

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВЕТРОВЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Р. Л. Куляев

(Новосибирск)

Обзор современного состояния исследований ветровых волн можно найти в ряде работ (например, [1, 2]). В [3] предложен метод решения задачи о движении внутренних волн конечной амплитуды. Однако использованный при этом алгоритм оказался малоэффективным в случае ветровых волн. В связи с этим в данной работе предлагается новый алгоритм. Результаты проведенных расчетов согласуются с данными наблюдений реальных ветровых волн.

1. Рассматривается плоское движение в поле силы тяжести двух невязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей разной плотности. Течение полагается непрерывным во всей плоскости, потенциальным вне линии раздела жидкостей и периодическим по горизонтальному направлению.

Пусть ось ординат декартовой системы координат x, y направлена вертикально вверх (фиг. 1). В верхней D_1 и нижней D_2 областях течения скорость жидкости $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ удовлетворяет уравнениям

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0, (x, y) \notin L,$$

условию периодичности

$$(1.2) \quad \mathbf{V}(x + \lambda, y, t) = \mathbf{V}(x, y, t), (x, y) \notin L$$

и следующим граничным условиям: затуханию возмущенной скорости течения при удалении от линии раздела L

$$(1.3) \quad V_i(x, y, t) \sim \begin{cases} (-v_\infty - u, 0), & y \rightarrow +\infty, \\ (v_\infty - u, 0), & y \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

непротеканию жидкостей через линию раздела

$$(1.4) \quad \mathbf{V}_j \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, j = 1, 2, (x, y) \in L,$$

закону Лапласа для перепада гидродинамического давления на линии раздела

$$(1.5) \quad p_1 - p_2 = \mu k, (x, y) \in L,$$

где λ — длина волны; t — время; $v_\infty = \text{const}$ — половина скорости ветра; $u = \text{const}$; \mathbf{v} — орт нормали к L , внешней для области D_2 ; \mathbf{w} — скорость движения точек линии L ; \mathbf{V}_j и p_j — предельные значения скорости \mathbf{V} и давления p соответственно при подходе к L из области D_j , $j = 1, 2$; μ — коэффициент поверхностного натяжения; k — кривизна линии раздела, причем $k > 0$, если область D_1 выпукла в окрестности рассматриваемой точки.

Начальное поле скоростей

$$(1.6) \quad \mathbf{V}(x, y, 0) = \mathbf{V}_0(x, y)$$

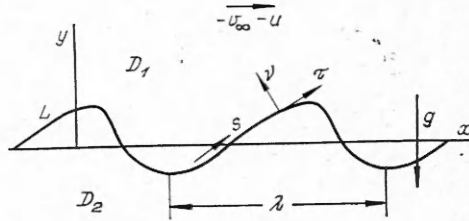
предполагается известным и удовлетворяющим условиям (1.1)–(1.4).

Задача (1.1)—(1.6) нелинейна, поскольку условие (1.5) нелинейно относительно поля скоростей течения, а линия раздела L и ее скорость перемещения $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ неизвестны при $t > 0$.

2. Пусть линия L гладкая и не имеет особых точек. Введем величину $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ равенством

$$v_x - iv_y = -u + \frac{1}{2\lambda l} \int_0^{l(t)} \gamma(\sigma, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} [\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)] d\sigma,$$

где l — длина контура волны; s, σ — дуговые абсциссы; положительным обходом контура L считается тот, при котором область D_1 остается слева (см. фиг. 1); $\gamma(s, t) = (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}$ — интенсивность вихревого слоя; $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к L , направленный в сторону отсчета дуговой абсциссы; $\zeta(s, t) = \xi + i\eta$ — комплексная координата точек линии раздела; предполагается, что функции γ и $\partial\zeta/\partial s$ как функции дуговой абсциссы непрерывны по Гельдеру; интеграл понимается в смысле главного значения Коши.



