УДК 517.988.68

Методы идентификации параметра в ядре уравнения первого рода типа свертки на классе функций с разрывами*

Т.В. Антонова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990
E-mail: tvantonova@imm.uran.ru

Антонова Т.В. Методы идентификации параметра в ядре уравнения первого рода типа свертки на классе функций с разрывами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 2. — С. 107–120.

В работе предложен регулярный итерационный процесс идентификации числового параметра в ядре оператора интегрального уравнения первого рода типа свертки. Показано, что однозначное определение параметра возможно в случае, когда точное решение имеет разрывы первого рода. Доказана теорема сходимости и приведен содержательный пример уравнения с параметром, для которого применим построенный метод.

DOI: 10.15372/SJNM20150201

Ключевые слова: *некорректная задача, локализация особенностей, уравнение первого рода, идентификация параметра.*

Antonova T.V. Methods of identifying a parameter in the kernel of the first kind equation of the convolution type on the class of functions with discontinuities // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 2. — P. 107–120.

In this paper, we propose a regular iterative method of identifying a numerical parameter in the kernel of the integral equation of the first kind of the convolution type. It is shown that an unambiguous identification of the parameter is possible when an exact solution has discontinuities of the first kind. The convergence theorem is proved, and an example of the equation with a parameter, for which the method constructed is applicable, is given.

Keywords: *ill-posed problems, localization of singularities, equation of the first kind, parameter identification.*

Введение

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода с оператором типа свертки, который нелинейно зависит от числового параметра σ,

$$A[\sigma]x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s,\sigma)x(s)\,ds = y(t), \qquad t \in (-\infty,+\infty). \tag{0.1}$$

Пусть при каждом фиксированном σ оператор $A[\sigma]$ непрерывен и действует из $L_2 = L_2(-\infty,+\infty)$ в L_2. Предполагается, что уравнение (0.1) имеет точное решение $x \in L_2$ при точном значении параметра σ^*, т. е. $A[\sigma^*]x \equiv y$. Вместо точной правой части y известно

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” (проект № 12-П-1-1022) и РФФИ (проект № 12-01-00106).

$y^\delta \in L_2$ такое, что $\|y - y^\delta\|_{L_2} \le \delta$. На практике иногда вместо точного значения параметра σ^* известно приближенное значение $\bar\sigma$ такое, что $|\sigma^* - \bar\sigma| \le \rho$. Если ρ достаточно велико, то решение линейного интегрального уравнения (0.1) при возмущенном значении оператора $A = A[\bar\sigma]$ дает плохие результаты. Поэтому желательно сначала уточнить значение параметра σ, а затем решать уравнение (0.1). В настоящей работе рассматривается только задача уточнения параметра σ, поскольку задача решения уравнения (0.1) при фиксированном σ является стандартной.

Для уточнения параметра σ необходима дополнительная априорная информация о точном решении x. Действительно, нетрудно показать, что для всех x из пространства L_2 без дополнительной априорной информации однозначное определение параметра σ^* невозможно. Решение вышеприведенной задачи возможно в случае, когда функция x имеет особенности, например разрывы первого рода. В прикладных исследованиях используются эвристические алгоритмы (см., например, [1–3]) для уточнения параметра в ядре интегрального оператора и рассматриваются более общие задачи.

Насколько известно автору, первые теоретические результаты по исследованию методов определения пары $\{\sigma, x\}$ при условии, что точное решение имеет особенности, получены в работах [4–7]. В первых двух работах [4, 5] положения особенностей считались известными. В работах [6, 7] положения особенностей определялись конкретным методом локализации. Позже появилась оригинальная работа [8], в которой в статистической постановке рассматривалась задача определения параметра σ^* в ядре двумерного уравнения типа свертки с двумерным гауссовым ядром.

В настоящей работе удалось обобщить и упростить предложенную ранее в работах [4–7] методику. Предложен широкий класс методов усреднения, позволяющих провести идентификацию параметра. Оказывается, для некоторых ядер $K(t, \sigma)$ при неточном задании параметра σ в окрестности разрывов функции x наряду с эффектами типа Гиббса [9] появляются новые эффекты, главную часть которых можно описать аналитически. Именно на аналитическом описании эффектов, возникающих из-за наличия разрывов у точного решения, основана техника исследования методов.

В первом пункте приведена постановка задачи. Во втором пункте получены вспомогательные оценки. Обоснование метода идентификации параметра и содержательный пример уравнения с параметром, для которого этот метод может быть применен, приведены в третьем пункте.

1. Постановка задачи и основное разложение

Рассмотрим интегральное уравнение (0.1) первого рода с оператором типа свертки, который нелинейно зависит от числового параметра $\sigma \in (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in R$. Будем предполагать, что при каждом $\sigma \in (\alpha, \beta)$ функция $K(t, \sigma)$ принадлежит $L_1 \cap L_2$ ($L_1 = L_1(-\infty, +\infty)$). Обозначим через $\sigma^* \in (\alpha, \beta)$ точное (неизвестное) значение параметра. Будем предполагать, что точное решение x имеет разрывы первого рода в точках s_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, $s_k \in (-b, b)$, $b > 0$; величина скачка $\Delta_k = x(s_k + 0) - x(s_k - 0)$; на любом конечном отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция x абсолютно непрерывна, функция x и ее производная[1] принадлежат L_2. Множество таких функций обозначим MW_2^1.

[1] Для всех $s \neq s_k$ существует обычная производная x', которую доопределим в точках несуществования нулем.

Будем считать, что о точном решении известна следующая априорная информация:
1) $\|x'\|_{L_2} \leq 1$;
2) задано число $\Delta^{\min} > 0$ такое, что $\min\{|\Delta_k| \colon k = 1, 2, \ldots, l\} \geq \Delta^{\min}$;
3) заданы числа $L > 0$ и $\Delta^{\max} > 0$ такие, что $0 < l \leq L$ и $\max\{|\Delta_k| \colon k = 1, 2, \ldots, l\} \leq \Delta^{\max}$;
4) задано число $h > 0$ такое, что $\min\{|s_k - s_j| \colon k, j = 1, 2, \ldots, l; k \neq j\} \geq h$.

