

О РАСЧЕТЕ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНОГО ОБЪЕМНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

В. В. Александров, В. Н. Диесперов
(Москва)

Анализ несамостоятельного объемного электрического разряда на фазовой плоскости позволяет весьма просто описать структуру этого явления и построить вольт-амперные характеристики в широком диапазоне параметров.

1. Объемный электрический разряд в плотном газе, индуцированный жестким ультрафиолетовым, рентгеновским, реакторным излучением или же пучком быстрых электронов, имеет большое применение при конструировании рабочих камер мощных электроионизационных газовых лазеров [1, 2] и сильноточных коммутаторов [3]. Этот разряд можно смоделировать плоским конденсатором, к обкладкам которого приложено достаточно высокое напряжение. Межэлектродное пространство заполнено газом, имеющим температуру порядка комнатной, который слабо ионизован за счет внешнего источника, например электронного пучка. При ряде предположений, достаточно хорошо выполняющихся для современных лазеров [1, 2, 4], несамостоятельный стационарный объемный электрический разряд можно описать следующей системой уравнений для электронов и ионов, движущихся в неподвижном газе нейтральных частиц:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{dj_e}{dx} &= -\frac{dj_i}{dx} = j_e \alpha + q - \beta n_e n_i, \\ \frac{dE}{dx} &= 4\pi |e| (n_e - n_i), \quad j_e = \mu_e n_e E/p, \quad j_i = \mu_i n_i E/p, \\ j_e(0) &= \gamma j_i(0), \quad j_i(1) = 0, \quad \int_0^L E dx = U. \end{aligned}$$

Здесь координата x отсчитывается от катода ($x = 0$) к аноду ($x = 1$); j_e и j_i — плотности электронного и ионного токов; n_e и n_i — плотности электронов и ионов. Изменение электронного и ионного токов происходит за счет ударной ионизации нейтральных частиц электронами, пропорциональной произведению плотности электронного тока на функцию α ударного рождения, внешней ионизации, мощность которой q будем считать известной величиной, и бинарной рекомбинации, равной произведению $n_e n_i$ с коэффициентом пропорциональности β , называемым первым коэффициентом Таунсенда. В рассматриваемом дрейфовом приближении токи j_e и j_i пропорциональны напряженности E электрического поля, где μ_e и μ_i — подвижности электронов и ионов [5], а p — давление нейтрального газа. Уравнение для поля E , в котором через e обозначен заряд электрона, замыкает эту систему. Бомбардировка катода ионами вызывает эмиссию электронов из катода, которая характеризуется величиной γ — вторым коэффициентом Таунсенда. Ионный ток на аноде равен нулю. На обкладках конденсатора поддерживается разность потенциалов U .

Для функции α ударного рождения наиболее употребительны две аппроксимации [5]:

$$(1.2) \quad \alpha = A p (E/p - B)^2 \Theta(E/p - B);$$

$$(1.3) \quad \alpha = C p \exp(-D p/E),$$

где Θ — функция Хевисайда. Для азота, например, $A = 1,17 \times 10^{-4}$ см·мм рг. ст.·В⁻², $B = 32,2$ В·см⁻¹·мм рг. ст.⁻¹, $C = 5,7$ см⁻¹·мм рг. ст.⁻¹, $D = 260$ В·мм рг. ст.⁻¹·см⁻¹. Подвижность ионов и электронов и коэффициент бинарной рекомбинации примем постоянными величинами: $\mu_i = 2 \cdot 10^3$ см²·мм рг. ст.·В⁻¹·см⁻¹, $\mu_e = 3 \cdot 10^5$ см²·мм рг. ст.·В⁻¹·см⁻¹, $\beta = 2 \cdot 10^{-7}$ см³·с⁻¹. Обычное значение величины γ в режиме несамостоятельного объемного разряда имеет порядок 10^{-2} .

Прямой задачей назовем задачу отыскания решения системы (1.1) по заданным значениям p , q , U . Сформулируем обратную задачу. Складывая первые два уравнения и интегрируя, получим первый интеграл системы (1.1)

$$(1.4) \quad J_0 = j_e + j_i = \text{const},$$

выражающий закон сохранения полного тока. Обратная задача заключается в решении (1.1) по заданным p , q , J_0 . Другая возможная формулировка обратной задачи будет описана ниже.

Зависимость $U = U(J_0)$ будем называть вольт-амперной характеристикой. Численный расчет вольт-амперных характеристик в физической плоскости по системе (1.1) при постоянных q , p проводился в работах [1, 2, 4, 6, 7]. При заданном J_0 на некотором расстоянии x от катода задавалось значение напряженности E . Затем подбором x и E находилась интегральная кривая, удовлетворяющая граничному условию на катоде.

Сравнение расчетных вольт-амперных характеристик несамостоятельного разряда в азоте атмосферного давления с экспериментальными показало хорошее совпадение в области больших токов [1, 2].

Обезразмерим исходные уравнения (1.1) по формулам

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x &= Lx', \quad n_e = n_0 n'_e, \quad n_i = n_0 n'_i, \quad J_0 = j_{e0} J'_0, \quad j_e = j_{e0} j'_e J'_0, \\ j_i &= j_{i0} j'_i J'_0, \quad E = E_0 E', \quad j_{e0} = \mu_e n_0 E_0 / p_0, \quad p = p_0 p', \\ q &= q_0 q', \quad n = \sqrt{q_0 / \beta}, \end{aligned}$$

где p_0 и q_0 — характерные для класса физических устройств давление и объемная частота ионизации внешним источником; n_0 — концентрация электронов или ионов в положительном столбе объемного разряда при мощности объемной ионизации q . Характерное значение напряженности E_0 электрического поля будет определено ниже.

