

**ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ ПРИ СТЕКАНИИ ПЛЕНКИ
ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ
ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА
И КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ
НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

УДК 532.51

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики СО РАН,
630090 Новосибирск

Известно, что течение тонких слоев вязкой жидкости сопровождается волновыми явлениями. Их исследованию в линейной и нелинейной постановке для свободно стекающей пленки посвящено большое количество работ [1-5]. Значительно меньше было изучено волнообразование при совместном течении жидкости и газа. Для горизонтального канала линейная устойчивость пленочного течения, создаваемого газовым потоком, исследована в [6-8], а в случае вертикальной плоскости — в [9, 10]. Наличие поперечного потока массы (например, при конденсации или испарении) оказывает существенное влияние на волнообразование и в отсутствие касательных напряжений на свободной поверхности изучалось в [11, 12].

Цель настоящей работы — исследование волнообразования при пленочном течении в рамках одного подхода с учетом различных факторов: угла наклона плоскости течения, касательного напряжения на свободной поверхности, фазового перехода (конденсация или испарение). Это позволит выявить роль различных факторов при волнообразовании и глубже понять механизм волновой неустойчивости.

1. Постановка задачи. Схема течения приведена на рис. 1. Основное состояние системы описывается полями скоростей u_0, v_0 в жидкой и U_0, V_0 в паровой фазах, а также функцией $h_0(x_*)$ (x_* — крупномасштабная переменная вдоль плоскости течения). В дальнейшем нас будет интересовать устойчивость течения относительно возмущений свободной поверхности $h = \hat{h} \exp[i\alpha(x - ct)]$, где c — неизвестный комплексный инкремент нарастания или затухания; α — вещественное волновое число ($\alpha = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны возмущения).

Накладывая на основное состояние поле возмущений и линеаризуя исходные уравнения движения, получим систему уравнений Орра — Зоммерфельда

$$i\alpha \operatorname{Re}[(u_0 - c)(f_{yy} - \alpha^2 f) - u_{0yy}f] = f_{yyyy} - 2\alpha^2 f_{yy} + \alpha^4 f, \quad (1.1)$$

$$u = -f_y \hat{h} \exp[i\alpha(x - ct)], \quad v = i\alpha f \hat{h} \exp[i\alpha(x - ct)];$$

$$i\alpha_g \operatorname{Re}_g[(U_0 - C)(F_{yy} - \alpha_g^2 F) - U_{0yy}F] = F^{IV} - 2\alpha_g^2 F'' + \alpha_g^4 F, \quad (1.2)$$

$$U_1 = -F_y \hat{H} \exp[i\alpha_g(X - Ct)], \quad V = i\alpha_g F \hat{H} \exp[i\alpha_g(X - Ct)]$$

с граничными условиями

$$f|_{y=0} = \frac{df}{dy}|_{y=0} = 0, \quad F|_{Y=\infty} = \frac{dF}{dY}|_{Y=\infty} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(g)}|_{y=h_0+h} = \sigma_{xy}^{(l)}|_{y=h_0+h},$$

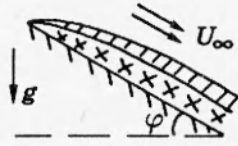


Рис. 1

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy}^{(g)} - \sigma_{yy}^{(l)})|_{y=h_0+h} &= -\frac{\sigma}{h_0} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, & \frac{\langle u_0 \rangle}{U_\infty} u|_{y=h_0+h} &= U|_{y=h_0+h}, \\ \frac{\langle u_0 \rangle}{U_\infty} v|_{y=h_0+h} &= V|_{y=h_0+h}, & v|_{y=h_0+h} &= \frac{d}{dt}(h_0 + h) + \frac{J}{\rho \langle u_0 \rangle}. \end{aligned}$$

Здесь и далее величины, обозначенные строчными буквами, относятся к жидкой фазе, прописными — к паровой. Скорости в уравнениях (1.1) и (1.2) обезразмерены на $\langle u_0 \rangle$ и U_∞ соответственно ($\langle u_0 \rangle$ — средняя по толщине скорость в жидкости, U_∞ — скорость в паровом ядре потока). Масштабом толщины и длины в (1.1) является толщина пленки h_0 , в (1.2) — толщина пограничного слоя δ_0 ; $Re = u_0 h_0 / \nu$, $Re_g = U_\infty \delta_0 / \nu_g$ — числа Рейнольдса (ν и ν_g — кинематические вязкости жидкости и пара); σ — коэффициент поверхностного натяжения; $\sigma_{xy}^{(g)}$, $\sigma_{yy}^{(g)}$, $\sigma_{xy}^{(l)}$, $\sigma_{yy}^{(l)}$ — компоненты тензора напряжений в паре и жидкости ($\sigma_{xy} = \mu(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$, $\sigma_{yy} = -p + 2\mu(\partial v / \partial y)$, μ — динамическая вязкость в жидкости или паре, p — давление); ρ — плотность жидкости; $J = -(\lambda/r)\partial T / \partial y|_{y=h_0+h}$ — поперечный массовый поток; λ — температуропроводность; r — теплота фазового перехода.

К уравнениям (1.1) и (1.2) следует добавить уравнение на возмущение поля температуры. Здесь ограничимся случаем длинноволновых возмущений и приближением $\alpha/2\pi = h_0/\lambda \ll \min\{1, 1/(Re Pr)\}$ (Pr — число Прандтля для жидкости), которое позволяет считать поле температур «квазистационарным» [12], т. е. $T = T_w + (T_s - T_w)y/(h_0 + h(x, t))$, T_s — температура в паровой фазе, T_w — температура стенки, $\Delta T = T_s - T_w$.

