

**МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДВИЖУЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ
ПРОВОДНИКЕ, СКОРОСТЬ КОТОРОГО
ПРОПОРЦИОНАЛЬНА r^{-1}**

Е. И. Биченков, Е. П. Маточкин

(Новосибирск)

Исследование нестационарных задач о магнитном поле в движущемся проводнике представляет интерес в связи с получением импульсных магнитных полей путем магнитной кумуляции [1]. Поле при этом проникает в проводник по известному механизму нарастания скин-слоя и переносится вместе с проводником. Первый механизм взаимодействия поля с проводником называют диффузией поля, второй — конвекцией.

В настоящей работе рассмотрены пять автомодельных решений задач о магнитном поле в проводнике, скорость которого $v = q(2\pi r)^{-1}$ и проводимость $\sigma = \text{const}$, а также численно решена задача о сжатии поля в цилиндрической полости при движении проводника к оси. Проведено сравнение одного из автомодельных решений с численным.

1. В рассматриваемых задачах магнитное поле в проводнике описывается решением уравнения

$$(1.1) \quad \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \left(\frac{c^2}{2\sigma} - q \right) \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

удовлетворяющим на границе проводника $r = r_*(t)$ условию непрерывности поля

$$(1.2) \quad B|_{r=r_*} = B_*(t)$$

и условию диффузии потока

$$(1.3) \quad \frac{d\Phi_*}{dt} = \frac{c^2}{2\sigma} \left(r \frac{\partial B}{\partial r} \right)_{r=r_*}$$

получаемому из закона Ома и уравнений квазистационарного электромагнитного поля. Здесь $B_*(t)$ — поле на границе проводника, которое предполагается однородным и может зависеть от времени, $\Phi_*(t)$ — поток в цилиндре радиусом $r_*(t)$.

Движению проводника от оси соответствует $q > 0$, движению к оси — $q < 0$. Граница проводника при постоянной интенсивности источника q определяется уравнением

$$(1.4) \quad r_* = (qt\pi^{-1})^{1/2}$$

Момент времени $t = 0$ соответствует началу движения от оси и концу движения к оси. Следовательно, в задачах о разлете проводника $t > 0$, а в задачах о сжатии $t < 0$.

В некоторых задачах вместо поля $B(r, t)$ удобно ввести в рассмотрение поток в движущемся проводнике

$$(1.5) \quad \Phi(a, t) = 2\pi \int_0^{(a^2 + qt\pi^{-1})^{1/2}} rB(r, t) dr$$

или

$$(1.6) \quad \psi(a, t) = 2\pi \int_{(a^2+qt\pi^{-1})^{1/2}}^{\infty} rB(r, t) dr$$

Если поле на оси возрастает не слишком быстро, вводится функция (1.5), если поле и его производные обращаются в нуль на бесконечности, — функция (1.6). Поток Φ , ψ должен удовлетворять уравнению

$$(1.7) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{c^2}{2\sigma} r \frac{\partial B}{\partial r}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{c^2}{2\sigma} r \frac{\partial B}{\partial r}$$

Если $r \partial B / \partial r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то из (1.7) следует, что в неограниченном проводнике поток сохраняется ($\Phi_{a \rightarrow \infty} = \Phi_0$). Если поток в полости обозначить $\Phi_*(t)$, а поток в проводнике — $\Psi_*(t)$, то сохранение полного потока означает, что

$$(1.8) \quad \Phi_*(t) + \Psi_*(t) = \Phi_0$$

При переходе к автомодельной переменной

$$(1.9) \quad x = \pi r^2 (qt)^{-1}$$

или к безразмерным переменным

$$(1.10) \quad \tau = t |q| (\pi r_0^2)^{-1}, \quad \rho = r^2 r_0^{-2}$$

во всех задачах появляется безразмерный параметр

$$(1.11) \quad \mu = \sigma |q| c^{-2}$$

равный половине магнитного числа Рейнольдса.