Напишем безразмерные уравнения, используя интеграл (1.4) и опуская штрихи:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \frac{dj_e}{dx} &= \frac{j_e p}{\Delta} S(vE/p) + r_R \left[\frac{q}{J_0} - \frac{J_0 j_e (1 - j_e)}{\mu E^2} \right], \\ \frac{dE}{dx} &= \frac{(1 + \mu) J_0}{\mu \sigma E} [j_e - 1/(1 + \mu)], \quad j_i = 1 - j_e; \end{aligned}$$

$$(1.7) \quad j_e(0) = \gamma/(1 + \gamma), \quad j_e(1) = 1, \quad \int_0^1 E dx = U/(LE_0);$$

$$(1.8) \quad \tau_R = \frac{L p_0 n_0 \beta}{\mu_e E_0}, \quad \mu = \mu_i / \mu_e, \quad \sigma = \frac{E_0}{4\pi |e| n_0 L}.$$

Для аппроксимаций (1.2), (1.3) имеем соответственно

$$(1.9) \quad S(\xi) = (\xi - 1)^2 \Theta(\xi - 1), \quad \Delta = 1/L p_0 A B^2, \quad v = E_0 / p_0 B;$$

$$(1.10) \quad S(\xi) = \exp(-1/\xi), \quad \Delta = 1/L p_0 C, \quad v = E_0 / p_0 D.$$

Если p и q постоянны, то система (1.6) является автономной. Положение ее точек равновесия определяется уравнениями

$$\frac{j_e p}{\Delta} S(\nu E/p) + \tau_R \left[\frac{q}{J_0} - \frac{J_0 j_e (1 - j_e)}{\mu E^2} \right] = 0,$$

$$j_i = 1/(1 + \mu), \quad E \neq 0,$$

из которых получается соотношение

$$(1.14) \quad \frac{p}{(1 + \mu)\Delta} S(\nu E/p) + \tau_R \left[\frac{q}{J_0} - \frac{J_0}{(1 + \mu)^2 E^2} \right] = 0,$$

связывающее между собой полный ток J_0 и значение напряженности $E = E^0$ в особой точке O . Уравнение (1.14) для положительных J_0 и E^0 всегда однозначно разрешимо. Поэтому можно ставить обратную задачу, задавая либо величину E^0 , либо J_0 . Последняя возможность отмечалась выше. Однако в этом случае возникают сложности в решении уравнения (1.14) для определения корня $E^0 = E^0(J_0)$ и в дальнейшем аналитическом исследовании задачи. В первом случае корень $J_0(E^0)$ находится из решения квадратного уравнения. Ниже будет рассматриваться именно эта постановка задачи.

Будем считать, что значение E^0 в особой точке O всегда равно 1. Это означает, что в качестве характерной напряженности E_0 задачи выбирается напряженность электрического поля в точке O .

Зафиксируем некоторые значения характерных величин переменных (1.5) и вычислим по ним τ_R , σ , ν , Δ . Если задать другие значения размерных переменных — напряженности E_{01} электрического поля в особой точке O и давления p_1 газа — и обозначить через ε отношение $E_{01}/(E_0 p)$, ($p_1/p_0 = p$), то $\tau_R^1 = \tau_R/\varepsilon$, $\sigma^1 = \varepsilon p \sigma$, $\nu^1 = \varepsilon \nu$, $\Delta^1 = \Delta/p$. Характерное значение плотности тока при этом изменится пропорционально ε .

Теперь сформулируем обратную задачу, которая будет исследоваться ниже: по заданным ε , p и q определить решение системы уравнений

$$(1.12) \quad \frac{dx}{dj_e} = \frac{\kappa}{\omega j_e S(\varepsilon \nu E) + [q/J_0^2 - j_e(1 - j_e)/(\mu E^2)]}, \quad E > 0;$$

$$(1.13) \quad \frac{dE}{dj_e} = \frac{1}{\delta E} \frac{j_e - 1/(1 + \mu)}{\omega j_e S(\nu E) + [q/J_0^2 - j_e(1 - j_e)/(\mu E^2)]};$$

$$(1.14) \quad \kappa = \frac{\varepsilon}{\tau_R J_0}, \quad \frac{1}{\delta} = \frac{1 + \mu}{\mu \sigma \tau_R p}, \quad \omega = \frac{\varepsilon p}{J_0 \tau_R \Delta};$$

$$(1.15) \quad J_0 = (1 + \mu) \left[\frac{\varepsilon p S(\nu \varepsilon)}{2\Delta \tau_R} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2 p^2 S^2(\nu \varepsilon)}{4\Delta^2 \tau_R^2} + q} \right],$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$(1.16) \quad x[\gamma/(1 + \gamma)] = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение ищется в $C^1[\gamma/(1 + \gamma), 1]$.

Уравнение (1.13) имеет особые точки: узлы $A(0,0)$ и $B(1,0)$ и седло $O[1/(1 + \mu), 1]$ (фиг. 1). В окрестности седла O система (1.12) (1.13) сводится к уравнениям

$$(1.17) \quad \frac{dx}{dz} = \frac{\kappa}{a_{11}z + a_{12}y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{a_{21}z}{a_{11}z + a_{12}y},$$

$$z = j_e - 1/(1 + \mu), \quad y = E - 1, \quad 0 < y \ll 1, \quad |z| \ll 1,$$

$$a_{11} = \omega S_0(\varepsilon \nu) + \frac{1}{\mu} \frac{1 - \mu}{1 + \mu}, \quad a_{12} = \omega S_1 + \frac{2}{(1 + \mu)^2}, \quad a_{21} = \frac{1}{8},$$

где величины $S_0(\xi)$ и $S_1(\xi)$ являются коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции $S(\xi E)$ в окрестности точки $E = 1$.

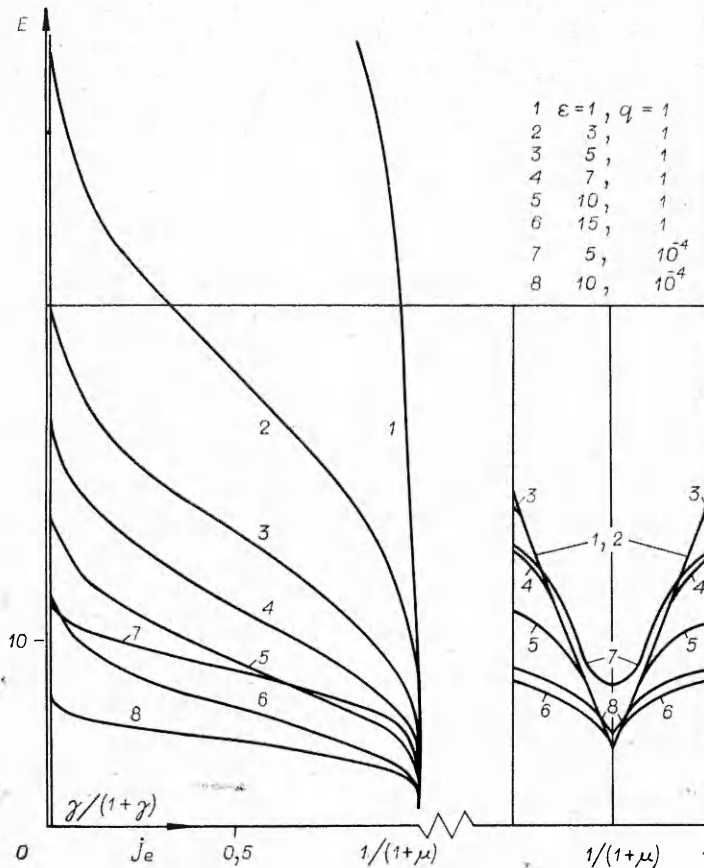
Характеристические числа второго уравнения (1.17) равны

$$\lambda_A = a_{11}/2 + \sqrt{a_{11}^2/4 + a_{12}a_{21}} > 0, \quad \lambda_K = a_{11}/2 - \sqrt{a_{11}^2/4 + a_{12}a_{21}} < 0.$$