Ф и г. 1

В [3] при выводе уравнений движения внутренней волны касательная компонента $w_\tau = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}$ скорости движения ее точек полагалась равной $w_\tau = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}$. В этом случае уравнения имеют наиболее простой вид. Однако построенный в [3] алгоритм численного решения этих уравнений оказался малоэффективным для расчета движения ветровых волн (когда $v_\infty \neq 0$). Это обстоятельство обусловлено тем, что расчетные точки с течением времени концентрируются на одном участке ветровой волны и разрезаются на другом. Попытки введения в алгоритм процедуры равномерного перераспределения расчетных точек вдоль контура волны не привели к улучшению алгоритма, поскольку эта процедура существенно ухудшает его устойчивость.

Указанная тенденция в поведении расчетных точек устраняется, если потребовать $w_\tau \equiv 0$. В этом случае уравнения движения волны выводятся аналогично [3]. При этом производится переход от эйлеровой дуговой абсциссы $s \in [0, l(t)]$ к лагранжевой переменной $a \in [-\pi, \pi]$ с соответствием во времени между точками профиля волны вида

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}(a, t), \frac{\partial \eta}{\partial t}(a, t) \right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})_a^* \mathbf{v};$$

вводится функция

$$\Gamma(a, t) = \gamma(s(a, t), t) |\zeta_a(a, t)|;$$

предполагается, что в окрестности момента $t = 0$ производные $\partial\Gamma/\partial a$ и $\partial^3\zeta/\partial a^3$ существуют и как функции лагранжевой переменной непрерывны по Гельдеру. Тогда уравнения движения волны относительно функций $\Gamma(a, t)$ и $\zeta(a, t)$ имеют вид

$$(2.1) \quad \bar{\zeta}_t(a, t) = \frac{i}{\zeta_a(a, t)} \operatorname{Im} \{ \zeta_a(a, t) \bar{v}(a, t) \};$$

$$(2.2) \quad \Gamma_t(a, t) + R \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_t(\alpha, t) K(a, \alpha, t) d\alpha = \bar{H}(a, t),$$

где

$$\bar{v}(a, t) = -u + \frac{1}{2\lambda i} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(\alpha, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} [\zeta(a, t) - \zeta(\alpha, t)] d\alpha;$$

$$K(a, \alpha, t) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \left\{ \zeta_a(a, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} [\zeta(a, t) - \zeta(\alpha, t)] \right\};$$

$$H(a, t) = 2R \operatorname{Re} \left\{ \zeta_a \frac{\pi}{\lambda^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(\alpha) \frac{\zeta_t(a) - \zeta_t(\alpha)}{1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} [\zeta(a) - \zeta(\alpha)]} d\alpha \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{2\mu k}{\rho_1 + \rho_2} - \gamma v_\tau - R \left(\frac{\gamma^2}{4} + 2g\eta + v_\tau^2 - v_v^2 \right) \right\} - 2R \operatorname{Re} \{ \zeta_{ta} \bar{v} \},$$

где ρ_j — плотность жидкости в области D_j , $j = 1, 2$; параметр $R = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$; g — ускорение силы тяжести; $v_\tau - iv_v = \bar{v} \zeta_a / |\zeta_a|$.

Исходная задача (1.1)—(1.6) эквивалентна задаче Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений (2.1), (2.2) с начальными данными

$$(2.3) \quad \Gamma(a, 0) = \Gamma_0(a), \quad \zeta(a, 0) = \zeta_0(a),$$

где функции Γ_0 и ζ_0 заданы. Функция Γ_0 должна удовлетворять условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_0(a) da = 2v_\infty \lambda.$$

Заметим, что система (2.1), (2.2) существенно отличается от аналогичной системы в [3].