Производя разложение вблизи невозмущенной поверхности и обезразмеривая, приведем граничные условия к виду

$$\begin{aligned} f|_{y=0} = \frac{df}{dy}|_{y=0} = F|_{Y=\infty} = \frac{dF}{dY}|_{Y=\infty} = 0, & \quad f''|_{y=1} + \alpha^2 f|_{y=1} + Re \Sigma^*|_{Y=0} = 0, \\ -\hat{p}|_{y=1} + \frac{2i\alpha}{Re} \frac{df}{dy}|_{y=1} &= -\alpha^2 T + (\Pi|_{Y=0} - G^*), \\ \frac{\langle u_0 \rangle h_0}{U_\infty \delta} \left(-\frac{df}{dy}|_{y=1} + \frac{\mu_g}{\mu} \frac{dU_0}{dY}|_{Y=0} \right) &= \left(-\frac{dF}{dY}|_{Y=0} + \frac{dU_0}{dY}|_{Y=0} \right), \\ \frac{\langle u_0 \rangle h_0}{U_\infty \delta} \left(i\alpha f|_{y=1} + \frac{dv_0}{dy}|_{y=1} \right) &= \left(i\alpha_g F|_{Y=0} + \frac{dV_0}{dY}|_{Y=0} \right), \\ i\alpha f|_{y=1} + \frac{dh_0}{dx} \frac{df}{dy}|_{y=1} &= i\alpha(u_0|_{y=1} - c) - \frac{dv_0}{dy}|_{y=1} + \frac{1}{Re Pr Ku}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\Sigma^*|_{Y=0} = -K \left(\frac{d^2 F}{dY^2} + \alpha_g^2 F \right)|_{Y=0} + K \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial X \partial Y} \right)|_{Y=0} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right)|_{y=1};$$

$$K = \frac{\rho_g}{\rho} \left(\frac{U_\infty}{\langle u_0 \rangle} \right)^2 \frac{h_0}{\delta} \frac{1}{\text{Re}_g}; \quad \hat{p}|_{y=1} = (u_0|_{y=1} - c)f_y|_{y=1} - u_{0y}f|_{y=1} + \frac{i}{\alpha \text{Re}} (f_{yyy} - \alpha^2 f_y)|_{y=1}$$

(выражение для \hat{p} следует из исходных линеаризованных уравнений);

$$\Pi|_{Y=0} = K \text{Re}_g \left[-\hat{P}_g + \frac{2i\alpha_g}{\text{Re}_g} \frac{dF}{dY} \right] \Big|_{Y=0}; \quad \hat{P}_g = (U_0 - C)F_Y - U_{0Y}F + \frac{i}{\alpha_g \text{Re}_g} (F_{YYY} - \alpha_g^2 F_Y);$$

$$T = \sigma/(\rho \langle u_0 \rangle^2 h_0); \quad g^* = g(1 - \rho_g/\rho); \quad G = \frac{g^* \cos \varphi \cdot h_0}{\langle u_0 \rangle^2};$$

$$G^* = G - 2K \frac{d^2 V_0}{dY^2} \Big|_{Y=0} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \Big|_{y=1}; \quad \text{Pr} = \nu/\alpha; \quad \text{Ku} = r/C_p \Delta T.$$

Для большинства ситуаций, интересных практически, $\mu_g/\mu \ll 1$, $\langle u_0 \rangle/U_\infty \ll 1$, $h_0/\delta \ll 1$. Задача Орра — Зоммерфельда для паровой фазы в этом случае отделяется от задачи для жидкости [6, 7] и решается раньше с граничными условиями

$$F|_{y=\infty} = \frac{dF}{dY} \Big|_{Y=\infty} = 0, \quad \frac{dF}{dY} \Big|_{Y=0} = \frac{dU_0}{dY} \Big|_{Y=0}, \quad F|_{Y=0} = \frac{i}{\alpha_g} \frac{dV_0}{dY} \Big|_{Y=0}.$$

2. Решение уравнения Орра — Зоммерфельда в жидкости. Для решения уравнения Орра — Зоммерфельда в жидкости воспользуемся методом [1] и с учетом граничных условий на стенке представим решение как

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} A_n y^n.$$

Используя также общий вид стационарного решения для задач пленочного течения $u_0(y) = 2y + \bar{u}(2y/3 - y^2)$, после подстановки его в (1.1) получим рекуррентное соотношение

$$n(n-1)(n-2)(n-3)A_n = (n-2)(n-3)\hat{p}A_{n-2} + (n-3)(n-4)\hat{q}A_{n-3} + \\ + (n-4)(n-5)\hat{w}A_{n-4} - \alpha^2[\hat{r}A_{n-4} + \hat{q}A_{n-5} + \hat{w}A_{n-6}],$$

$$\hat{p} = 2\alpha^2 - i\alpha \text{Re} c, \quad \hat{q} = 2i\alpha \text{Re}(1 + \bar{u}/3), \quad \hat{w} = -i\alpha \text{Re} \bar{u}, \quad \hat{r} = \alpha^2 - i\alpha \text{Re} c - 2i\bar{u} \text{Re}/\alpha.$$

В дальнейшем ограничимся случаем $\alpha^2 \ll 1$, $\alpha \text{Re} < 1$ и, отбрасывая члены $O(\alpha \text{Re})$, $O(\alpha^2)$, находим

$$f = A_2(y^2 + \hat{p}y^4/12 + \hat{q}y^5/60) + A_3(y^3 + \hat{p}y^5/20 + \hat{q}y^6/60 + \hat{w}y^7/210). \quad (2.1)$$