Поведение интегральных кривых на фазовой плоскости (j_e, E) в окрестности точки O описывается интегралом

$$(1.18) \quad \left| z - \frac{\lambda_K}{a_{21}} y \right| = K \left| z - \frac{\lambda_A}{a_{21}} y \right|^{\lambda_A/\lambda_K}, \quad K = \text{const.}$$

Интегральные кривые, входящие и выходящие из точки O , назовем сепаратрисами. Их поведение представлено на фиг. 1. Точки пересечения сепаратрис с прямыми $j_e = \gamma/(1 + \gamma)$ и $j_e = 1/(1 + \mu)$ при $E > 1$ обозначим соответственно через E_K и E_A . Область, которая находится выше сепаратрис и в которой в дальнейшем будет изучаться поведение интегральных кривых, обозначим через G . Подобласть $\gamma/(1 + \gamma) - 1/(1 + \mu) \leq z \leq 0$ назовем катодной, а $0 \leq z \leq \mu/(1 + \mu) - 1/(1 + \mu)$ — анодной. Обозначим через E_{II} точку на прямой $j_e = 1/(1 + \mu)$, через которую проходит интегральная кривая, удовлетворяющая условиям краевой задачи (1.12) — (1.16). Назовем эту интегральную кривую истинной. Через y_{II} обозначим разность $E_{II} - 1 = y_{II}$. Все несущественные постоянные ниже будем обозначать одной буквой C .



Ф и г. 1

2. Отметим, что в краевой задаче (1.12) — (1.16) интегрирование уравнения (1.13) проводится независимо от уравнения (1.12). Истинные кривые находились следующим образом. Начало координат оси x помещалось в точку $(1/(1 + \mu), E_n)$. Это можно сделать, так как система (1.12), (1.13) инвариантна относительно сдвига x . Бралось произвольное $E_n > 1$. Из точки $(1/(1 + \mu), E_n)$ в обе стороны выпускалась интегральная кривая. Одновременно рассчитывалось $x = |x_K| + x_A$ (а также падение потенциала $[\Delta\phi]$ интегрированием $E - E_n$). Здесь x_K — величина x , получающаяся при интегрировании системы (1.12), (1.13) в катодной области, а x_A — в анодной. Для истинной кривой $x = 1$. Характерной чертой задачи является наличие больших градиентов в окрестности седловой точки O и большого количества независимых параметров, от которых существенным образом зависит поведение интегральных кривых. Численные расчеты показали, что в широком диапазоне изменения параметров величина y_n практически равна нулю. Аналитическая оценка величины y_n будет дана ниже. Так как интегральные кривые в окрестности точки O ведут себя как гиперболы, то это означает, что расчет вольт-амперных характеристик можно проводить по сепаратрисам.

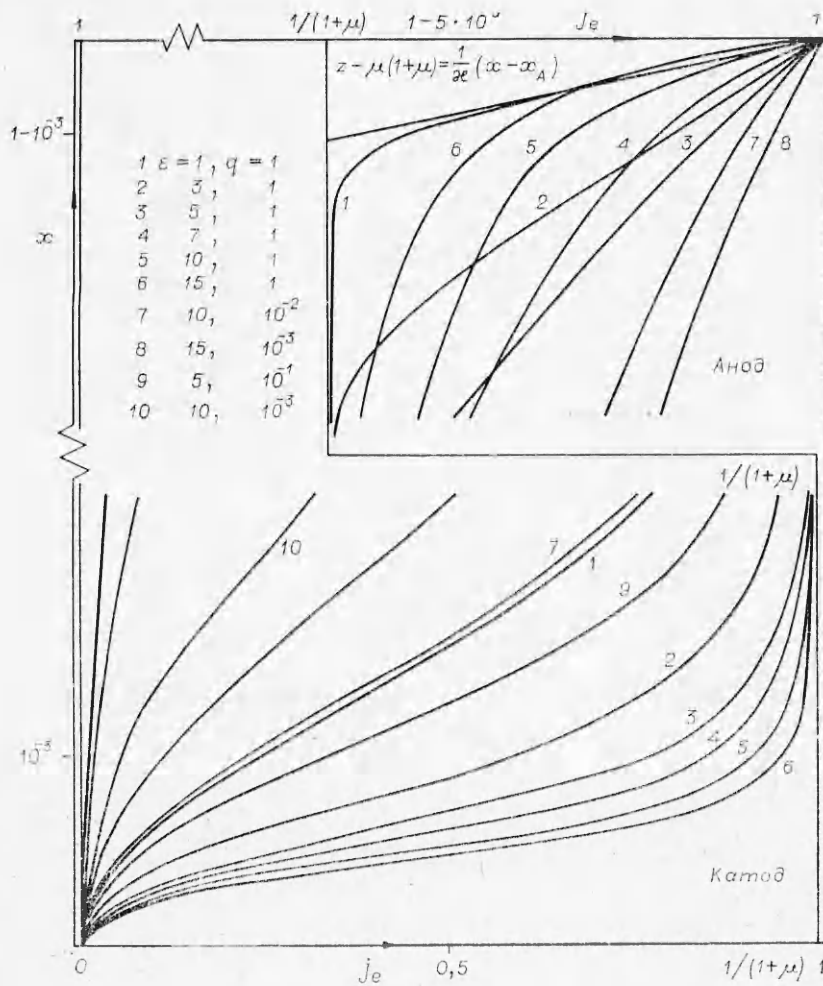
В расчетах в качестве характерных значений размерных параметров были взяты $E_0/p_0 = 1 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{мм рт. ст.}^{-1}$, $n_{e0} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $L = 10 \text{ см}$. Величина ϵ ограничена интервалом изменения (3, 10). При таких изменениях ϵ функция распределения электронов оптимальна для возбуждения колебательных уровней молекул азота [1, 2].