Задача идентификации параметра в ядре уравнения (0.1). Предполагается, что уравнение (0.1) имеет точное решение $x \in MW_2^1$, дополнительно удовлетворяющее условиям **1)**–**4)**, при точном значении параметра σ^*, т. е. $A[\sigma^*]x \equiv y$. Вместо точного значения параметра σ^* известно приближенное значение $\bar{\sigma}$ такое, что $|\sigma^* - \bar{\sigma}| \leq \rho$; вместо точной правой части y известно $y^\delta \in L_2$ такое, что $\|y - y^\delta\|_{L_2} \leq \delta$; уровни погрешности ρ и δ известны. Рассматривается задача уточнения параметра σ при $\delta \to 0$.

Для решения данной задачи в работе будет построен итерационный алгоритм вычисления величины σ_i, где $\sigma_0 = \bar{\sigma}$; указано правило останова $i = i(\delta)$ такое, что $\sigma_{i(\delta)} \to \sigma^*$ при $\delta \to 0$. Сходимость алгоритма будет иметь место, начиная с достаточно малого ρ при любых $\bar{\sigma} : \ |\sigma^* - \bar{\sigma}| \leq \rho$.

Каждый шаг метода идентификации состоит из двух этапов. На первом этапе определяется приближение к одной из точек разрыва точной функции x при приближенном значении параметра σ. На втором этапе проводится уточнение параметра σ с использованием приближенного значения положения разрыва функции x. Без ограничения общности можно считать, что всегда определяется приближение к точке s_1.

Метод аппроксимации точки s_1 использует в своей работе вспомогательную функцию, которая порождается усредняющей функцией ϕ, принадлежащей соболевскому пространству $W_2^{\gamma+1}(-\infty, +\infty)$ (натуральное число $\gamma > 1$ будет определено позже). Потребуем, чтобы усредняющая функция ϕ дополнительно удовлетворяла условию

$$\forall\, \sigma \in (\alpha, \beta), \ \forall\, \lambda > 0 \ \ \exists\, f_\lambda[\sigma] \in L_2 : \ \ A^*[\sigma] f_\lambda[\sigma] = -\phi'_\lambda(-s), \quad \phi_\lambda(s) = \phi(s/\lambda). \tag{1.1}$$

То есть функцию ϕ нужно выбирать таким образом, чтобы существовало решение $f_\lambda[\sigma] \in L_2$ сопряженного уравнения в условии (1.1). Пример функции ϕ, удовлетворяющей этим условиям, приведен в п. 3. Множество всех таких функций ϕ обозначим через $\Phi_\gamma[K_\sigma]$. Для аппроксимации положения s_1 и идентификации параметра σ построим вспомогательную функцию по формуле

$$x_\lambda^\delta[\sigma](s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^\delta(t) f_\lambda[\sigma](s - t)\, dt.$$

Как было показано в [9, лемма 3], для функции $x_\lambda^\delta[\sigma^*]$ имеет место представление

$$x_\lambda^\delta[\sigma^*](s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \phi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s), \tag{1.2}$$

$$\sup_s |\alpha_\lambda(s)| \leq A_0 \lambda^{0.5}, \qquad \sup_s |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq \delta \eta(\lambda, \sigma^*), \tag{1.3}$$

константа $A_0 = \|\phi\|_{L_2}$, функция $\eta(\lambda, \sigma) = \|f_\lambda[\sigma]\|_{L_2}$.

Обоснование работоспособности метода идентификации параметра σ основано на обобщении разложения (1.2), (1.3) для случая $x_\lambda^\delta[\sigma]$ при $\sigma : \ |\sigma^* - \sigma| \leq \rho$. Пусть функция $K(t, \sigma)$ такова, что имеет место следующее разложение:

$$x_\lambda^\delta[\sigma](s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \phi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta[\sigma](s) +$$
$$(\sigma - \sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\sum_{k=1}^{l}\Delta_k(\phi_\lambda(s - s_k))_s^{(\gamma)} + (\sigma - \sigma^*)\beta_\lambda^1[\sigma^*](s) + (\sigma - \sigma^*)^2\beta_\lambda^2[\sigma](s), \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} &\sup_s |\alpha_\lambda(s)| \le A_0\lambda^{0.5}, \quad \sup_{s,|\sigma^*-\sigma|\le\rho} |\Delta x_\lambda^\delta[\sigma](s)| \le \delta\eta(\lambda,\sigma), \quad \eta(\lambda,\sigma) = \|f_\lambda[\sigma]\|_{L_2}, \\ &0 < \bar{p}[\sigma^*] \le p, \quad \sup_s |\beta_\lambda^1[\sigma^*](s)| \le B_1\lambda^{0.5-\gamma}, \quad \sup_{s,|\sigma^*-\sigma|\le\rho} |\beta_\lambda^2[\sigma](s)| \le B_2\lambda^{-2\gamma}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь p, A_0, B_1, B_2 — положительные константы, целое число $\gamma > 1$. Также предполагается, что существует функция $\bar{\eta}(\lambda)$ такая, что

$$\begin{aligned} &\eta(\lambda,\sigma)\lambda^{-0.5} \le \bar{\eta}(\lambda) \ \text{ для всех } \sigma: \ |\sigma^* - \sigma| \le \rho, \\ &\bar{\eta}(\lambda) \quad \text{монотонно убывает} \ \text{ и } \ \lim_{\lambda\to+0} \bar{\eta}(\lambda) = \infty. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Первая строчка (1.4) совпадает с разложением (1.2). Наличие разрывов первого рода у точной функции x при неточном задании параметра σ приводит к появлению новых эффектов в окрестности разрывов, которые описываются слагаемыми во второй строчке (1.4). Основной вклад от возмущения σ дает слагаемое $(\sigma - \sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\sum_{k=1}^{l}\Delta_k(\phi_\lambda(s - s_k))_s^{(\gamma)}$.