После подстановки (2.1) в граничные условия (1.3) имеем систему трех уравнений для определения A_2 , A_3 и c :

$$2i\alpha^2 A_2 - 6iA_3 = -\alpha^3 \text{Re} T + \alpha \text{Re} (\Pi|_{Y=0} - G^*),$$

$$A_2[2 + i\alpha \text{Re}(2/3 + 2\bar{u}/9 - c)] + A_3[6 + i\alpha \text{Re}(1 + 2\bar{u}/15 - c)] = -\text{Re} \Sigma^*, \quad (2.2)$$

$$A_2[1 + i\alpha \text{Re}(1/30 + \bar{u}/90 - c/12) - (i/\alpha)dh_0/dx \cdot (2 + i\alpha \text{Re}(1/6 + \bar{u}/18 - c/3))] + \\ + A_3[1 + i\alpha \text{Re}(1/30 + 2\bar{u}/315 - c/20) - (i/\alpha)dh_0/dx \cdot (3 + i\alpha \text{Re}(1/5 + \bar{u}/30 - c/4))] = \\ = 2 - \bar{u}/3 - c + (i/\alpha)[\partial v_0/\partial y|_{y=1} - 1/(\text{Re Pr Ku})].$$

Решая систему уравнений (2.2) с учетом принятой ранее точности, получим квадратное уравнение для определения комплексного инкремента нарастания или затухания:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \Sigma^* [1 + i\alpha \operatorname{Re}(1/30 + \bar{u}/90 - c/12) - 2(i/\alpha) dh_0/dx] + \\ & + [2 - \bar{u}/3 - c + (i/\alpha)(\partial v_0/\partial y)|_{y=1} - 1/(\operatorname{Re} \operatorname{Pr} \operatorname{Ku})][2 + i\alpha \operatorname{Re}(2/3 + 2\bar{u}/9 - c)] = \\ & = i[-\alpha^3 \operatorname{Re} T + \alpha \operatorname{Re}(\Pi|_{Y=0} - G^*)][-2/3 + 2(i/\alpha) dh_0/dx]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для дальнейшего упрощения и анализа уравнения (2.3) необходимо иметь выражения для компонент нормального $\Pi|_{Y=0}$ и касательного Σ^* напряжений со стороны паровой фазы.

3. Метод решения уравнения Орра — Зоммерфельда в паровой фазе. Поле возмущений в паровой фазе разбиваем на три зоны аналогично задаче [6] для течения газа вдоль волнистой стенки: а) зона «вязкого подслоя» толщиной δ_f , где преобладают силы вязкости; б) зона пограничного слоя толщиной δ_0 , где существует вид профиля скорости $U_0(y)$; в) ядро потока, где $U_0(y) = \text{const}$.

Общее решение уравнения (1.2) представляем суперпозицией «вязкого» и «невязкого» решений, удовлетворяющей граничным условиям.

Предположим, что $\delta_f \ll \delta_0$ и в вязком подслое профиль скорости линеен. Критический слой ($U_0(y_*) = C$) предполагаем лежащим внутри вязкого подслоя, что верно, если $U'_0(0)\delta_f \gg C$, а величину C для задачи в паровой фазе в дальнейшем считаем равной нулю. В этом случае «вязкое» решение представляется в виде [13]

$$F_\nu = \int_{\infty}^{\eta} d\eta' \int_{\infty}^{\eta'} \eta''^{1/2} H_{1/3}^{(1)} [2(i\eta'')^{3/2}/3] d\eta'', \quad \eta = (\alpha_g \operatorname{Re}_g U'_0(0))^{1/3} Y \quad (3.1)$$

($H_{1/3}^{(1)}$ — функция Ганкеля). Решение (3.1) удовлетворяет условию затухания на больших Y .

Вне вязкого подслоя с учетом $\alpha_g \operatorname{Re}_g \gg 1$ для определения «невязкого» решения имеем $U_0(Y)(\Phi_{YY} - \alpha_g^2 \Phi) - U_0 Y \Phi = 0$.

В ядре потока $\Phi = C \exp[-\alpha_g Y]$, а для решения задачи в пограничном слое используем аппроксимацию профиля скорости [6]:

$$U_0(Y) = \begin{cases} \sin(U'_0(0)Y), & Y \leq \pi/(2U'_0(0)), \\ 1, & Y \geq \pi/(2U'_0(0)). \end{cases}$$

Более точный учет профиля скорости в паровой фазе возможен только при рассмотрении конкретной задачи и, как показано в [6], приводит к небольшим поправочным множителям в соответствующих формулах для Σ^* и $\Pi|_{Y=0}$.

Сшивая решения в пограничном слое и ядре потока и используя граничные условия на поверхности раздела, получим систему уравнений для определения величин B и M :

$$\begin{aligned} & \Phi = B[\cos(LY) + (A/B) \sin(LY)], \quad Y \leq \pi/(2U'_0(0)), \quad L^2 = (U'_0(0))^2 - \alpha_g^2, \\ & \frac{A}{B} = \frac{1 - \frac{\alpha_g}{L} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{L}{U'_0(0)}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{L}{U'_0(0)}\right) + \frac{\alpha_g}{L}}, \quad \Phi(0) + M F_\nu(0) = \frac{i}{\alpha_g} \frac{dV_0}{dY} \Big|_{Y=0}, \quad \Phi'(0) + M F'_\nu(0) = \frac{dU_0}{dY} \Big|_{Y=0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Данная система отличается от аналогичной в работе [6], где рассматривалась задача о течении газа вдоль слабоволнистой стенки, ненулевой правой частью в предпоследнем уравнении, что является следствием поперечного массового потока.