Назовем линиями уровней кривые

$$(2.1) \quad \omega j_e S(\epsilon v E) + \left[\frac{q}{j_a^2} - \frac{j_e(1 - j_e)}{\mu E^2} \right] = C, \quad \frac{\partial E}{\partial C} > 0.$$

Они проходят через точки A и B и при $C > 0$ расположены выше кривой (2.4), которую интегральные кривые пересекают с бесконечными производными.

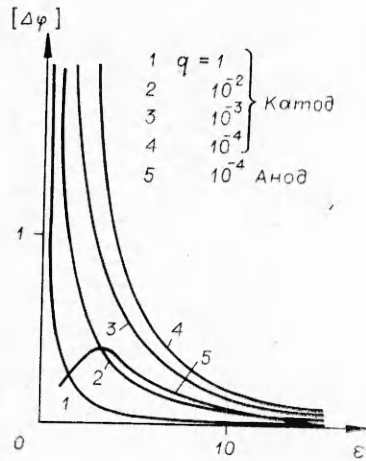
Наиболее интересным для изучения является случай самостоятельного разряда, когда ионизация в газовом объеме в основном обусловлена внешним ионизатором, а не собственным размножением электронов в электрическом поле. Это означает, что существует такое значение $E = E_y > 1$, начиная с которого можно считать, что ударная ионизация начинает оказывать существенное влияние на поведение интегральных кривых задачи (1.12) — (1.16). (Будем определять E_y из условия, что первый член в знаменателе уравнения (1.13) равен разности двух остальных.) С увеличением E наклон интегральных кривых в G увеличивается по абсолютной величине и при достижении $E = 1/(v\epsilon)$ удовлетворяет неравенству $|dE/dj_e| \geq 1/\sqrt{\delta(1 - v^2\epsilon^2 + 2v^2\epsilon^2 \ln v\epsilon)}$, если $y_n \leq 1$. Ширина $E_y - 1/(v\epsilon) \leq \omega^{-1/2}$. Если $\omega \gg 1$, то в области $E \geq E_y$ знаменатель (1.13) начинает быстро расти, а наклон интегральных кривых падать. Поведение интегральных кривых в этой области слабо зависит от их поведения в области $1 < E < E_y$. В прикатодном эмиссионном слое, когда $j_e \rightarrow \gamma/(1 + \gamma)$, величина знаменателя опять падает. За счет этого происходит «всплеск» величины E . Проведем в катодной области прямую $z = z_K$ и обозначим через X_K величину x , набираемую истинной кривой в области G при $z \leq z_K$. Возьмем, далее, $q_1 > q_2$ и прямую $z = z_K$, лежащую левее точки пересечения истинных кривых, соответствующих q_1 и q_2 . Точка пересечения лежит от прямой $z = 0$ на расстоянии порядка $(1 + \omega^{-1/2})\sqrt{\delta[1/(v\epsilon)^2 - 1 - 2 \ln v\epsilon]}$. Тогда оценки правой части уравнения (1.12) и качественный анализ поведения интегральных кривых уравнения (1.13) показывают, что $X_K(q_2) > X_K(q_1)$. С увеличением X_K будет увеличиваться и y_n .



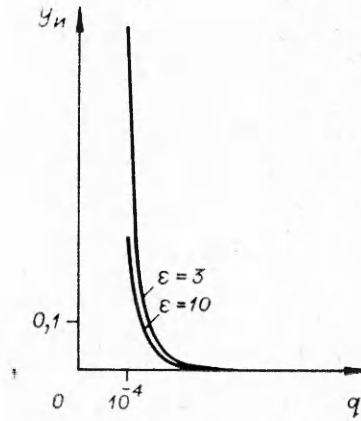
Фиг. 2

Ситуация на аноде зависит от того, достигает ли истинная кривая величины E_y . Это связано с тем, что ширина анодной области равна $\mu/(1 + \mu) \ll 1$. Если $1 < E < E_y$, то кривые $x = x(j_e)$ отличаются от кривой 1 фиг. 2 в окрестности анода на величину κ и могут быть проаппроксимированы прямыми $\kappa[z - \mu/(1 + \mu)] = x - x_A$.

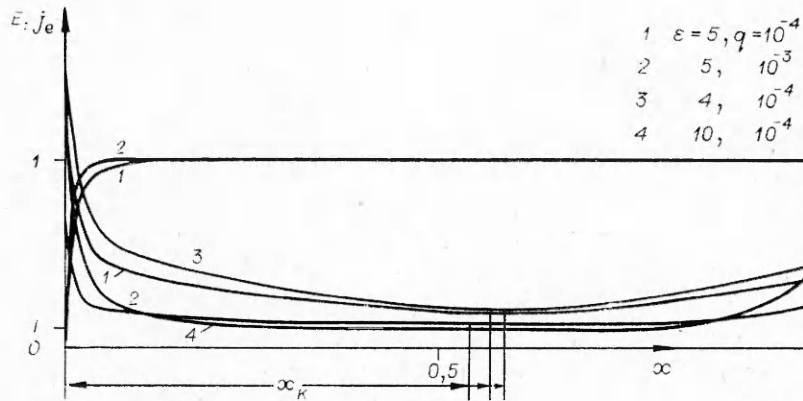
На фиг. 1—3 даны расчеты истинных кривых при различных значениях ϵ и q . На фиг. 4 представлена зависимость y_n от ϵ и q ($q \geq 10^{-4}$). Расчеты показали, что она носит экспоненциальный характер. Поведение решений краевой задачи (1.12) — (1.16) на физической плоскости при $\epsilon = 4, 5, 10$ и $q = 10^{-3}, 10^{-1}$ дано на фиг. 5. Отметим, что член, описывающий процесс рекомбинации в области $E > E_y$, имеет локальный максимум. Область $(\gamma/(1 + \gamma), 1/(1 + \mu))$ на фазовой плоскости можно разбить на зоны и в каждой из них выделить физические процессы, являющиеся главными источниками рождения электронного тока. В зоне 3, примыкающей к катоду, основную роль играет ударная ионизация. Электроны, выбитые из катода ионами, лавинообразно размножаются соответственно функциям распределения (1.9), (1.10). В переходной зоне 2 равную роль играют ударная ионизация, ионизация и в зависимости от величины ϵ



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

рекомбинация. К зоне 1 отнесем зону, в которой ударная ионизация роли не играет. В малой окрестности точки O можно выделить область $E_{и} \ll E < E_{л}$, решение в которой описывается системой (1.17) и в ней рекомбинация и ионизация играют равную роль. При достаточно малом ϵ в зоне 1 существует область, примыкающая к зоне 2, в которой основную роль играет ионизация. Ширину зон 1 и 2 обозначим через z_1 и z_2 . Они будут определены ниже и соответствуют $E = 1/(v\epsilon)$ и E_y . В дальнейшем предполагается $|z_1| \ll 1$, $|z_2| \ll 1$.