Численное решение задачи (2.1)—(2.3) проводится аналогично [3] с использованием формулы Тэйлора

$$(2.4) \quad \Gamma(a, t + \Delta t) = \Gamma(a, t) + \Gamma_t(a, t)\Delta t + \Gamma_{tt}(a, t)(\Delta t)^2/2;$$

$$(2.5) \quad \zeta(a, t + \Delta t) = \zeta(a, t) + \zeta_t(a, t)\Delta t + \zeta_{tt}(a, t)(\Delta t)^2/2 + \\ + \zeta_{ttt}(a, t)(\Delta t)^3/6.$$

Значение шага Δt , обеспечивающего устойчивость счета, выбирается путем проведения пробных расчетов с разными шагами Δt до тех пор, пока шаг не станет меньше некоторого критического значения Δt_* . Для контроля точности расчетов используются следующие инварианты системы (2.1), (2.2):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(a, t) da = 2v_\infty \lambda, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}(a, t) \zeta_a(a, t) da = -u\lambda.$$

Для подавления коротковолновой неустойчивости [3] применяется сглаживание на каждом шаге вычисленных значений функций Γ , ζ_t , Γ_t , ζ_{tt} , Γ_{tt} , ζ_{ttt} . При этом в качестве сглаженного значения функции в некоторой точке принимается значение в этой точке полинома третьей степени, аппроксимирующего функцию по ее значениям в данной и шести сосед-

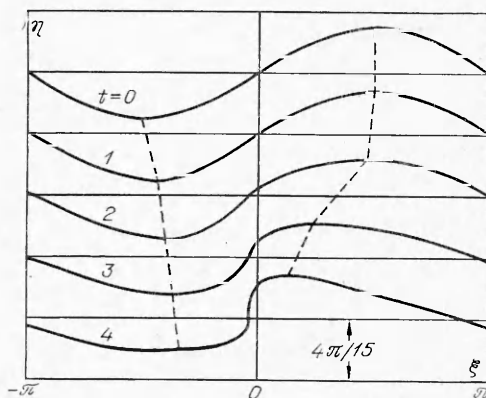
них точках (трех слева и трех справа) по методу наименьших квадратов.

Программа, реализующая алгоритм, составлена на языке АЛЬФА-6 для вычислительной машины БЭСМ-6. При шестидесяти расчетных точках на контуре волны расчет одного шага по формулам (2.4), (2.5) занимает 16 с машинного времени, а без учета производных Γ_{tt} и ζ_{tzt} — 11 с.

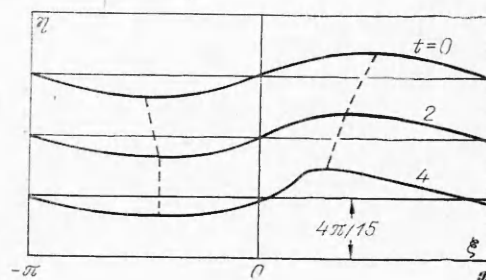
3. Приведем примеры расчетов ветровых волн на поверхности раздела вода — воздух ($R = 0,9975$). В рассмотренных ниже вариантах в качестве единиц длины и времени выбираются величины $\lambda/(2\pi)$ и $\lambda/(2\pi v_\infty)$. Безразмерные параметры $Fr = g\lambda/(2\pi v_\infty^2)$, $W = \mu/(\rho_1 + \rho_2) \{\lambda/(2\pi)\}^{-1} v_\infty^{-2}$ — числа Фруда и Вебера. Константа u задается такой, что система координат x, y движется со скоростью волны бесконечно малой амплитуды. Начальное поле скоростей выбирается в соответствии с линейной теорией [4].