2. Если расширение цилиндрического проводника началось от оси, то можно сформулировать две автомодельные задачи: проводник расширяется в постоянном поле B_0 ; проводник несет на себе сверхпроводящую оболочку и поток в нем сохраняется. В обеих задачах решение зависит от единственной безразмерной переменной x , определенной (1.9), причем на границе проводника $x = 1$. При расширении проводящего цилиндра в постоянном поле

$$B(x) = B_0 \left(\int_0^1 \xi^{\mu-1} e^{-\mu\xi} d\xi \right)^{-1} \int_0^x \xi^{\mu-1} e^{-\mu\xi} d\xi$$

На оси проводника поле равно нулю.

Определив сечение проводника S , в которое проникло поле, соотношением

$$B_0 S = 2\pi \int_0^{r_*} rB(r, t) dr = qt \int_0^1 B(x) dx$$

можно получить

$$(2.1) \quad S = \pi r_*^2 \left(\mu e^\mu \int_0^1 \xi^{\mu-1} e^{-\mu\xi} d\xi \right)^{-1}$$

Для больших μ интеграл, входящий в (2.1), можно оценить методом Лапласа [2], а для малых μ — разложить экспоненту в нем по степеням

$\mu \xi$ и получить

$$S \approx \pi r_*^2 (2\pi^{-1}\mu^{-1})^{1/2} \quad (\mu \gg 1),$$

$$S \approx \pi r_*^2 (1 - \mu) \quad (\mu \ll 1)$$

откуда глубина проникания поля в проводник

$$\delta \approx r_* (2\pi\mu)^{-1/2} \quad (\mu \gg 1)$$

$$\delta \approx r_* (1 - \mu^{1/2}) \quad (\mu \ll 1)$$

В задаче о расширении цилиндра в сверхпроводящей оболочке распределение потока и поле соответственно имеют вид

$$\Phi(x) = \Phi_0 \left(\int_0^1 \xi^\mu e^{-\mu\xi} d\xi \right)^{-1} \int_0^x \xi^\mu e^{-\mu\xi} d\xi$$

$$B(x) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \Phi_0 \left(\pi r_*^2 \int_0^1 \xi^\mu e^{-\mu\xi} d\xi \right)^{-1} x^\mu e^{-\mu x}$$

Поле обращается в нуль на оси и максимально на границе проводника. Сечение проводника, занятое полем, определяется условием $B_* S = \Phi_0$, где

$$B_* = \Phi_0 \left(\pi r_*^2 \int_0^1 \xi^\mu e^{-\mu\xi} d\xi \right)^{-1} e^{-\mu}$$

поле на границе проводника. Нетрудно видеть, что

$$S = \pi r_*^2 e^\mu \int_0^1 \xi^\mu e^{-\mu\xi} d\xi$$

и описанными ранее способами могут быть получены оценки

$$B_* \approx \Phi_0 (\pi r_*^2)^{-1} (2\pi^{-1}\mu)^{1/2}$$

$$\delta \approx r_* \pi^{1/2} (8\mu)^{-1/2} \quad (\mu \gg 1)$$

$$B_* \approx \Phi_0 (\pi r_*^2)^{-1} (1 + 2^{-1}\mu)$$

$$\delta \approx r_* (1 - (2^{-1}\mu)^{1/2}) \quad (\mu \ll 1)$$

3. Если расширение началось от оси, то могут быть сформулированы тоже две автомодельные по переменной x задачи: в начальный момент поле в проводнике всюду постоянно и равно B_0 ; в начальный момент поле в проводнике отсутствовало, а поток Φ_0 был сосредоточен на оси.