3. В широком диапазоне изменения параметров задачи расчеты, проведенные с помощью функций (1.9), (1.10), дают хорошее совпадение результатов. Однако наиболее выпукло выявить особенности поведения интегральных кривых позволяет случай (1.9), так как он более поддается математическому исследованию.

Используя переменную z , представим уравнение (1.13) в виде

$$(3.1) \quad \frac{dE}{dz} = \frac{1}{\delta} \frac{z}{\omega [1/(1+\mu) + z] ES (v\epsilon E) + \frac{qE}{J_0^2} - \frac{E^{-1}}{(1+\mu)^2} + \left[\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{z}{\mu E} + \frac{z^2}{\mu E} \right]} = Q(z, E).$$

Дифференциальное уравнение

$$(3.2) \quad \frac{dE}{dz} = \frac{1}{\delta} \frac{z}{\frac{\omega}{1+\mu} ES(v\epsilon E) + \frac{qE}{J_0^2} - \frac{E^{-1}}{(1+\mu)^2}} = R(z, E)$$

назовем сопутствующим (3.1).

В случае (1.9) его общее решение имеет вид

$$(3.3) \quad (1+\mu) \frac{z^2}{2\delta} = v^2 \epsilon^2 \omega \left[\frac{E(E-1/(v\epsilon))^3}{3} - \frac{(E-1/(v\epsilon))^4}{12} \right] \Theta \left(E - \frac{1}{v\epsilon} \right) + \\ + (1+\mu) \left[\frac{q}{2J_0^2} (E^2 - 1) - \frac{\ln E}{(1+\mu)^2} \right] + C.$$

Интегральные кривые (3.3) назовем сопутствующими.

Рассмотрим сначала случай анодной области $0 \leq z \leq \mu/(1+\mu)$. В ней справедливо неравенство

$$(3.4) \quad Q(z, E) < R(z, E).$$

Выпустим сопутствующую кривую из точки $z=0$, $E_{\text{и}} = 1 + y_{\text{и}}$. Она будет проходить выше истинной кривой и сепаратрисы. Постоянная $C = C_A$ в (3.3) имеет вид

$$(3.5) \quad C_A = \frac{\ln(1+y_{\text{и}})}{(1+\mu)^2} - \frac{q}{2J_0^2} (1+y_{\text{и}})^2.$$

Предположим сначала, что сопутствующая кривая не достигает значения E_{γ} . Используя (3.3), (3.5), можно показать справедливость неравенства

$$\frac{z^2}{2\delta} \geq \frac{q(1+y_{\text{и}})^2}{2J_0^2} \left[\frac{E^2}{(1+y_{\text{и}})^2} - 1 \right] - k_A \frac{\ln \frac{E}{1+y_{\text{и}}}}{(1+\mu)^2}, \quad \frac{1}{e} \leq k_A \leq 1.$$

Из этого неравенства находим

$$E \leq (1+y_{\text{и}}) \left[k_A + \sqrt{(1-k_A)^2 + \frac{J_0^2}{(1+y_{\text{и}})^2} \frac{z^2}{\delta}} \right].$$

Отсюда, в частности при $y_{\text{и}} \ll 1$, получается оценка напряженности на аноде

$$(3.6) \quad E_A \leq \frac{1}{e} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 + \frac{\mu^2 J_0^2}{\delta q}}.$$

В случае, если сопутствующая кривая попадает в область $E > E_{\gamma}$, т. е. если к формированию решения подключается ударная ионизация, то E_A находится из неравенства

$$(3.7) \quad \frac{v^2 \epsilon^2 \omega}{3(1+\mu)} E_A \left(E_A - \frac{1}{v\epsilon} \right)^3 + \frac{q}{2J_0^2} (E_A^2 - 1) - \frac{(E_A - 1)}{e(1+\mu)^2} \leq \frac{\mu^2}{2\delta}.$$

Получающееся значение E_A из (3.7) удовлетворяет (3.6). Численные расчеты полностью подтвердили справедливость оценки (3.6). Разность между правой и левой частями достигала порядка 0,04. Такая точность объясняется узостью анодной области.

Рассмотрим теперь случай катодной области $z < 0$. Сопутствующая кривая проходит через точку O , когда $C = 0$. При $\mu/\sqrt{\delta} > (1-\mu)/\sqrt{2}$ сопутствующая кривая проходит выше линии бесконечных производных.

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (3.1), отрицательно при $z > (\mu - 1)/(\mu + 1)$. При этих z неравенство (3.4) меняет знак. Это означает, что сопутствующая кривая лежит ниже сепаратрисы и истинной кривой. Она пересекается с прямой $E = 1/\nu\varepsilon$ в точке

$$(3.8) \quad z_1 = -\sqrt{\delta} \sqrt{\frac{q}{J_0^2} \left(\frac{1}{\nu^2 \varepsilon^2} - 1 \right) + \frac{\ln \nu \varepsilon}{(1 + \mu)^2}}.$$

В изучаемом диапазоне ε величина $|z_1| \ll 1$, так как $\sqrt{\delta} \sim 10^{-3}$. Сепаратриса и истинная кривая пересекают прямую $E = E_y$ внутри интервала $(z_1, 0)$. Можно показать, что в рассматриваемом случае отличие z_1 от истинного z при $y_H \ll 1$ имеет порядок $(\delta/\mu) \ln \nu \varepsilon$. Численные расчеты показали, что при $\varepsilon \geq 3$ и $q \geq 10^{-3}$ оно не превышает 10%.