После решения уравнений (3.2) нетрудно найти выражения для компонент напряжений:

$$\Sigma^* \Big|_{Y=0} - \frac{\nu}{F_\nu} \frac{F_\nu''}{F_\nu} \Big|_{\eta=0} \left(B - \frac{i}{\alpha_g} \frac{dV_0}{dY} \Big|_{Y=0} \right) + K \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial X \partial Y} \right) \Big|_{Y=0} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \Big|_{y=1},$$

$$\Pi \Big|_{Y=0} = K \text{Re}_g B \frac{dU_0}{dY} \Big|_{Y=0}, \quad B = \frac{U_0'(0) - \frac{i}{\alpha_g} \frac{F_\nu'}{F_\nu} \Big|_{\eta=0} \frac{dV_0}{dY} \Big|_{Y=0}}{\frac{L}{B} - \frac{F_\nu'(0)}{F_\nu(0)}}. \quad (3.3)$$

Пределы применимости всех сделанных допущений детально проанализированы в [6] и остаются справедливыми для нашего случая. При выводе (3.3) и далее учтено, что $F_\nu'(0)/F_\nu(0) = -1,288m \exp[\pi i/6]$, $m = (\alpha_g \text{Re}_g U_0'(0))^{1/3}$, $F_\nu''(0)/F_\nu(0) = 1,372m^2 \exp[\pi i/3]$, $F_\nu'''(0)/F_\nu(0) = -im^3$, как это нетрудно получить из (3.1), используя интегральное представление функции Ганкеля и меняя порядок интегрирования.

Выражения (3.3) остаются сложными для дальнейшего аналитического исследования. Значительное упрощение достигается при дополнительном (справедливом для большинства практически интересных случаев) предположении [6] $\alpha_g \ll U_0'(0)$, что эквивалентно условию $\alpha_g/(C_f \text{Re}) \ll 1$ (C_f — коэффициент трения для пара).

В этом случае выражение для B принимает вид

$$B = \frac{\alpha_a}{U_0'(0)} \frac{1 + 1,288 \frac{im}{\alpha_g U_0'(0)} \frac{dV_0}{dY} \Big|_{Y=0} \exp \left[\frac{i\pi}{6} \right]}{1 + 1,288m \frac{\alpha_a}{(U_0'(0))^2} \exp \left[\frac{i\pi}{6} \right]}.$$

Проанализируем порядок величин, входящих в знаменатель и числитель данного соотношения:

$$\frac{m\alpha_a}{(U_0'(0))^2} = \frac{2}{C_f} \frac{\alpha^{4/3} \beta^2}{\text{Re}^{2/3}} \frac{1}{(2 - 4\bar{u}/3)^{2/3}} \ll 1,$$

$$\beta = (\rho_g/\rho)^{1/3} (\nu_g/\nu)^{2/3} \ll 1, \quad \alpha \ll 1,$$

$$\frac{m}{\alpha_g U_0'(0)} \frac{dV_0}{dY} \Big|_{Y=0} = \frac{1}{3\alpha} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} (\alpha \text{Re})^{1/3} \frac{1}{(2 - 4\bar{u}/3)^{2/3}} \left(\frac{\rho_g}{\rho} \right)^{2/3} \left(\frac{\nu_g}{\nu} \right)^{1/3} \ll 1,$$

$$\alpha \text{Re} \ll 1, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \approx \frac{1}{\text{Pr Ku}} \ll 1.$$

Здесь α и Re относятся к жидкой пленке и использовано $C_f = 2\nu_g U_p'(0)/U_\infty^2$, $\mu_g U_p'(0) = \mu du_{0p}/dy \Big|_{y=h_0} = \mu \langle u_0 \rangle (2 - 4\bar{u}/3)/h_0$, $\partial V_0/\partial Y = -\partial U_0/\partial X$, $U_0 \Big|_{Y=0} = \langle u_0 \rangle u \Big|_{y=1}/U_\infty$ (величины с индексом p — размерные). С учетом этих оценок формула для B имеет вид

$$B = \frac{\alpha_a}{U_0'(0)}.$$

Аналогично оценивая порядок величин, входящих в выражение для $\Sigma^* \Big|_{Y=0}$, получим

с принятой выше точностью окончательные формулы для компонент напряжений:

$$\begin{aligned} \Pi|_{Y=0} &= \frac{2\alpha}{C_f \text{Re}} \left(2 - \frac{4\bar{u}}{3}\right), \\ \Sigma^*|_{Y=0} &= \frac{2\beta}{C_f} \frac{\alpha^{5/3}}{\text{Re}^{4/3}} \left(2 - \frac{4\bar{u}}{3}\right)^{2/3} 1,372 \exp\left[\frac{\pi i}{3}\right] + \\ &+ K \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial X \partial Y}\right)|_{Y=0} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}\right)|_{y=1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. Результаты. Используя уравнения (2.3), (3.4) и представляя $c = c_r + i\gamma$, с учетом принятой здесь точности находим выражения для инкремента нарастания (затухания) и для c_r :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha \text{Re}}{2} \left[\frac{16}{15} \bar{u} \left(1 + \frac{\bar{u}}{3}\right) + \frac{2}{3} (\Pi|_{Y=0} - G - \alpha^2 T) + \frac{\Sigma_i}{\alpha} \Big|_{Y=0} - \frac{4\bar{u}}{\alpha^2 \text{Re}} \frac{dh_0}{dx} + \frac{2}{\alpha^2 \text{Re}} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=1} - \frac{1}{\text{Re Pr Ku}} \right) \right], \\ c_r &= 2 + \frac{2}{3} \bar{u}, \quad \Pi|_{Y=0} = \frac{2\alpha}{C_f \text{Re}} \left(2 - \frac{4\bar{u}}{3}\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\Sigma_i|_{Y=0} = \frac{\beta}{C_f} \frac{\alpha^{5/3}}{\text{Re}^{4/3}} \left(2 - \frac{4\bar{u}}{3}\right)^{2/3} 1,372\sqrt{3}, \quad \beta = \left(\frac{\rho g}{\rho}\right)^{1/3} \left(\frac{\nu g}{\nu}\right)^{2/3}.$$