В первой задаче поле в проводнике

$$B(x) = B_0 - B_* \mu e^{\mu x} \int_x^\infty \xi^{\mu-1} e^{-\mu\xi} d\xi$$

а поле в полости

$$(3.1) \quad B_* = B(1) = B_0 \left(1 + \mu e^\mu \int_1^\infty \xi^{\mu-1} e^{-\mu\xi} d\xi \right)^{-1}$$

постоянно, несмотря на движение проводника.

Для больших μ метод Лапласа дает

$$B_* \approx B_0 (2\pi^{-1}\mu^{-1})^{1/2} \quad (\mu \gg 1)$$

Заменой переменной $\mu\xi = t$ интеграл в (3.1) приводится к $\mu^{-\mu} [\Gamma(\mu) - \gamma(\mu, \mu)]$, и после подстановки известных разложений гамма-функции $\Gamma(z)$ и неполной гамма-функции $\gamma(a, z)$ для $|z| \ll 1$ [3] можно получить

$$B_* \approx B_0 (1 + \mu \ln \mu) \quad (\mu \ll 1)$$

Прямые вычисления показывают, что убыль потока в проводнике равна потоку в полости, т. е.

$$2\pi \int_{r_*}^{\infty} r (B_0 - B(r, t)) dr = \pi r_*^2 B_*$$

Таким образом, полный поток в рассматриваемой задаче сохраняется.

Сечение проводника, из которого поток перешел в полость, определяется уравнением $S(B_0 - B_*) = \pi r_*^2 B_*$, из которого следуют оценки толщины токового слоя на поверхности расширяющейся полости

$$\delta \approx 2^{-1} r_* B_* B_0^{-1} \approx r_* (2\pi\mu)^{-1/2} \quad (\mu \gg 1)$$

$$\delta \approx r_* (B_* (B_0 - B_*)^{-1})^{1/2} \approx$$

$$\approx r_* (-\mu \ln \mu)^{-1/2} \quad (\mu \ll 1)$$

Задача о диффузии потока из расширяющейся полости рассмотрена в [4]. Оказывается, что не только полный поток сохраняется, но при $v = q(2\pi r)^{-1}$ постоянны как поток в полости, так и поток в проводнике. Таким образом, при расширении полости в проводнике поток в начальный момент распределяется между полостью и проводником, а затем не меняется.

Вычисления дают для потока в полости

$$\Phi_* \approx \Phi_0 (1 - (2^{-1}\pi\mu^{-1})^{1/2}) \quad (\mu \gg 1)$$

$$\Phi_* \approx \Phi_0 \mu (1 + \mu \ln \mu) \quad (\mu \ll 1)$$

Сечение токового слоя на границе полости

$$S = (\Phi_0 - \Phi_*) B_*^{-1} = \pi r_*^2 (\Phi_0 - \Phi_*) \Phi_*^{-1}$$

а толщина его

$$\delta \approx r_* \pi^{1/2} (8\mu)^{-1/2} \quad (\mu \gg 1)$$

$$\delta \approx r_* \mu^{-1/2} \quad (\mu \ll 1)$$

4. Магнитную кумуляцию описывает задача о сжатии потока в цилиндрической полости. Введя поток в проводнике

$$(4.1) \quad \psi(r, t) = 2\pi \int_r^{\infty} r B(r, t) dr$$

и предположив, что его можно представить в виде

$$\psi(r, t) = (-t)^\beta \varphi(z),$$

$$z = \mu x = \sigma |q| c^{-2} \pi r^2 (qt)^{-1}$$

нетрудно получить, что $\varphi(z)$ должно быть решением вырожденного гипергеометрического уравнения с параметрами $-\beta, \mu$ [5]

$$(4.2) \quad z\varphi'' + (\mu - z)\varphi' + \beta\varphi = 0$$

удовлетворяющего на границе полости $z = \mu$ условию

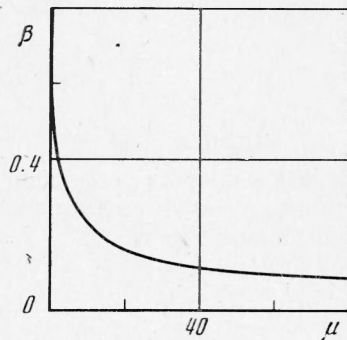
$$(4.3) \quad \mu\varphi'(\mu) = \varphi(\mu)$$