В третьем пункте приведен содержательный пример, в котором разложение (1.4) будет обосновано для конкретного ядра $K(t,\sigma)$ и для конкретной усредняющей функции ϕ.

2. Предварительные оценки

В настоящем пункте исследуется один шаг итерационного процесса идентификации параметра σ в предположении, что имеет место разложение (1.4) с условиями (1.5), (1.6). В первой части этого пункта считаются известными приближения к параметру σ^*, к положению разрыва s_1 и к величине скачка Δ_1 (соответственно величины σ, $\tilde{s}$ и $\tilde{\Delta}$) с оценками их близости к точным значениям. На основе этого необходимо получить уточненное значение σ_{corr} с оценкой его близости к σ^*. Во второй части этого пункта исследуется метод локализации положения разрыва s_1 и величины скачка Δ_1 при приближенном значении параметра σ.

Пусть усредняющая функция ϕ, которая порождает вспомогательную функцию $x_\lambda^\delta[\sigma]$, принадлежит классу $\Phi1_\gamma$ (целое число $\gamma > 1$ из разложения (1.4)) функций, удовлетворяющих условиям:

(а) $\phi \in C^{\gamma+2}(-\infty,+\infty)$, $|\phi^{(m)}(t)| \le \bar{C}$, $\bar{C}$ — константа, $0 \le m \le \gamma + 2$;
(б) $\sup_{t\in[-1,1]} |\phi(t)| = \phi(0) = 1$;
(в) $|\phi^{(m)}(t)| \le C/|t|$ для $t \notin [-1,1]$, C — константа, $0 \le m \le \gamma + 1$;
(г) $\sup_{t\in[-1,1]} |\phi(t)| - \sup_{t\notin[-1,1]} |\phi(t)| = a > 0$;
(д) $C_0 = |\phi^{(\gamma)}(0)| > 0$;
(е) $C_1 \le |\phi''(t)| \le C_2$ для $t \in [-1,1]$, C_1, C_2 — константы.

Положим

$$\sigma_{\text{corr}} = \sigma - \frac{x_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s}) - x_{d\lambda}^\delta[\sigma](\tilde{s})}{D\tilde{\Delta}\lambda^{-\gamma}}, \qquad D = p\phi^{(\gamma)}(0)(1-d^{-\gamma}), \tag{2.1}$$

где p — положительное число из условий (1.5), число $d > 1$.

Перед формулировкой леммы введем следующие константы[2]: $\bar{C}_0 = pC_0\Delta^{\min}(1-d^{-\gamma})$, $H = 2\Delta^{\max}(L-1)C/h$, $B_0{=}H + pH + A_0 + B_1 + M$, $\bar{B}_2 = 2pGC_0 + 4B_2 + (2p+1)\Delta^{\max}\bar{C}$. Здесь M, G — положительные константы, которые определены в лемме.

Для упрощения формулировки леммы предварительно выпишем условия на параметры:

$$r \le \min\left\{\frac{q\bar{C}_0}{2\bar{B}_2}, \frac{\Delta^{\min}}{2G}, 1\right\}, \qquad \lambda \le \min\left\{\left(\frac{r^2B_2}{dB_0}\right)^2, \frac{h}{2}, 1\right\}. \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Пусть определена непрерывная функция* $x_\lambda^\delta[\sigma]$, *для которой имеет место представление* (1.4) *с оценками* (1.5), (1.6); *для точного решения* $x \in MW_2^1$ *выполнены условия* **1**)–**4**); *функция* $\phi \in \Phi 1_\gamma$; *константы* $0 < q < 1$, $d > 1$, $M > 0$, $G > 0$ *фиксированы. Тогда для любых* $\delta \ge 0$, *для всех* r, λ, *удовлетворяющих условиям* (2.2), *и при выполнении условий* $|\tilde{s} - s_1| \le r^2\lambda$, $|\tilde{\Delta} - \Delta_1| \le Gr$, $|\sigma - \sigma^*| \le r\lambda^\gamma$, $\bar{\eta}(\lambda) \le M/\delta$ *для уточненного значения параметра* σ_{corr} *имеет место оценка* $|\sigma_{\text{corr}} - \sigma^*| \le qr\lambda^\gamma$.

Доказательство. Введем обозначение

$$F_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s}) = \frac{x_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s}) - x_{d\lambda}^\delta[\sigma](\tilde{s}) - (\sigma - \sigma^*)D\tilde{\Delta}\lambda^{-\gamma}}{D\tilde{\Delta}}.$$

Тогда выражение (2.1) можно записать следующим образом: $\sigma^* - \sigma_{\text{corr}} = F_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s})\lambda^\gamma$. Следовательно, для доказательства леммы нужно показать, что $|F_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s})| \le qr$.

Считаем, что положения разрывов s_k упорядочены по возрастанию. По условию $\min_{k\ne j}|s_k - s_j| \ge h$ и $|\tilde{s} - s_1| \le r^2\lambda$. Поскольку $\lambda \le h/2$, то $|\tilde{s} - s_k| \ge h/2$, $k = 2, 3, \ldots, l$. Следовательно, используя условие (в) на функцию ϕ, получаем следующие оценки для $0 \le m \le \gamma + 1$:

$$\left|\sum_{k=2}^{l}\Delta_k\left(\phi_\lambda(s - s_k)\right)_s^{(m)}\Big|_{s=\tilde{s}}\right| \le \frac{H}{\lambda^{m-1}}, \qquad \left|\sum_{k=2}^{l}\Delta_k\left(\phi_{d\lambda}(s - s_k)\right)_s^{(m)}\Big|_{s=\tilde{s}}\right| \le \frac{H}{(d\lambda)^{(m-1)}}. \tag{2.3}$$

Дальше для краткости будем вместо $(\phi_\lambda(s - s_k))_s^{(m)}\,|_{s=\tilde{s}}$ писать $(\phi_\lambda(\tilde{s} - s_k))_s^{(m)}$.