Возмущения с $\gamma_i < 0$ затухающие, а с $\gamma_i > 0$ нарастающие. Из (4.1) следует, что сила тяжести, поверхностное натяжение и положительный поперечный поток массы (случай конденсации) всегда оказывают стабилизирующее воздействие (отрицательный вклад в выражение для γ_i). Поток пара, с одной стороны, уменьшает среднюю толщину пленки, что приводит к более интенсивному поперечному потоку массы и в случае конденсации стабилизирует пленку, с другой стороны, значение Σ_i всегда положительно и имеет дестабилизирующее влияние. Таким образом, говорить о суммарном воздействии парового потока можно только после рассмотрения конкретной задачи.

После сформулированного выше общего замечания проанализируем различные предельные случаи.

1. *Свободно стекающая в поле тяжести пленка жидкости.* В этом случае $dh_0/dx = \Pi|_{Y=0} = \Sigma_i|_{Y=0} = 0$ и стационарное решение имеет вид

$$u_0(y) = \frac{g^* \sin(\varphi)}{\nu} h_0^2 \left[\frac{y}{h_0} - \frac{y^2}{2h_0^2} \right], \quad \text{Re} = \frac{q_0}{\nu} = \frac{g^* \sin(\varphi) h_0^3}{3\nu^2},$$

откуда, используя определение безразмерных величин, получим $\bar{u} = 3/2$, $G = 3 \text{ctg}(\varphi)/\text{Re}$, $T = (3\text{Fi}/\sin(\varphi))^{1/3}/\text{Re}^{5/3}$, $\text{Fi} = (\sigma/\rho)^3/g^*\nu^4$.

Из (4.1) вытекает уравнение нейтральной кривой ($\gamma = 0$) $G + \alpha^2 T = 18/5$, которое при условии $G > 18/5$ не имеет решений. Отсюда следует хорошо известный критерий устойчивости течения пленки вдоль наклонной плоскости [1]: $\text{ctg}(\varphi) > 6\text{Re}/5$.

2. *Свободно стекающая в поле тяжести пленка жидкости при наличии поперечного потока массы.* В этом случае $\Pi|_{Y=0} = \Sigma_i|_{Y=0} = 0$. Стационарное решение то же, что и в п. 1, кроме того,

$$\frac{dh_0}{dx} = \frac{1}{3\text{Re Pr Ku}}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=1} = -\frac{1}{\text{Re Pr Ku}}.$$

Из (4.1) для нейтральной кривой вытекает уравнение

$$\alpha^4 \text{Re}T + \alpha^2 \text{Re}\left(G - \frac{18}{5}\right) + \frac{9}{\text{Re Pr Ku}} = 0,$$

где $G = 3 \text{ctg}(\varphi)/\text{Re}$; $T = (3\text{Fi}/\sin(\varphi))^{1/3}/\text{Re}^{5/3}$.

Критическое число Рейнольдса, при котором начинается волнообразование, определяется из уравнения

$$\text{Re}_c = \frac{5}{6} \text{ctg}(\varphi) + \frac{5}{3(\text{Re}_c)^{5/6}} \left[\left(\frac{3\text{Fi}}{\sin(\varphi)} \right)^{1/3} \frac{1}{\text{Pr Ku}} \right]^{0.5} \quad (4.2)$$

и при $\varphi = \pi/2$ в точности соответствует найденному в [11]. При других значениях угла φ критическое число волнообразования должно определяться численно из уравнения (4.2), что отличается от выводов работы [11], где получено упрощенное выражение для $\text{Re}_c = 5 \text{ctg}(\varphi)/6$ при $\varphi \neq \pi/2$.

3. *Стекающая в поле тяжести пленка жидкости при наличии касательного напряжения на свободной поверхности.* В этом случае $dh_0/dx = \partial v_0/\partial y = 0$ и стационарное решение имеет вид

$$u_0(y) = \frac{g^* \sin(\varphi)}{\nu} h_0^2 \left[\frac{y}{h_0} - \frac{y^2}{2h_0^2} \right] + \frac{\tau_g y}{\mu}, \quad \tau_g = \frac{1}{2} \rho_g U_\infty^2 C_f.$$

В качестве системы определяющих параметров удобно взять угол наклона плоскости течения φ , $\text{Re}^* = g^* h_0^3 / (3\nu^2)$ и скорость в ядре газового потока U_∞ . Тогда безразмерные критерии в (4.1) выразим в виде

$$\text{Re} = \text{Re}^* \sin(\varphi) + \tau_g^* (\text{Re}^*)^{2/3}, \quad \tau_g^* = 3^{2/3} \rho_g U_\infty^2 C_f / (4\rho(\nu g^*)^{2/3}), \quad \bar{u} = 1,5(1 - \tau_*),$$

$$\tau_* = 1/(1 + \sin(\varphi)\text{Re}^{*1/3}/\tau_g^*), \quad G = 3 \cos(\varphi)(\tau_*/\tau_g^*)^2 / (\text{Re}^*)^{1/3}, \quad T = (3\text{Fi})^{1/3}(\tau_*/\tau_g^*)^2 / \text{Re}^*.$$

Из уравнения (4.1) следует система уравнений для нахождения критического числа волнообразования Re_c^* ($\gamma = 0$, $\partial\gamma/\partial\alpha = 0$):

$$\frac{1}{2} \Pi_r \Big|_{Y=0} + G - 2\alpha^2 T - \frac{8}{5} \bar{u} \left(1 + \frac{\bar{u}}{3} \right) = 0, \quad \Pi_r \Big|_{Y=0} - 2\alpha^2 T + \frac{\Sigma_i}{\alpha} \Big|_{Y=0} = 0.$$