Ветровая гравитационная волна. Вариант 1: $Fr = 0,2556$; $u = 0,4975$; $\zeta(a, 0) = a + i0,2\pi \sin a$; $\Gamma(a, 0) = 2 + 0,199\pi \sin a$. Вариант 2: $Fr = 0,64$; $u = 0,2$; $\zeta(a, 0) = a + i0,1\pi \sin a$; $\Gamma(a, 0) = 2 + 0,04 \times \pi \sin a$. Счет в обоих вариантах ведется до момента $t = 4$ с шагом $\Delta t = 1/10$. Форма волн для различных моментов времени приведена на фиг. 2, 3 (вариант 1, 2 соответственно), при этом вершины и впадины волн соединены отрезками штриховых прямых. Эволюция волн характеризуется следующими особенностями: симметрия волн нарушается; наветренные узлы движутся со скоростью волн бесконечно малой амплитуды; подветренные склоны волн становятся более крутыми, а наветренные — более пологими. Последняя тенденция проявляется интенсивнее в варианте с большей крутизной волны. Следует отметить, что крутизна и скорость волны, влияющие на устойчивость ее эволюции, в первом варианте (в отличие от второго) лежат вне диаграммы крутизна — скорость волны, справедливой для реальных волн [1], фиг. 6.4—2). Указанные особенности эволюции ветровых волн согласуются с данными натурных наблюдений.

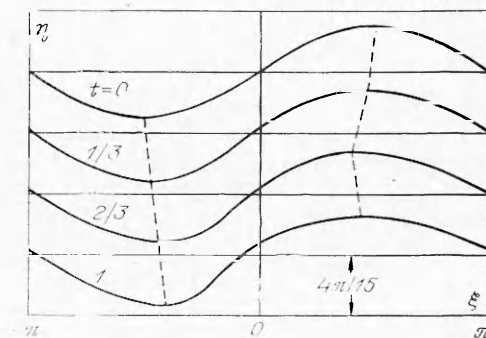
При значениях $0 < Fr < 1/R$ — R действует тенденция, обратная вышеописанной: подвет-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ренные склоны волн становятся более пологими, а наветренные — более крутыми.

Ветровая капиллярная волна. Вариант 3: $W = 3,995$; $u = -1$; $\zeta(a, 0) = a + i0,2\pi \sin a$; $\Gamma(a, 0) = 2 - 0,4\pi \sin a$. Счет ведется до момента $t = 1$ с шагом $\Delta t = 1/90$ без учета производных $\bar{\Gamma}_{,ij}$ и $\zeta_{,ij}$. Эволюция волны, приведенная на фиг. 4 (вершины и впадины волн также соединены отрезками штриховых прямых), подобна эволюции гравитационных волн и дополнительно характеризуется тем, что вершина волны становится более пологой, а впадина — более глубокой.

При уменьшении чисел Фруда и Вебера от значений, указанных в вариантах 1—3, эволюция волны замедляется, в то время как критический шаг Δt_* остается почти неизменным. Последнее обстоятельство приводит к тому, что даже большие затраты машинного времени при расчете волн ряби не выявляют роли нелинейных эффектов, обусловленных конечностью амплитуды волны. Это означает, что линейная теория хорошо описывает движение волн ряби конечной амплитуды.

Поступила 22 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Kinsman B. Wind Waves. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1965.
2. Barnett T. P., Kenyon K. E. Recent advances in the study of wind waves.—«Reports on Progress in Physics», 1975, vol. 38, N 6.
3. Куляев Р. Л. Исследование внутренних волн конечной амплитуды.—ИМТФ, 1975, № 1.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

УДК 532.51 : 532.135

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С СИЛЬНО ВЯЗКИМ ЯДРОМ В ОХЛАЖДАЕМОМ КАНАЛЕ

А. С. Романов

(Москва)

Среди неньютоновских жидкостей важное место занимают вязкопластические жидкости [1, 2], гидродинамическая устойчивость плоского пуазейлева течения которых исследовалась в работах [3, 4]. Механические свойства вязкопластических сред определяются безразмерным реологическим уравнением, связывающим девиатор тензора напряжений σ_{ij} с тензором скоростей деформации f_{ij} [1]:

$$(1) \quad \sigma_{ij} = 2 \left(1 + \frac{\kappa}{\sqrt{2f_{ij}f_{ij}}} \right) f_{ij} \quad \text{при} \quad \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}} \geq \kappa,$$

$$f_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}} \leq \kappa,$$