При выводе уравнения (4.2) предполагается, что поле в бесконечности обращается в нуль. Поэтому из двух линейно-независимых решений (4.2) отбирается решение, имеющее степенную асимптотику в бесконечности, и отбрасывается решение с экспоненциальной асимптотикой, т. е.

$$(4.4) \quad \varphi(z) = A\Psi(-\beta, \mu; z)$$

где функция $\Psi(a, c, z)$ определена интегралом [5]

$$(4.5) \quad \Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0$$



Фиг. 1

После подстановки решения (4.4) в граничное условие (4.3) и преобразований, связанных с изменением параметров у функции $\Psi(a, c; z)$, получается уравнение, определяющее β как функцию μ

$$(4.6) \quad (1 - \beta)^2(2 - \beta - \mu) \Psi(2 - \beta, \mu; \mu) = [2(1 - \beta)^2 + \beta(1 - \beta - \mu)] \Psi(1 - \beta, \mu; \mu)$$

Используя изложенную ранее технику для оценки интеграла (4.5), удается получить асимптотики

$$(4.7) \quad \beta \approx (2\pi^{-1}\mu^{-1})^{1/2} \quad (\mu \gg 1) \\ \beta \approx 1 - \mu \quad (\mu \ll 1)$$

Для произвольных значений μ уравнение (4.6) было решено на ЭВМ «Минск-32». Результаты этих расчетов приведены на фиг. 1.

Из полученного решения следует, что если в некоторый момент времени t_0 размер полости был $r_0 = (qt_0\pi^{-1})^{1/2}$ и поток в ней был Φ_0 , то в любой другой момент времени поток в полости будет

$$(4.8) \quad \Phi_* = \Phi_0 (r_* r_0^{-1})^{2\beta} = \Phi_0 (t t_0^{-1})^\beta$$

а поле

$$B_* = \Phi_0 (\pi r_0^2)^{-1} (r_* r_0^{-1})^{2(\beta-1)}$$

Так как $0 < \beta \leq 1$, то при сжатии ($r_* \rightarrow 0$) поток целиком уходит в проводник, хотя поле в полости возрастает неограниченно, т. е. утечка потока не может быть ограничением величины поля, получаемого при сжатии потока в цилиндрической полости.

Из (4.7) и (4.8) видно, что при больших μ поток в полости сначала убывает медленно и лишь к концу сжатия резко обращается в нуль. Можно оценить время утечки потока t^* и критический размер полости

r^* из условия

$$\frac{d\Phi_*}{dt} \Big|_{t=t^*} = \frac{\Phi_0}{t_0}$$

откуда после подстановки (4.8) нетрудно получить

$$t^* = t_0 \beta^{1/(1-\beta)}, \quad r^* = r_0 \beta^{1/2(1-\beta)}$$

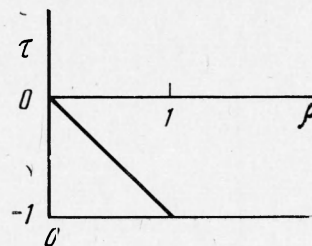
Для больших μ из (4.7) следует:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} t^* &\approx t_0 (2\pi^{-1}\mu^{-1})^{1/2} \\ r^* &\approx r_0 (2\pi^{-1}\mu^{-1})^{1/4} \quad (\mu \gg 1) \end{aligned}$$

Рассматривая сжатие потока в цилиндрической полости, можно считать, что до момента t^* преобладает перенос поля проводником, а на более поздних стадиях сжатия решающей становится диффузия поля в проводник.