Решая данную систему, после ряда преобразований получим трансцендентное уравнение для Re_c^* :

$$\left(\frac{1}{\text{Re}_c^*} \right)^{1/3} = \frac{K}{\omega^{2/3}} (\omega + \Phi_1)^{1/3} (-3\omega + \Phi_1),$$

$$\Phi_1 = \left[\omega^2 + \cos(\varphi) - \frac{2}{5} \sin(\varphi) (\bar{\text{Re}}_c^*)^{2/3} (K^{-3} K_1 \omega + 3 \sin(\varphi) (\text{Re}_c^*)^{1/3}) \right]^{1/2}, \quad (4.3)$$

$$K_1 = 64(2/3)^{0.5} \beta_1^3 (3\text{Fi})^{1/6}, \quad K = (6C_f)^{1/3} / (4\beta_1), \quad \omega = \frac{\rho_g}{8\rho} U_\infty^2 \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma g^*}}, \quad \beta_1 = 3^{0.5} 1,372\beta/2.$$

При $\varphi = 0$ уравнение (4.3) переходит в уравнение работы [7].

Результаты численного анализа уравнения (4.3) для системы воздух — вода приведены на рис. 2, 3. Отметим, что коэффициент трения C_f должен определяться из решения стационарной задачи. В экспериментах [7], где исследовался случай горизонтального канала ($\varphi = 0$) в системе воздух — вода, показано, что значение C_f слабо отличается от своего значения для сухого канала и может быть рассчитано по соответствующим форму-

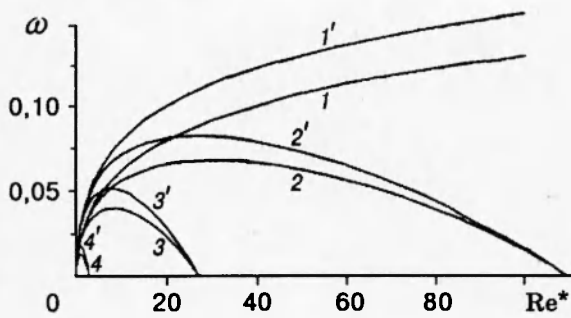


Рис. 2

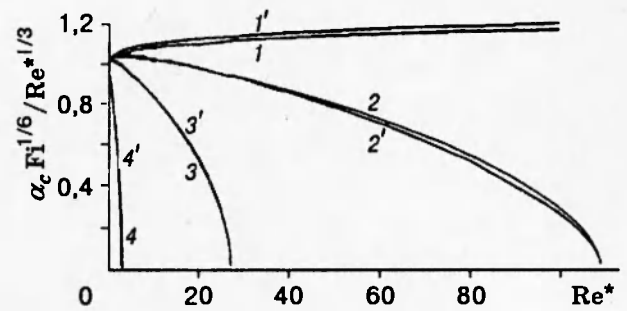


Рис. 3

лам в зависимости от геометрических размеров канала. На рис. 2, 3 линии 1–4 отвечают $C_f = 3 \cdot 10^{-3}$, линии 1'–4' — $C_f = 6 \cdot 10^{-3}$ (численные значения C_f взяты из [7]).

Из дополнительного анализа уравнения (4.1) после приведения системы безразмерных величин к нашему случаю нетрудно получить, что всегда $\partial\gamma/\partial\omega > 0$. Отсюда следует, что результаты расчета уравнения (4.3) удобно представить в виде набора линий $\omega_c(\text{Re}^*)$ для различных φ , и в области $\omega > \omega_c$ имеем нарастающие возмущения, т. е. неустойчивость.

На рис. 2, 3 линии 1, 1'–4, 4' рассчитаны при $\varphi = 0; 5; 10; 30^\circ$. При $\varphi \neq 0$ линии на рис. 2 ограничивают на плоскости (ω, Re^*) соответствующую область устойчивости, размеры которой быстро уменьшаются с увеличением угла наклона. Крайняя правая граничная точка области устойчивости отвечает критическому числу волнообразования свободно стекающей пленки $5 \text{ctg}(\varphi)/(6 \sin(\varphi))$ (см. п. 1).

Для большей наглядности представленных результатов приведем численные значения скорости $U_\infty = 1,71; 2,42; 2,96; 3,42; 3,83; 4,19$ м/с для $\omega = 0,025; 0,05; 0,075; 0,1; 0,125; 0,15$.

На рис. 3 представлены волновые числа для возмущений на границе области устойчивости. Для системы вода — воздух пленочное число очень большое ($\text{Fi} \sim 10^{11}$), и основное допущение данной работы (длинноволновость) хорошо выполняется, как это следует из рис. 3.

4. *Волнообразование при конденсации движущегося пара вдоль вертикальной стенки.* В этом случае стационарное решение определяется системой уравнений [14]

$$u_0(y) = \frac{g^* h_0^2}{\nu} \left[\frac{y}{h_0} - \frac{y^2}{2h_0^2} \right] + \frac{\tau_g y}{\mu}, \quad \frac{1}{\nu} \left[\frac{h_0}{2} \frac{d}{dx} (u_s h_0) \right] + \frac{g^*}{\nu^2} \left[\frac{h_0^3}{4} \frac{dh_0}{dx} \right] = \frac{1}{\text{Pr Ku}},$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{h_0 (U_\infty - u_s)^2 (2U_\infty + 3u_s)}{u_s - g^* h_0^2 / 2\nu} \right] + \frac{15}{2} R^2 \nu \left[\frac{(U_\infty - u_s)}{h_0} \frac{1}{\text{Pr Ku}} - \frac{u_s - g^* h_0^2 / 2\nu}{h_0} \right] = 0, \quad (4.4)$$

$$\tau_g = \frac{\mu}{h_0} \left(u_s - \frac{g^* h_0^2}{2\nu} \right) = 0,5 \rho_g U_\infty^2 C_f.$$

Здесь u_s — скорость на свободной поверхности пленки; $R^2 = \mu\rho/(\mu_g\rho_g)$.