Обозначим через k порядковое число. Определим величину \mathcal{E} соотношением

$$(3.9) \quad \nu^2 \varepsilon^2 \omega \left(\mathcal{E} - \frac{1}{\nu \varepsilon} \right)^2 = k \left[\frac{q}{J_0^2} - \frac{\mathcal{E}^{-2}}{(1 + \mu)^2} \right] = k k_1(\mathcal{E}), \quad k_1(1) = 0, \quad k_1(\infty) = (1 + \mu)^{-2}.$$

Число k считается настолько большим, чтобы с достаточной степенью точности можно было в знаменателе уравнения (3.2) пренебречь двумя последними членами по сравнению с первым. При $k = 1$ величина $\mathcal{E} \cong E_y$. Видно, что \mathcal{E} удовлетворяет неравенству

$$(3.10) \quad \frac{1}{\nu \varepsilon} < \mathcal{E} < \frac{1}{\nu \varepsilon} \left(1 + \sqrt{\frac{k k_1}{\omega}} \right).$$

Подставляя теперь \mathcal{E} в интеграл (3.3), получим значение Z , при котором сопутствующая кривая (3.3) пересекает прямую $E = \mathcal{E}$. Потребуем, чтобы $|Z| \ll 1$ так же, как и z_1 . Это условие будет выполняться, если

$$(3.11) \quad k k_1 = \left(\frac{81}{16} k_2^2 \omega \right)^{1/3}, \quad 2 \leq k_2 \leq \frac{4\omega}{9 \cdot 10^{3/2}},$$

$$Z \leq \frac{\sqrt{\delta}}{\nu \varepsilon} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{9}{4} \frac{k_2}{\omega} \right)^{1/3} \right]^2 + \frac{3}{2} k_2 \left[1 + \left(\frac{9}{4} \frac{k_2}{\omega} \right)^{1/3} \right]} \leq 1.$$

Сепаратриса и истинная кривая пересекают прямую $E = \mathcal{E}$ внутри интервала $(Z, 0)$.

Из оценок (3.11) видно, что величину $k k_1$ можно взять достаточно большой, такой, чтобы в уравнении (3.2) при $E > \mathcal{E}$ главную роль играл первый член в знаменателе. В частности, при $q = 1$, $\varepsilon \geq 3$, $k_2 = 2$ величины $k k_1 \geq 23$, а $|Z| \leq 1/30$.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$(3.12) \quad \frac{dE}{dj_e} = \frac{1}{\delta} \frac{j_e - 1/(1 + \mu)}{\nu^3 \varepsilon^2 \omega j_e E (E - 1/(\nu \varepsilon))^2}.$$

Его можно проинтегрировать

$$(3.13) \quad \nu^2 \varepsilon^2 \omega \left[\frac{E(E - 1/\nu \varepsilon)^5}{3} - \frac{(E - 1/\nu \varepsilon)^4}{12} \right] = \frac{1}{\delta} \left[j_e - \frac{\ln j_e}{1 + \mu} \right] + C.$$

Проведем две интегральные кривые (3.13) через точки (Z, \mathcal{E}) и $(0, \mathcal{E})$. При $j_e - 1/(1 + \mu) = z \rightarrow 0$ интеграл (3.13) принимает вид

$$\nu^2 \varepsilon^2 \omega \left[\frac{E(E - 1/\nu \varepsilon)^3}{3} - \frac{(E - 1/\nu \varepsilon)^4}{4} \right] - \frac{1}{(1 + \mu)\delta} - (1 + \mu) \frac{z^2}{2\delta} + O\left(\frac{z^3}{2\delta}\right) = C.$$

Через точку (Z, \mathcal{E}) будет проходить кривая (3.13) с постоянной $C = C_1$

$$C_1 = -\frac{1}{(1+\mu)\delta} - (1+\mu) \left[\frac{q}{2J_0^2} (\mathcal{E}^2 - 1) - \frac{\ln \mathcal{E}}{(1+\mu)^2} \right] + O\left(\frac{z^3}{4\delta}\right),$$

а через точку $(0, \mathcal{E})$ — с постоянной $C = C_0$

$$C_0 = -\frac{1}{(1+\mu)\delta} + v^2 \varepsilon^2 \omega \left[\frac{\mathcal{E} (\mathcal{E} - 1/v\varepsilon)^2}{3} - \frac{(\mathcal{E} - 1/v\varepsilon)^4}{12} \right] + O\left(\frac{z^3}{4\delta}\right).$$

Сепаратриса и истинная кривая находятся между кривыми (3.13) и постоянными C_1 и C_0 . Обозначим через E_{K1} , E_{K0} и E_c точки пересечения интегральных кривых (3.13) с C_1 и C_0 и сепаратрисы с прямой $j_e = \gamma/(1+\gamma)$. Имеют место очевидные неравенства: $E_{K1} < E_c < E_K < E_{K0}$. Так как наклон интегральных кривых строго отрицателен, то E_{K1} , E_{K0} , E_K , $E_c > 1/v\varepsilon$. Величины E_{K1} и E_{K0} определяются из уравнений

$$(3.14) \quad v_{Ki}^4 + \frac{4}{3} \frac{v_{Ki}^3}{v\varepsilon} = 4\chi \left[\frac{\gamma}{1+\gamma} - \frac{\ln \frac{\gamma}{1+\gamma}}{1+\mu} - \frac{1}{1+\mu} \right] + 4 \left(\delta C_i + \frac{1}{1+\mu} \right) \chi,$$

$$v_{Ki} = E_{Ki} - \frac{1}{v\varepsilon}, \quad \chi = \frac{1}{\delta \omega v^2 \varepsilon^2}, \quad i = 0, 1.$$

При выполнении условий (3.14) последние члены в правых частях уравнений (3.14) намного меньше первых. Это означает, что v_c и v_K с большей степенью точности совпадают с v_{K0} и v_{K1} и являются решением уравнения

$$v^4 + \frac{4}{3} \frac{v^3}{v\varepsilon} = 4\chi [\gamma - \ln \gamma - 1].$$

Его решение в общем виде громоздко. Ограничимся асимптотическим представлением. Если $\chi [\gamma - \ln \gamma - 1] = k_3 / (4 \cdot 3^4 v^4 \varepsilon^4)$, то E_K можно представить в виде

$$(3.15) \quad E_K \cong \frac{1}{v\varepsilon} + \left[\sqrt[4]{4\chi(\gamma - \ln \gamma - 1)} - \frac{1}{3v\varepsilon} + \frac{1}{6v^2 \varepsilon^2 \sqrt[4]{4\chi(\gamma - \ln \gamma - 1)}} \right].$$

Число $k_3 > 1$ и показывает, какую часть первого члена в разложении E_K составляет второй. При $\varepsilon = 3$, $q = 1$ будем иметь $E_{K, \text{асимп}} \cong 40,45$, а при $\varepsilon = 10$, $q = 1$ $E_{K, \text{асимп}} \cong 15,57$.