Концу сжатия соответствует $z \rightarrow \infty$. Поле и поток в проводнике в этот момент

$$(4.10) \quad \begin{aligned} B_k(r) &= \Phi_0(\pi r_0^2)^{-1}(\Psi(-\beta, \mu; \\ &\mu))^{-1}\beta\mu^\beta (rr_0^{-1})^{2(\beta-1)} \\ \Phi_k(r) &= \Phi_0 (\Psi(-\beta, \mu; \mu))^{-1} \times \\ &\times \mu^\beta (rr_0^{-1})^{2\beta} \end{aligned}$$



Фиг. 2

Определив глубину проникания поля в проводник δ соотношением $\Phi_k(\delta) = \Phi_0$, можно получить из (4.10)

$$\delta = r_0 \mu^{-1/2} (\Psi(-\beta, \mu; \mu))^{1/2\beta}$$

Для больших μ

$$(4.11) \quad \delta \approx r_0 \exp\left[-\frac{(1 + \pi + c/2)}{2}\right] (2\mu)^{-1/4} \quad (\mu \gg 1)$$

Здесь $C = 0.577 \dots$ — постоянная Эйлера [3]. Следует отметить совпадение по порядку величины критического размера полости r^* (4.9), из которой поток быстро уходит в проводник, и глубины проникания поля в проводник δ в конце сжатия (4.11) при $\mu \gg 1$.

Степенной закон (4.8) убывания потока в полости при $\mu \gg 1$ совпадает с результатом, упоминаемым в [6].

5. Чтобы выяснить, в каком отношении находятся автомодельные решения с задачами магнитной кумуляции, была решена численно задача о сжатии поля в цилиндрической полости. Предполагалось, что в начальный момент поле в полости и в проводнике однородно и равно B_0 , а радиус полости равен r_0 . После перехода к безразмерным переменным τ и ρ , определенным (1.10), задача сводилась к интегрированию в полосе со срезанным углом (фиг. 2) уравнения

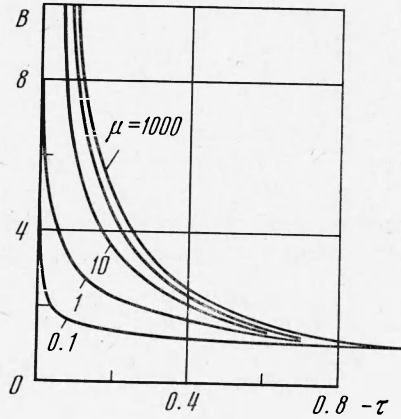
$$(5.1) \quad \frac{\partial B}{\partial \tau} - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial B}{\partial \rho} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 B}{\partial \rho^2} = 0$$

если вычислялось поле, или уравнения

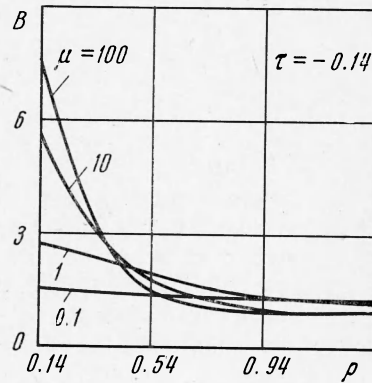
$$(5.2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} = 0$$

если вычислялся поток ψ , проникший в проводник на глубину, большую r (4.1).