Запишем функцию $x_\lambda^\delta[\sigma]$, используя представление (1.4), следующим образом:

$$x_\lambda^\delta[\sigma](s) = g_\lambda[\sigma](s) + \mu_\lambda^\delta[\sigma](s),$$

где

[2]Напомним, что константы $\bar{C}$, C, C_0, C_1, C_2, a возникают в условиях (а)–(е) на функцию ϕ; константы h, L, $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$ — в условиях **1)–4)** на функцию x; константы p, A_0, B_1, B_2, γ и функция $\bar{\eta}(\lambda)$ участвуют в разложении (1.4) с оценками (1.5), (1.6). Все остальные константы определяются перед формулировками лемм.

$$
\begin{aligned}
g_\lambda[\sigma](s) &= \Delta_1\phi_\lambda(s-s_1) + (\sigma-\sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\Delta_1(\phi_\lambda(s-s_1))_s^{(\gamma)},\\
\mu_\lambda^\delta[\sigma](s) &= \sum_{k=2}^{l}\Delta_k\phi_\lambda(s-s_k) + (\sigma-\sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\sum_{k=2}^{l}\Delta_k(\phi_\lambda(s-s_k))_s^{(\gamma)} +\\
&\qquad \alpha_\lambda(s) + (\sigma-\sigma^*)\beta_\lambda^1[\sigma^*](s) + (\sigma-\sigma^*)^2\beta_\lambda^2[\sigma](s) + \Delta x_\lambda^\delta[\sigma](s).
\end{aligned}
$$

Поскольку параметры λ, r удовлетворяют условиям (2.2), то получаем оценку

$$
|\mu_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s})| \le H\lambda + pH\lambda r + A_0\lambda^{0.5} + \lambda^{0.5}B_1 r + B_2 r^2 + M\lambda^{0.5} \le B_0\lambda^{0.5} + B_2 r^2 \le 2B_2 r^2.
$$

Аналогично

$$
x_{d\lambda}^\delta[\sigma](s) = g_{d\lambda}[\sigma](s) + \mu_{d\lambda}^\delta[\sigma](s).
$$

Поскольку $d > 1$, $\bar{\eta}(d\lambda) \le \bar{\eta}(\lambda)$ и $\lambda \le (r^2B_2/(dB))^2$, то аналогично предыдущей оценке имеем $|\mu_{d\lambda}^\delta[\sigma](\tilde{s})| \le 2B_2r^2$.

Рассмотрим числитель дроби $F_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s})$:

$$
\begin{aligned}
&x_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s}) - x_{d\lambda}^\delta[\sigma](\tilde{s}) - (\sigma-\sigma^*)D\tilde{\Delta}\lambda^{-\gamma}\\
&\quad = g_\lambda[\sigma](\tilde{s}) - g_{d\lambda}[\sigma](\tilde{s}) - (\sigma-\sigma^*)D\tilde{\Delta}\lambda^{-\gamma} + \mu_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s}) - \mu_{d\lambda}^\delta[\sigma](\tilde{s})\\
&\quad = \Delta_1(\phi_\lambda(\tilde{s}-s_1) - \phi_{d\lambda}(\tilde{s}-s_1)) +\\
&\qquad (\sigma-\sigma^*)\Big[\Delta_1\bar{p}[\sigma^*]((\phi_\lambda(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)} - (\phi_{d\lambda}(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)}) - D\tilde{\Delta}\lambda^{-\gamma}\Big] + \mu_\lambda^\delta[\sigma](\tilde{s}) - \mu_{d\lambda}^\delta[\sigma](\tilde{s}).
\end{aligned}
$$

Применяя формулу Лагранжа, учитывая условие (a) и неравенство $|\tilde{s}-s_1| \le r^2\lambda$, для первого слагаемого имеем оценку

$$
|\Delta_1(\phi_\lambda(\tilde{s}-s_1) - \phi_{d\lambda}(\tilde{s}-s_1))| \le \Delta^{\max}\bar{C}r^2.
$$

Для оценки второго слагаемого сначала рассмотрим, используя формулу Тейлора, следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(\phi_\lambda(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)} - \tilde{\Delta}\phi^{(\gamma)}(0)\lambda^{-\gamma} &= \left(\Delta_1\phi^{(\gamma)}\left(\frac{\tilde{s}-s_1}{\lambda}\right) - \tilde{\Delta}\phi^{(\gamma)}(0)\right)\lambda^{-\gamma}\\
&= \left(\Delta_1\phi^{(\gamma)}(0) + \Delta_1\phi^{(\gamma+1)}(\theta)\frac{\tilde{s}-s_1}{\lambda} - \tilde{\Delta}\phi^{(\gamma)}(0)\right)\lambda^{-\gamma},\\
&\qquad \theta \in \left(0, \frac{\tilde{s}-s_1}{\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\left|\Delta_1(\phi_\lambda(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)} - \tilde{\Delta}\phi^{(\gamma)}(0)\lambda^{-\gamma}\right| \le \left(rGC_0 + \Delta^{\max}\bar{C}r^2\right)\lambda^{-\gamma}.
$$

Аналогично (поскольку число $d > 1$)

$$
\left|\Delta_1(\phi_{d\lambda}(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)} - \tilde{\Delta}\phi^{(\gamma)}(0)(d\lambda)^{-\gamma}\right| \le \left(rGC_0 + \Delta^{\max}\bar{C}r^2\right)\lambda^{-\gamma}.
$$

Используя полученные выражения, для второго слагаемого имеем оценку

$$
\left|(\sigma-\sigma^*)\left[\Delta_1\bar{p}[\sigma^*]\left((\phi_\lambda(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)} - (\phi_{d\lambda}(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)}\right) - D\tilde{\Delta}\lambda^{-\gamma}\right]\right| \le 2rp\left(rGC_0 + \Delta^{\max}\bar{C}r^2\right).
$$