Используя полученные соотношения, оценим величину $|\bar{X}_K|$ в зависимости от значений параметров (1.14). Отметим, что величина $|X_K|$, набираемая истинным решением, меньше величины $|X|$, набираемой сопутствующим решением (3.3) с $C = 0$ и присоединенной к ней в точке (Z, \mathcal{E}) кривой (3.13), так как она на фазовой плоскости лежит ниже истинной кривой и $\partial E / \partial C > 0$ для линий уровня в (2.1). Напряженность, которую принимает кривая (3.13) с $C = C_1$ в точке $j_e = 1/2$, обозначим через E_* . Оценим теперь X_K :

$$(3.16) \quad \frac{1}{z} |X_K| = \int_{\gamma/(1+\gamma) - \mu/(1+\mu)}^{z_*} + \int_{z_*}^Z + \int_Z^{z_1} + \int_{z_1}^{z_K} \leq$$

$$\leq \frac{\ln \left(\frac{1+\gamma}{2\gamma} \right)}{\omega v^2 \varepsilon^2 [E_* - 1/(v\varepsilon)]^2} + \frac{\ln \frac{1+(1+\mu)Z}{1+(1+\mu)z_*}}{kk_1} + \left[\int_Z^{z_*} \frac{E^2 dz}{J_0^2 (E^2 - 1)} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{z_1}^{z_*} \frac{(1+\mu) \sqrt{\delta} E dE}{\sqrt{\frac{E^2-1}{2} - \ln E}} \right] \leq -(\ln 2 + \ln \gamma) \chi \delta + \frac{\ln \left[\frac{1/(1+\mu) + Z}{1/(1+\mu) + z_*} \right]}{kk_1} + \\
& + \frac{v^2 \varepsilon^2}{(1-v^2 \varepsilon^2)} (z_1 - Z) + \sqrt{2\delta} \left[\left(\frac{1}{v\varepsilon} - 1 \right) + \ln \left(\frac{1}{v\varepsilon} - 1 \right) - \ln \left(\frac{1+\mu}{\sqrt{\delta}} \right) - \ln |z_K| \right] < \\
& < \frac{1}{10\chi}, \quad \delta \leq |z_K| \leq \frac{|\lambda_K|}{a_{21}}, \quad E(z_K) - 1 = (1+\mu) \frac{z_K}{\sqrt{\delta}}, \quad E(z_K) < E_A.
\end{aligned}$$

Интегралы в (3.16), стоящие в квадратных скобках, оцениваются по сопутствующему решению. При доказательстве неравенств (3.16) были использованы формулы (3.13), (3.11), (3.8), (3.3). Из (3.16) видно, что $|X_K|$ достигает величины порядка 1, если $|z_K| \sim \exp(-1/\sqrt{\delta})$. При этом $E(z_K) - 1 \sim \delta^{-1/2} \exp(-1/\sqrt{\delta})$.

Рассмотрим случай, когда процесс ударной ионизации описывается функцией (1.10). Все соотношения, выведенные выше для (1.9), аналогично выводятся для функции S , задаваемой (1.10). Поэтому не будем детально повторять выкладки. Напряженность \mathcal{E} находится, как и раньше, из условия, что первый член в знаменателе уравнения (3.2) в k раз больше разности двух остальных

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{v\varepsilon \ln [kk_1(\mathcal{E})/\omega]}, \quad k \geq 1.$$

Величину \mathcal{E} при $k = 1$ обозначим через E_y . Значение E_K находится из уравнения

$$\omega \int_{E_y}^{E_K} E \exp\left(-\frac{1}{v\varepsilon E}\right) dE = \frac{1}{\delta} [\gamma - \ln \gamma - 1].$$

После подстановки $E = 1/(v\varepsilon t)$ получаем

$$(3.17) \quad \int_T^{t_K} \frac{\exp(-t)}{t^2} dt = -\frac{v^2 \varepsilon^2}{\delta \omega} [\gamma - \ln \gamma - 1], \quad t_K = \frac{1}{v\varepsilon E_K}, \quad T = \ln\left(\frac{\omega}{k_1}\right).$$

При $\varepsilon \geq 3$ и $q \leq 1$ имеем $T \geq 7$. Справедливость асимптотической формулы (3.17) нарушается при $q \rightarrow 0$, так как правая часть в (3.17) становится малой.

Сверка асимптотических формул с численными расчетами при $q \geq 10^{-3}$ показала хорошее совпадение. При $\varepsilon = 3$ и $q = 1$, например, $E_{K.асимп} \cong 41,92$, $E_{K.числ} \cong 42,59$, при $\varepsilon = 10$ и $q = 1$ $E_{K.асимп} \cong 16,93$, $E_{K.числ} \cong 17,01$, при $\varepsilon = 3$ и $q = 10^{-3}$ $E_{K.асимп} \cong 23,02$, $E_{K.числ} \cong 22,51$, при $\varepsilon = 3$, $q = 10^{-4}$ $E_{K.асимп} \cong 19,5$, $E_{K.числ} \cong 17,6$.

Полученные соотношения (3.15), (3.17) хорошо согласуются с аналогичными приближенными формулами в [1, 4, 5].

4. Исследуем поведение решений системы (1.12)–(1.16) на отрезке $(z_K, -z_K = z_n)$, включающем точку O , с помощью уравнений (1.17). В случае несамостоятельного разряда в диапазоне $\varepsilon = 3-10$ поведение решения в области $E_n \leq E \leq E_d$ в первом приближении не зависит от вида функции S . Поэтому все полученные результаты будут справедливы как для (1.9), так и для (1.10).

Величина постоянной в (1.18) равна $\ln K = (1 - \lambda_A/\lambda_K) \ln y_n$. Введем новые переменные $\tilde{z} = z/y_n$, $\tilde{y} = y/y_n$.

Если ввести параметр t , то интеграл (1.18) можно представить в виде

$$(4.1) \quad \tilde{y} - \frac{a_{21}}{\lambda_A} \tilde{z} = t, \quad \tilde{y} - \frac{a_{21}}{\lambda_K} \tilde{z} = t^{\lambda_A/\lambda_K}.$$

Используя (1.17), (4.1), будем иметь

$$\kappa \int_0^t \frac{1 - (\lambda_A/\lambda_K) t^{(\lambda_A/\lambda_K)-1}}{(a_{11} - \lambda_A) t - (a_{11} - \lambda_K) t^{\lambda_A/\lambda_K}} dt \cong \begin{cases} \tilde{x}_K = x_K - X_K < 0, & t \geq 1, \\ \tilde{x}_A = x_A - X_A > 0, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

При $q \sim 1$, $\mu > \sigma$ величина $a_{11} - \lambda_i = -(a_{21}a_{12})/\lambda_i \sim \delta^{-1/2}$ ($i = A, K$). Величину \tilde{x}_K при больших t можно представить в виде

$$(4.2) \quad \tilde{x}_K \cong C_K \frac{\lambda_K \kappa}{a_{21}^{\lambda_K \kappa}} - \frac{\lambda_A \kappa}{a_{12}^{\lambda_A \kappa}} t, \quad t \gg 1,$$

