda \neq 0$) резко сглаживается профиль температуры между пластинами.

На фиг. 3 показано изменение полного потока тепла q , на фиг. 4 — лучистого потока q_r на одной из пластин ($z=0$) при нескольких значениях ε_2 и $\lambda = 1$ в зависимости от ε_1 .

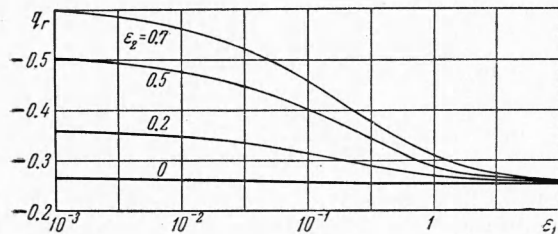


Фиг. 2



Фиг. 3

Легко заметить, что при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ поток тепла q стремится к значению радиационного потока q_r^0 , вычисленному при отсутствии обычной теплопроводности, а при $\varepsilon_1 \gg 1$



Фиг. 4

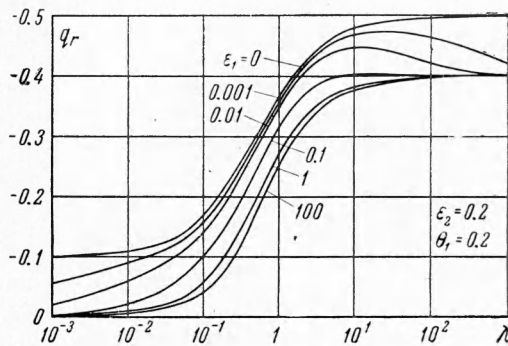
тепло, которое выделяется из-за трения, переносится главным образом обычной теплопроводностью и почти не влияет на лучистый поток (фиг. 4).

На фиг. 5 дано изменение лучистого потока тепла для $\varepsilon_2 = 0.2$, $\theta_1 = 0.2$ и различных ε_1 , в зависимости от λ на пластине $z=0$.

При малых λ и при больших λ лучистый поток при наличии хотя бы малой обычной теплопроводности ($\varepsilon_1 \ll 1$) существенно отличается от лучистого потока при $\varepsilon_1 = 0$.

Это объясняется тем, что лучистый поток при малых λ , когда справедливо приближение лучистой теплопроводности, пропорционален λ , а при больших λ , когда существенно объемное высвечивание, поток обратно пропорционален λ (за вычетом свободно проходящего через прозрачную область между пластинами потока $1/2 (f_+ - f_-) = 2\theta_1$), т. е. доля лучистого потока в общем количестве уносимого тепла максимальна при λ порядка единицы и мала при $\lambda \gg 1$ и $\lambda \ll 1$.

Если же $\varepsilon_1 = 0$, то выделившееся из-за трения тепло переносится только лучистым потоком при любых λ , что и приводит к сильному отличию между q_r и q_r^0 при $\lambda \ll 1$ и $\lambda \gg 1$.



Фиг. 5