Поскольку $|\mu^\delta_\lambda[\sigma](\tilde s) - \mu^\delta_{d\lambda}[\sigma](\tilde s)| \le 4B_2 r^2$, то числитель дроби $F^\delta_\lambda[\sigma](\tilde s)$ оценивается следующим образом:

$$\left| x^\delta_\lambda[\sigma](\tilde s) - x^\delta_{d\lambda}[\sigma](\tilde s) - (\sigma-\sigma^*)D\tilde\Delta\lambda^{-\gamma} \right| \le \Delta^{\max}\bar C r^2 + 2rp\left(rGC_0 + \Delta^{\max}\bar C r^2\right) + 4B_2 r^2 \le \bar B_2 r^2.$$

Поскольку $|\tilde\Delta| \ge |\Delta_1| - Gr \ge \Delta^{\min}/2$, то $|D\tilde\Delta| \ge \bar C_0/2$. Используя полученные выше оценки и условия (2.2) на параметр r, получаем окончательную оценку $|F^\delta_\lambda[\sigma](\tilde s)| \le qr$. □

Согласно условиям леммы 1, для уточнения параметра σ необходимо знать приближение $\tilde s$ к положению разрыва s_1 и приближение $\tilde\Delta$ для величины скачка Δ_1 с оценками точности аппроксимации. Для определения этих величин будем использовать следующий метод усреднения. Введем параметр $P{=}\Delta^{\min}/2$. Величина h определена в условии **4)** на функцию x. Условия на параметры λ и ν будут приведены ниже.

Метод $\widetilde\Pi$. Положим $\hat s := -b - 2h$. Если уравнение $|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](\hat s)| - P = 0$ на отрезке $[\hat s, b]$ не имеет корней, то завершаем процесс; иначе наименьший корень обозначим $\bar s$ и находим на отрезке $[\bar s, \bar s{+}h/2]$ точку максимума $\tilde s$ функции $|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)|$. Если таких точек несколько, то берем самую левую из них. Приближение к величине скачка Δ_1 вычисляется по формуле $\tilde\Delta = x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde s)$.

Выпишем константы и условия на параметры, которые будут использоваться в следующей лемме[3]:

$$\bar H = 2\Delta^{\max}LC/h, \quad \bar B_0 = \bar H + p\bar H + A_0 + M + B_1, \quad K_0 = p\Delta^{\max}\bar C, \quad G = K_0 + 2B_2,$$

$$\lambda \le \min\left\{ \left(\frac{B_2 r^2}{\nu \bar B_0}\right)^2, 1 \right\}, \qquad r \le \min\left\{ \frac{a\Delta^{\min}}{2G}, 1 \right\}. \tag{2.4}$$

Лемма 2. *Пусть определена непрерывная функция $x^\delta_\lambda[\sigma]$, для которой имеет место разложение* (1.4) *с оценками* (1.5), (1.6); *для точного решения $x \in MW^1_2$ выполнены условия* **1)**–**4)**, *функция $\phi \in \Phi 1_\gamma$; константа $M > 0$ фиксирована. Тогда для любых $\delta \ge 0$, $\nu > 1$, для всех r, λ, удовлетворяющих условиям* (2.4), *и при выполнении условий $|\sigma - \sigma^*| \le r\lambda^\gamma$, $\bar\eta(\lambda) \le M/\delta$ метод $\widetilde\Pi$ получит приближение $\tilde s$ к точке s_1, для которого справедлива оценка $|\tilde s - s_1| \le \lambda\nu$; для приближения $\tilde\Delta$ к величине скачка Δ_1 имеет место оценка $|\tilde\Delta - \Delta_1| \le Gr$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)$ в окрестности точки s_1 такой, что $|s - s_1| < h/2$. При условии $\min_{k\ne j}|s_k - s_j| \ge h$ имеем $|s - s_k| \ge h/2$, $k = 2, 3, \ldots, l$. Так же, как в лемме 1, для функции $x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma]$ можно записать следующее равенство:

$$x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s) = g_{\lambda\nu}[\sigma](s) + \mu^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s),$$

где

[3] Напомним, что константы $\bar C$, C, C_0, C_1, C_2, a возникают в условиях (a)–(e) на функцию ϕ; константы h, L, $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$ — в условиях **1)**–**4)** на функцию x; константы p, A_0, B_1, B_2, γ и функция $\bar\eta(\lambda)$ участвуют в представлении (1.4) с оценками (1.5), (1.6). Все остальные константы определяются перед формулировками лемм.

$$
\begin{aligned}
g_{\lambda\nu}[\sigma](s) &= \Delta_1\phi_{\lambda\nu}(s-s_1) + (\sigma-\sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\Delta_1(\phi_{\lambda\nu}(s-s_1))_s^{(\gamma)},\\
\mu^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s) &= \sum_{k=2}^{l}\Delta_k\phi_{\lambda\nu}(s-s_k) + (\sigma-\sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\sum_{k=2}^{l}\Delta_k(\phi_{\lambda\nu}(s-s_k))_s^{(\gamma)} +\\
&\qquad \alpha_{\lambda\nu}(s) + (\sigma-\sigma^*)\beta^1_{\lambda\nu}[\sigma^*](s) + (\sigma-\sigma^*)^2\beta^2_{\lambda\nu}[\sigma](s) + \Delta x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s).
\end{aligned}
$$

Ясно, что $\bar{\eta}(\lambda\nu) \le \bar{\eta}(\lambda)$. При условии (2.4) на параметр λ для $|s-s_1| < h/2$ имеем

$$|\mu^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)| \le \bar{B}_0\nu\lambda^{0.5} + B_2r^2 \le 2B_2r^2.$$