Следуя работе [14] и сшивая асимптотические решения уравнений (4.4) на малых и больших x , решение представим как

$$\bar{h}_0^2 = \frac{\eta}{(1 + \eta/4)^{1/2}}, \quad \bar{u}_s = 4 \left(1 + \frac{\eta}{16} \right)^{1/2}, \quad \eta = (gx/U_\infty^2) \text{Pr Ku} / \chi^4, \quad (4.5)$$

$$\bar{h}_0^2 = (gh_0^2/\nu U_\infty) \text{Pr Ku} / \chi^2, \quad \bar{u}_s = (u_s/U_\infty) \text{Pr Ku} / \chi^2, \quad \chi = 0,45(1,2 + \text{Pr Ku}/R)^{1/3}.$$

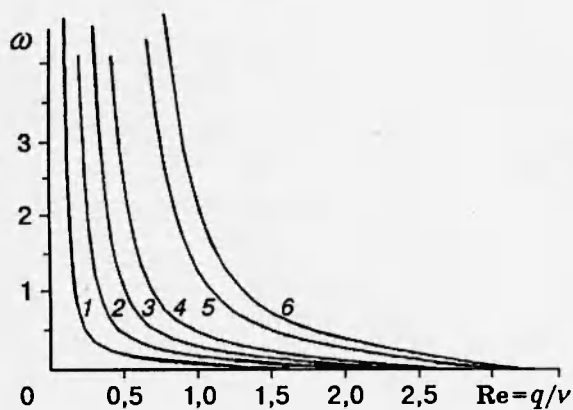


Рис. 4

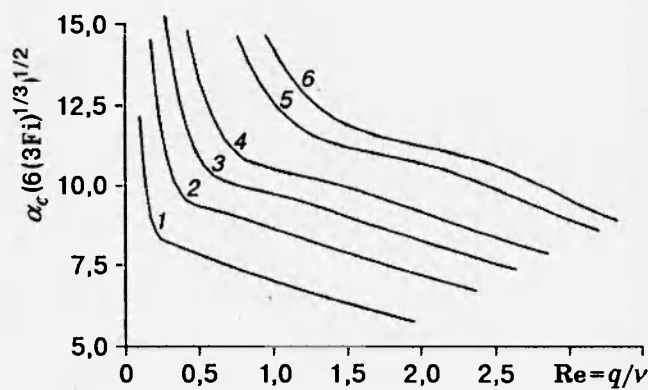


Рис. 5

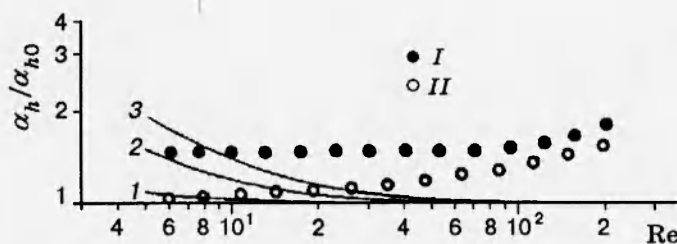


Рис. 6

Система определяющих параметров и выражения для Re , G , T и \bar{u} аналогичны п. 3, и после преобразования основное уравнение (4.1) для изучения устойчивости примет вид

$$\gamma = \frac{\alpha}{3Re^{*1/3}} \frac{4\bar{h}_0^2}{\bar{h}_0^2 + 6\bar{u}_s} \left[4\alpha_1\omega - \frac{\alpha_1^2}{6Re^{*1/3}} + \frac{18}{5} Re^{*4/3} \frac{\bar{u}_s + \bar{h}_0^2/2}{\bar{h}_0^2} + \frac{2^{1/3}3^{4/3}\alpha_1^{2/3}\omega^{2/3}(PrKu)^{2/3}}{\chi^{4/3}} \beta_1 \left(\frac{\rho_g}{\rho}\right)^{1/3} \frac{Re^{*1/9}}{(\bar{h}_0^2(\bar{u}_s - \bar{h}_0^2/2))^{1/3}} - \frac{Z}{\alpha_1^2} \right],$$

$$Z = \frac{54(3Fi)^{1/3}}{Re^{*2/3}PrKu} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{d\bar{h}_0^2}{d\eta} (\bar{h}_0^2/2 - \bar{u}_s) \right],$$

где \bar{h}_0 , \bar{u}_s и $d\bar{h}_0/d\eta$ неявным образом выражаются через Re^* , ω и $PrKu$ посредством формул (4.5); $\alpha_1 = \alpha(6(3Fi)^{1/3})^{1/2}$.

Далее можно получить систему уравнений для определения критического числа волнообразования Re_c^* ($\gamma = 0$, $\partial\gamma/\partial\alpha = 0$), которая решалась численно. Результаты по конденсации движущегося пара фреона-21 (на линии насыщения при $T_s = 60$ °C) приведены на рис. 4, 5. Линии 1-6 соответствуют перепадам температур 5; 10; 15; 20; 30; 35 °C. Справа от линий на рис. 4 находятся области неустойчивости, т. е. при таких значениях параметров ω , Re и ΔT имеются нарастающие возмущения. Здесь отметим, что Re на рис. 4, 5 построено по расходу. Крайняя правая граничная точка области устойчивости отвечает критическому числу волнообразования свободно стекающей пленки при наличии фазового перехода $[5[(3Fi)^{1/3}/PrKu]^{0,5}/3]^{6/11}$ (см. п. 2).