Разностные схемы решения уравнений (5.1) и (5.2) устойчивы при любом отношении $\Delta\tau / \Delta\rho$ [7]. Поэтому при счете просто выбиралась квадратная сетка $\Delta\tau = \Delta\rho$. Задача решалась на ЭВМ «Минск-32» методом



Фиг. 3

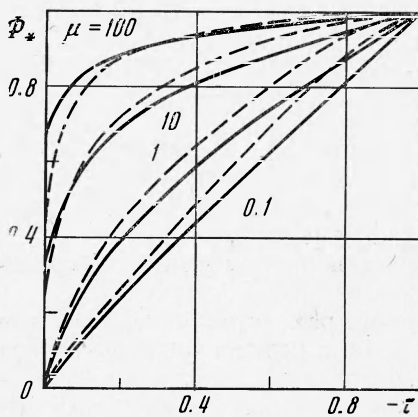


Фиг. 4

прогонки. Сеточные переменные связаны с переменными τ и ρ соотношениями

$$I = M(\rho_\infty - \rho), \quad J = M\tau$$

где M^{-1} — шаг сетки. Координата ρ_∞ выбиралась из условия малости времени замыкания полости по сравнению с временем нарастания скин-слоя на глубину ρ_∞ . Для $\mu \gg 1$ это условие дает $(\rho_\infty - 1) \gg (4\mu)^{-1}$.



Фиг. 5

В результате счета были получены распределения поля и потока в проводнике и поле в полости в разные моменты времени для значений $\mu = 0.1, 1, 10, 100, 1000$. Небольшой объем памяти ЭВМ не позволял вести счет с шагом мельче 30^{-1} , из-за чего вблизи момента замыкания полости счет сильно огрублялся. При $\mu > 1$ более точным оказалось решение уравнения для потока (5.2), при $\mu \leq 1$ точнее было уравнение для поля (5.1). Результаты расчета поля в полости приведены на фиг. 3, а распределение поля в проводнике в момент $\tau = -0.14$ — на фиг. 4.

Был произведен более точный расчет потока в полости, в котором машинная память использовалась только для двух соседних строчек по времени, что позволило довести шаг счета до 500^{-1} . Такая организация счета возможна только для больших μ , так как ρ_∞ при $\mu \leq 1$ велико и приходится далеко считать по пространственной переменной. На фиг. 5 пунктиром представлена рассчитанная таким образом зависимость потока от времени и сплошной линией — автомодельное решение (4.8). Привязка решений производилась в начальный момент времени. Из сравнения

обоих решений видно, что вначале сжатия поток в неавтомоделльной задаче убывает медленнее, чем в автомоделльной, а к концу — быстрее. Это происходит оттого, что в начальный момент поле в неавтомоделльной задаче однородно в проводнике и утечки потока из полости нет. Начальная фаза сжатия поля в этой задаче совпадает с решением о сжатии потока идеальным проводником. С ростом поля в полости при сжатии ее возрастает градиент поля на границе, причем в неавтомоделльной задаче быстрее, чем в автомоделльной, что в соответствии с (1.3) и приводит к более быстрому уходу потока из полости в конце сжатия.

В заключение следует отметить, что во всех задачах, рассмотренных в п. 2, 3, получилась примерно одинаковая асимптотика для глубины проникания поля в движущийся проводник при $\mu \gg 1$. Это естественно, так как при больших μ определяющим становится процесс переноса поля проводником. При этом если направление убывания поля совпадает с направлением движения, то глубина проникания поля оказывается в $\pi/2$ больше, чем в случае противоположного направления скорости и градиента поля. Резкое отличие асимптотики (4.11) решения для сжатия поля в полости от решений остальных задач при $\mu \gg 1$ связано с ростом поля и его градиента на границе при смыкании полости.

Поступила 23 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахаров А. Д., Людаев Р. З., Смирнов Е. Н., Плющев Ю. И., Павловский А. И., Чернышев В. К., Феоктистова Е. А., Жаринов Е. И., Зыкин Ю. А. Магнитная кумуляция. Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 1, стр. 65.
2. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
3. Янке Е., Эмде Б., Лёш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.
4. Биченков Е. И. Некоторые особенности диффузии магнитного поля в движущийся проводник. ПМТФ, 1967, № 1.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965.
6. Сахаров А. Д. Взрывомагнитные генераторы. Усп. физ. н., 1966, т. 88, № 4, стр. 725.
7. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.