Поскольку

$$\left|(\sigma-\sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\Delta_1(\phi_{\lambda\nu}(s-s_1))_s^{(\gamma)}\right| \le rK_0$$

и $r \le a\Delta^{\min}/(2G)$, то, учитывая условие (б) на функцию ϕ, имеем

$$\max_{|s-s_1|<h/2}\left|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)\right| > \Delta^{\min}/2 = P.$$

С другой стороны, вне множества $Q = \cup_{k=1}^{l}\{s\colon |s-s_k| < h/2\}$ функция $x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)$ оценивается сверху следующим образом:

$$|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)| < \Delta^{\min}/2 = P.$$

Ввиду полученных выше оценок и непрерывности функции $|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma]|$ в методе $\widetilde{\Pi}$ найдется точка $\bar{s}$ такая, что $|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](\bar{s})| = P$ и $|\bar{s}-s_1| < h/2$. Поскольку $|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)| > P$, то $s_1 > \bar{s}$. Следовательно, s_1 принадлежит промежутку $(\bar{s}, \bar{s}+h/2)$.

Пусть $\tilde{s}$ — точка максимума модуля функции $x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)$ на отрезке $(\bar{s}, \bar{s}+h/2)$. Используя условия (б) и (г) на функцию ϕ, имеем $\sup_{|s-s_1|>\lambda\nu}|\phi_{\lambda\nu}(s-s_1)| = 1-a \ge 0$. Следовательно,

$$|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s})| > (2-a)\Delta_1/2, \qquad \sup_{|s-s_1|>\lambda\nu}|x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](s)| < (2-a)\Delta_1/2.$$

Таким образом, $|\tilde{s}-s_1| \le \lambda\nu$. Положим $\tilde{\Delta} = x^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s})$. Рассмотрим разность

$$\tilde{\Delta}-\Delta_1 = g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s})-\Delta_1+\mu^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) = \Delta_1\phi_{\lambda\nu}(\tilde{s}-s_1)-\Delta_1+(\sigma-\sigma^*)p\Delta_1(\phi_{\lambda\nu}(\tilde{s}-s_1))_s^{(\gamma)}+\mu^\delta_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}).$$

Поскольку $\Delta_1\phi_{\lambda\nu}(\tilde{s}-s_1)-\Delta_1 \le 0$, то $|\tilde{\Delta}-\Delta_1| \le Gr$. □

Однако полученная в этой лемме оценка точности аппроксимации s_1 не позволит обосновать сходимость итерационной процедуры уточнения параметра σ. Улучшить оценку леммы 2 можно, учитывая условие (е) на функцию ϕ, которое в лемме 2 не использовалось. Покажем, что если $|\tilde{s}-s_1| \le \lambda\nu$, то для приближения $\tilde{s}$, при дополнительных условиях на параметры r, λ, имеет место более точная оценка. Перед формулировкой леммы введем следующие константы:

$$K_2 = 2\Delta^{\max}C_2, \qquad K_1 = \frac{\Delta^{\min}C_1}{2}, \qquad \bar{K}_0 = \frac{K_0}{K_1}, \qquad \bar{K}_1 = \frac{K_0^2+8K_2B_2}{K_1^2},$$

$$\bar{K}_2 = \frac{2K_2K_0}{K_1^2}, \qquad \bar{K} = \frac{\bar{K}_2 + \left(\bar{K}_2^2 + 4(\bar{K}_1+\bar{K}_2\bar{K}_0)\right)^{0.5}}{2}, \qquad K = \bar{K}+\bar{K}_0.$$

Пусть параметры в следующей лемме удовлетворяют условиям:

$$r \le \min\left\{\frac{C_1}{p\bar{C}}, 1\right\}, \qquad \lambda \le \min\left\{\left(\frac{B_2 r^2}{\nu^{2\gamma+1}\bar{B}_0}\right)^2, 1\right\}. \tag{2.5}$$

Лемма 3. *Пусть определена непрерывная функция* $x_\lambda^\delta[\sigma]$, *для которой имеет место разложение* (1.4) *с оценками* (1.5), (1.6); *для точного решения* $x \in MW_2^1$ *выполнены условия* **1**)–**4**), *функция* $\phi \in \Phi 1_\gamma$; *константа* $M > 0$ *фиксирована. Тогда для любых* $\delta \ge 0$, $\nu > 1$, *для всех* r, λ, *удовлетворяющих условиям* (2.5), *и при выполнении условий* $|\sigma - \sigma^*| \le r\lambda^\gamma$, $\bar{\eta}(\lambda) \le M/\delta$, $|\tilde{s} - s_1| \le \lambda\nu$ *имеет место оценка* $|\tilde{s} - s_1| \le Kr\lambda/\nu^{\gamma-1}$.

Доказательство. Используя обозначения из доказательства леммы 2, запишем

$$x_{\lambda\nu}^\delta[\sigma](s) = g_{\lambda\nu}[\sigma](s) + \mu_{\lambda\nu}^\delta[\sigma](s).$$

Поскольку, используя (2.3), имеем $|\mu_{\lambda\nu}^\delta[\sigma](\tilde{s})| \le \bar{B}_0\nu\lambda^{0.5} + B_2 r^2/\nu^{2\gamma}$, то при условии (2.5) на λ получаем $|\mu_{\lambda\nu}^\delta[\sigma](s)| \le 2B_2 r^2/\nu^{2\gamma}$. Используя формулу Тейлора, запишем равенство

$$g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1) = (\tilde{s} - s_1)\frac{\partial}{\partial s}g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1) + \frac{(\tilde{s} - s_1)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}g_{\lambda\nu}[\sigma](\theta), \quad \theta \in (\tilde{s}, s_1). \tag{2.6}$$

Введем обозначения:

$$U_{\lambda\nu}(\sigma, s) = (\sigma - \sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\Delta_1(\phi_{\lambda\nu}(s - s_1))_s^{(\gamma+1)}, \qquad V_{\lambda\nu}(\sigma, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}g_{\lambda\nu}[\sigma](s).$$