Для большей наглядности представленных результатов приведем численные значения скорости $U_\infty = 0,52; 0,73; 0,9; 1,04; 1,47; 1,80$ м/с для $\omega = 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 2,0; 3,0$.

На рис. 5 представлены волновые числа для возмущений на границе области устойчивости. Обозначения линий соответствуют рис. 4. Для фреона-21 величина $(6(3\text{Fi})^{1/3})^{1/2} \approx 57,8$, и основное допущение данной работы (длинноволновость) хорошо выполняется. Как следует из представленных результатов волнообразование начинается с небольших чисел Рейнольдса, несмотря на стабилизирующее влияние поперечного потока массы. В [15] получены экспериментальные данные по интегральному коэффициенту теплоотдачи α_h при конденсации движущегося пара в широких диапазонах скорости пара, перепада температур и расхода в пленке конденсата (точки *I* на рис. 6 взяты из [15] и обобщают данные экспериментов при $(\chi_{ex})^4 \text{Fr}/(\text{PrKu}) = 0,1$ ($\pm 20\%$), $\alpha_{h0} = 4\lambda(g/3\nu^2)^{1/3}/(3\text{Re}^{1/3})$ — интегральный коэффициент теплоотдачи при конденсации неподвижного пара). Точки *II* на рис. 6 взяты из [16] и обобщают данные экспериментов по конденсации неподвижного пара. Отклонение точек *II* от линии $\alpha_h/\alpha_{h0} = 1$ в случае конденсации неподвижного пара свидетельствует о наличии волн, начиная с самых малых чисел Рейнольдса для конденсатной пленки. Для движущегося пара явную теоретическую зависимость интегрального коэффициента теплоотдачи ($\alpha_h = (1/L) \int_0^L q dx / \Delta T = (\lambda/L) \int_0^L dx / h_0$) от расхода в пленке конденсата получить не удастся (см. (4.5)). Сшивая асимптотические зависимости для этого коэффициента на малых и больших x , получим

$$\frac{\alpha_h}{\alpha_0} = \frac{3^{4/3}[1 + (\varkappa^{3/4}\text{Re}/9)^{5/3}]^{2/5}}{(\varkappa^{3/4}\text{Re})^{2/3}}, \quad \varkappa = \left(\frac{\nu g}{U_\infty^3}\right)^{2/3} \left(\frac{\text{PrKu}}{\chi^2}\right)^2. \quad (4.6)$$

Формула (4.6) хорошо описывает соответствующий численный расчет по уравнениям (4.5) (точность $\leq 0,5\%$ в широком диапазоне изменений параметров). Отметим, что данные по теплоотдаче должны хорошо обобщаться в переменных $(\alpha_h/\alpha_0, \varkappa^{3/4}\text{Re})$, что может быть полезно для обработки экспериментальных результатов. Линии 1–3 на рис. 6 отвечают расчету по уравнениям (4.6) для фреона-21 при $\Delta T = 1; 5; 10$ °C, а скорость пара U_∞ рассчитывалась из условия экспериментов (точки *I*) $(\chi_{ex})^4 \text{Fr}/(\text{PrKu}) = 0,1$. Как следует из рис. 6, ход экспериментальной зависимости начинает отклоняться от хода теоретических кривых с самых малых чисел Рейнольдса, что, по всей видимости, свидетельствует о наличии волн и находится в соответствии с полученными нами результатами по устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00879а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T. B. Wave formation in laminar flow down on inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 554–574.
2. Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990.
3. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: ВО «Наука». Сиб. изд. фирма, 1992.
4. Trifonov Yu. Ya., Tselodub O. Yu. Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. Pt 1. Waves of the first family and their stability // J. Fluid Mech. 1991. V. 229. P. 531–553.
5. Chang H.-C., Demekhin E. A., Kopelevich D. I. Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 433–480.

6. Benjamin T. B. Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. P. 161-205.
7. Craic A. D. D. Wind-generated waves in liquid films // J. Fluid Mech. 1966. V. 26. P. 369-392.
8. Cohen L. S., Hanratty T. J. Effect of waves at a gas-liquid interface on a turbulent air flow // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. P. 467-479.
9. Гугучкин В. В., Демехин Е. А., Калугин Г. Н. и др. Волновое движение пленок жидкости, текущих совместно с газовым потоком // Изв. АН. СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 4. С. 174-177.
10. Демехин Е. А., Токарев Г. Ю., Шкадов В. Я. Неустойчивость и нелинейные волны в вертикальной пленке жидкости, текущей в противотоке с турбулентным газовым потоком // Теорет. основы хим. технологии. 1989. Т. 23, № 1. С. 64-70.
11. Spindler B. Linear stability of liquid films with interfacial phase change // Int. J. Heat Mass Transfer. 1982. V. 25, N 2. P. 161-172.
12. Трифонов Ю. Я. Влияние волн конечной амплитуды на испарение стекающей по вертикальной стенке пленки жидкости // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 6. С. 64-72.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
14. Fujii T., Uehara H. Laminar filmwise condensation on a vertical surface // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. V. 15, N 2. P. 217-233.
15. Гогонин И. И., Дорохов А. Р., Сосунов В. И. Теплообмен при пленочной конденсации движущегося пара. Новосибирск, 1980. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики; № 66-80).
16. Гогонин И. И., Дорохов А. Р., Сосунов В. И. Теплообмен при пленочной конденсации неподвижного пара. Новосибирск, 1980. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики; № 48-80).

Поступила в редакцию 27/1 1995 г.