аналогично и величину \tilde{x}_A при малых t

$$(4.3) \quad \tilde{x}_A \cong C_A \frac{\lambda_A \kappa}{a_{21}^{\lambda_A \kappa}} - \frac{\lambda_A \kappa}{a_{12}^{\lambda_A \kappa}} t, \quad 0 < t \ll 1.$$

Если κ не очень велико, то первыми членами (4.2), (4.3) можно пренебречь (при $q \rightarrow 0$ величина $\kappa \rightarrow \infty$). Тогда, используя (4.1), получаем

$$\tilde{z}_K \sim \frac{\lambda_A \lambda_K}{a_{21} (\lambda_A - \lambda_K)} \exp\left(-\frac{a_{21} a_{12} \tilde{x}_K}{\lambda_A \kappa}\right) \sim \frac{\lambda_A \lambda_K}{a_{21} (\lambda_A - \lambda_K)} \exp\left(-\frac{a_{21} a_{12} \tilde{x}_A}{\lambda_K \kappa}\right).$$

Отсюда следует, что $\lambda_A \tilde{x}_A \sim \lambda_K \tilde{x}_K$. Если $\lambda_A \sim |\lambda_K|$ и $|X_K| \ll 1$, то $\tilde{x}_A \sim \tilde{x}_K \sim 1/2$. Этот результат подтверждается численными расчетами. Для y_n и $[\Delta\phi]$ (падение потенциала на $(z_K, -z_K)$) будем иметь

$$y_n \sim \frac{a_{21} (\lambda_K - \lambda_A)}{\lambda_K \lambda_A} \exp\left(\frac{a_{21} a_{12}}{2\lambda_K \kappa}\right) |z_K|, \quad [\Delta\phi] \sim \frac{\kappa \lambda_A}{a_{12} \lambda_K} z_K.$$

Отсюда видно, что выбирать величину z_K необходимо такой, чтобы можно было пренебречь $[\Delta\phi]$. Когда $q \rightarrow 0$, то y_n и $[\Delta\phi]$ растут. Растет и величина $|X_K|$. Эти результаты и результаты качественного анализа решений системы (1.12), (1.13), оценок (3.16) согласуются друг с другом и с результатами численных расчетов.

Величина $y_n \leq 1,5 \exp(-1/(\kappa\sqrt{2\delta}))/\sqrt{\delta}$. Если мало z_K , то при малых z_K вольт-амперные характеристики слабо зависят от поведения решения задачи (1.12)–(1.16) на отрезке $(z_K, -z_K)$. Аналогичный вывод, основанный на результатах численных расчетов, сделан в работе [6].

В реальных лазерах нейтральный газ движется. За счет этого происходит конвективный вынос Джоулева тепла и образуется в приэлектродных областях вязкий пограничный слой. Плотность газа уже нельзя считать постоянной. Это означает, что расчет параметров течения и электрического поля должен производиться на основании совместного решения уравнений газовой динамики и системы (1.4) (с заменой давления p на плотность $\rho(x)$).

Данную работу можно рассматривать как один из шагов в направлении изучения свойств системы (1.4) с переменной плотностью и расчета электрического разряда в реальных электроионизационных лазерах.

Поступила 20 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Басов Н. Г., Беленов Э. М., Данилычев В. А., Сучков А. Ф. Электроионизационные лазеры на сжатом углекислом газе.— УФН, 1974, т. 114, вып. 2.
2. Велихов Е. П., Письменный В. Д., Рахимов А. Т. Несамостоятельный газовый разряд, возбуждающий непрерывные CO₂-лазеры.— УФН, 1977, т. 122, вып. 3.
3. Ельчанинов А. С., Емельянов В. Г. и др. Методы наносекундного ионцирования мегавольтных коммутаторов.— ЖТФ, 1975, т. 45, вып. 1.
4. Басов Н. Г., Беленов Э. М. и др. Электрический ток в сжатых N₂, CO₂ и их смесях в условиях сильной ионизации электронным пучком.— ЖТФ, 1972, т. 42, вып. 12.
5. Браун С. Б. Элементарные процессы в плазме газового разряда. М., Госатомиздат, 1961.
6. Захаров В. В., Каршиков А. А., Чехунов Е. В. Объемный газовый разряд в азоте со стационарной внешней ионизацией.— ЖТФ, 1976, т. 46, вып. 9.
7. Александров В. В., Котеров В. И. и др. Пространственно-временная эволюция катодного слоя в электроионизационных лазерах.— Квант. электроника, 1978, т. 5, № 1.

УДК 537.633.9

**ПАРАКСИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ
НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНОГО РАЗРЯДА
В СОБСТВЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Г. Б. Гадияк, В. А. Швейгерт

(Новосибирск)

Создание мощных электроионизационных лазерных систем на сжатых газах связано с возрастанием как мощности разряда, так и геометрических размеров лазера. Это приводит к увеличению магнитного поля объемного разряда, которое начинает оказывать влияние на движение электронов пучка, осуществляющих ионизацию газа. Действительно, когда ларморовский радиус электронов пучка сравним с поперечными размерами разряда, распределение ионизационных потерь пучка, а следовательно, и плотности электронов разряда будет существенно неоднородно по пространству [1].

В данной работе исследуется приближенная модель газового разряда, ионизируемого мощным релятивистским электронным пучком. В стационарном случае получено аналитическое выражение для пространственного распределения энергии, поглощаемой в разряде.

Для типичной геометрии объемного разряда, когда продольный размер лазера много больше поперечных d , $l \ll l_0$ (d — расстояние между электродами, l — ширина разряда, определяемая шириной пучка, l_0 — длина разряда), можно сформулировать плоскую задачу (фиг. 1). Вдоль оси z с катода инжектируется релятивистский электронный пучок с пучковым разбросом скоростей, энергией электронов U_b и плотностью тока пучка j_b . К электродам приложено напряжение U_0 и в межэлектродном промежутке находится газ под давлением p_0 (атм).

В мощных импульсных лазерах достаточно высокая объемная концентрация электронов разряда $\sim 10^{12} - 10^{13} \text{ см}^{-3}$ достигается за время, много меньшее характерного времени изменения тока разряда τ_p . При такой концентрации электронов разряда процессы зарядовой нейтрализации пучка и установления прикатодного слоя происходят за время порядка нескольких наносекунд. При дальнейшей инжекции пучка плазма газового разряда квазинейтральна и токи проводимости существенно больше токов смещения. Так как характерные размеры прикатодного слоя малы $\sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{ см}$ и катодное падение потенциала составляет ма-