В этих обозначениях из (2.6) получаем

$$\tilde{s} - s_1 = \frac{-U_{\lambda\nu}(\sigma, s_1) \pm \left(U_{\lambda\nu}^2(\sigma, s_1) + 2V_{\lambda\nu}(\sigma, \theta)(g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1))\right)^{0.5}}{V_{\lambda\nu}(\sigma, \theta)}. \tag{2.7}$$

Используя условие (e) на функцию ϕ, легко показать, что для $s \in (\tilde{s}, s_1)$ имеет место оценка

$$\frac{C_1}{(\lambda\nu)^2} \le |\phi_{\lambda\nu}''(s - s_1)| \le \frac{C_2}{(\lambda\nu)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta^{\min}}{(\lambda\nu)^2}\left(C_1 - \frac{rp\bar{C}}{\nu^\gamma}\right) \le |V_{\lambda\nu}(\sigma, \theta)| \le \frac{\Delta^{\max}}{(\lambda\nu)^2}\left(C_2 + \frac{rp\bar{C}}{\nu^\gamma}\right).$$

Поскольку $\nu > 1$, то, учитывая условие (2.5) на параметр r, имеем

$$\frac{K_1}{(\lambda\nu)^2} \le |V_{\lambda\nu}(\sigma, \theta)| \le \frac{K_2}{(\lambda\nu)^2}.$$

Используя оценку (2.3), получаем

$$|U_{\lambda\nu}(\sigma, s_1)| \le \frac{rK_0}{\lambda\nu^{\gamma+1}}. \tag{2.8}$$

Оценим модуль разности $g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)$:

$$|g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1))| \le |g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)| + |x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1) - g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1))|$$
$$\le |g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)| + \frac{2B_2 r^2}{\nu^{2\gamma}}.$$

Для оценки первого слагаемого в правой части рассмотрим два случая:
1) если $g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) < x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)$, то поскольку $\tilde{s}$ точка максимума функции $x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma]$, имеем

$$x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1) - g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) \le x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) \le \frac{2B_2 r^2}{\nu^{2\gamma}};$$

2) если $g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) \ge x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)$, то поскольку s_1 точка максимума функции $\phi_{\lambda\nu}(s - s_1)$, имеем

$$g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1) = \Delta_1 \phi_{\lambda\nu}(\tilde{s} - s_1) - x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1) + (\sigma - \sigma^*)\bar{p}[\sigma^*]\Delta_1(\phi_{\lambda\nu}(\tilde{s} - s_1))^{(\gamma)}_s$$
$$\le (\sigma - \sigma^*) p \Delta_1 \left[(\phi_{\lambda\nu}(\tilde{s} - s_1))^{(\gamma)}_s - \phi^{(\gamma)}_{\lambda\nu}(0) \right] - \mu^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1).$$

Для оценки разности производных в первом слагаемом используем формулу Лагранжа:

$$|(\phi_{\lambda\nu}(\tilde{s} - s_1))^{(\gamma)}_s - \phi^{(\gamma)}_{\lambda\nu}(0)| \le \bar{C} \frac{|\tilde{s} - s_1|}{(\lambda\nu)^{\gamma+1}}.$$

Обозначая $\zeta = |\tilde{s} - s_1|/\lambda\nu$, получаем оценку

$$|g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - x^{\delta}_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)| \le K_0 \zeta \frac{r}{\nu^{\gamma}} + 2B_2 \frac{r^2}{\nu^{2\gamma}}.$$

Следовательно,

$$|g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)| \le K_0 \zeta \frac{r}{\nu^{\gamma}} + 4B_2 \frac{r^2}{\nu^{2\gamma}}.$$

Используем полученные выше соотношения для оценки числителя (2.7):

$$\left| U_{\lambda\nu}(\tilde{\sigma}, s_1) \mp \left(U^2_{\lambda\nu}(\tilde{\sigma}, s_1) + 2V_{\lambda\nu}(\sigma, \theta)(g_{\lambda\nu}[\sigma](\tilde{s}) - g_{\lambda\nu}[\sigma](s_1)) \right)^{0.5} \right|$$
$$\le \frac{1}{\lambda\nu} \left[K_0 \frac{r}{\nu^{\gamma}} + \left((K_0^2 + 8K_2 B_2) \frac{r^2}{\nu^{2\gamma}} + 2K_2 K_0 \zeta \frac{r}{\nu^{\gamma}} \right)^{0.5} \right].$$

Таким образом,

$$|\tilde{s} - s_1| \le (\lambda\nu) \left[\bar{K}_0 \frac{r}{\nu^{\gamma}} + \left(\bar{K}_1 \frac{r^2}{\nu^{2\gamma}} + \bar{K}_2 \zeta \frac{r}{\nu^{\gamma}} \right)^{0.5} \right].$$

Значит

$$\zeta \le \bar{K}_0 \frac{r}{\nu^{\gamma}} + \left(\bar{K}_1 \frac{r^2}{\nu^{2\gamma}} + \bar{K}_2 \zeta \frac{r}{\nu^{\gamma}} \right)^{0.5}.$$

Введем $\bar{\zeta} = \zeta - \bar{K}_0 r/\nu^{\gamma}$, т. е. $\zeta = \bar{\zeta} + \bar{K}_0 r/\nu^{\gamma}$. Рассмотрим два варианта:
1) если $\bar{\zeta} \le 0$, то $\zeta \le \bar{K}_0 r/\nu^{\gamma}$;
2) если $\bar{\zeta} > 0$, то

$$\bar{\zeta}^2 \le \bar{K}_1 \frac{r^2}{\nu^{2\gamma}} + \bar{K}_2 \left(\bar{\zeta} + \bar{K}_0 \frac{r}{\nu^{\gamma}} \right) \frac{r}{\nu^{\gamma}} \qquad \text{или} \qquad \bar{\zeta}^2 - \bar{K}_2 \bar{\zeta} \frac{r}{\nu^{\gamma}} - \left(\bar{K}_1 + \bar{K}_2 \bar{K}_0 \right) \frac{r^2}{\nu^{2\gamma}} \le 0.$$

Следовательно, $0 < \bar{\zeta} \le \bar{K} r/\nu^{\gamma}$ и $\zeta \le K r/\nu^{\gamma}$, где $K = \bar{K} + \bar{K}_0$. Подставляя в последнее неравенство ζ, получаем требуемую оценку. □

3. Метод идентификации параметра

Для уточнения параметра σ в этом пункте построен итерационный метод. Зафиксируем параметры $0 < q < 1$, $d > 1$, $M > 0$. Параметры r и ν будут определены ниже. Зададим последовательность параметров регуляризации

$$\lambda_i = \left(\frac{q^i \rho}{r}\right)^{1/\gamma}.$$

Метод Π_σ. Положим $\sigma_0 = \bar{\sigma}$, $i = 1$. В цикле: при первом выполнении условия $\bar{\eta}(\lambda_i) > M/\delta$ полагаем $i(\delta) = i - 1$, $\sigma_{i(\delta)} = \sigma_{i-1}$ и выходим из цикла; иначе, используя метод $\widetilde{\Pi}$, находим приближение $\tilde{s}^i$ к положению разрыва. Полагаем

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} - \frac{x^\delta_{\lambda_i}[\sigma_{i-1}](\tilde{s}^i) - x^\delta_{d\lambda_i}[\sigma_{i-1}](\tilde{s}^i)}{D\tilde{\Delta}^i \lambda_i^{-\gamma}}, \quad D = p\phi^\gamma(0)(1 - d^{-\gamma}), \quad \tilde{\Delta}^i = x^\delta_{\lambda_i \nu}[\sigma_{i-1}](\tilde{s}^i);$$

затем $i = i + 1$ и повторяем цикл.

Поясним, что итерационный метод идентификации параметра Π_σ на каждом шаге использует три параметра регуляризации: два параметра λ_i и $d\lambda_i$ для уточнения σ; для аппроксимации положения разрыва s_1 используется параметр регуляризации $\lambda_i \nu$.

В доказательстве следующей теоремы проводится согласование параметров. Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие величины[4]:

$$r = \min\left\{\frac{q\bar{C}_0}{2\bar{B}_2}; \frac{a\Delta^{\min}}{2G}; \frac{C_1}{p\bar{C}}; 1\right\}, \qquad \nu = \max\left\{\left(\frac{K}{r}\right)^{1/(\gamma-1)}; d\right\},$$

$$\lambda_0 = \min\left\{\left(\frac{B_2 r^2}{\nu^{2\gamma+1}\bar{B}_0}\right)^2; \frac{h}{2}; 1\right\}, \qquad \rho_0 = r\lambda_0^\gamma.$$

Теорема. *Пусть определена непрерывная функция $x^\delta_\lambda[\sigma]$, для которой имеет место разложение (1.4) с оценками (1.5), (1.6); для точного решения $x \in MW_2^1$ выполнены условия* **1**)–**4**), *функция $\phi \in \Phi 1_\gamma$; константы $0 < q < 1$, $d > 1$, $M > 0$ фиксированы. Тогда для всех ρ, σ_0 таких, что $\sigma_0 = \bar{\sigma}$, $|\sigma^* - \bar{\sigma}| \le \rho \le \rho_0$ итерационный процесс Π_σ всегда завершится, $i(\delta) \to \infty$ при $\delta \to +0$ и имеет место оценка $|\sigma_{i(\delta)} - \sigma^*| \le q^{i(\delta)}\rho$.*

Доказательство. Зафиксируем константы $0 < q < 1$, $d > 1$, $M > 0$. Поскольку $\rho \le r\lambda_0^\gamma$, то $\lambda_1 \le \lambda_0$. Если $\bar{\eta}(\lambda_1) > M/\delta$, то ни одной итерации не производится и $\sigma_{i(\delta)} = \bar{\sigma}$. В противном случае проводятся итерации, уточняющие значения σ_i, до первого выполнения условия $\bar{\eta}(\lambda_i) > M/\delta$. Поскольку особенности занумерованы в порядке возрастания s_k, то метод $\widetilde{\Pi}$ всегда находит приближение к s_1.

Индукцией по i покажем, что на каждом шаге справедливы оценки:

$$|\tilde{s}^i - s_1| \le \frac{Kr\lambda_i}{\nu^{\gamma-1}}, \qquad |\sigma_i - \sigma^*| \le q^i\rho = r\lambda_i^\gamma.$$

[4]Напомним, что константы $\bar{C}$, C, C_0, C_1, C_2, a возникают в условиях (a)–(e) на функцию ϕ; константы h, L, $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$ — в условиях **1)–4)** на функцию x; константы p, A_0, B_1, B_2, γ и функция $\bar{\eta}(\lambda)$ участвуют в представлении (1.4) с оценками (1.5), (1.6). Все остальные константы определяются перед формулировками лемм.

По окончании процесса будет справедлива оценка $|\sigma_{i(\delta)}-\sigma^*| \le q^{i(\delta)}\rho$. Поскольку функция $\bar\eta(\lambda)$ монотонно растет при уменьшении λ, то $i(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Следовательно, $\sigma_{i(\delta)} \to \sigma^*$ при $\delta \to 0$.

База индукции очевидно выполняется. Пусть после i-го шага $|\sigma_i - \sigma^*| \le q^i\rho = r\lambda_i^\gamma$ и $\bar\eta(\lambda_i) \le M/\delta$. Тогда по лемме 3 $|\tilde s^i - s_1| \le Kr\lambda_i/\nu^{\gamma-1}$. Поскольку $\nu \ge (K/r)^{1/(\gamma-1)}$, то $|\tilde s^i - s_1| \le r^2\lambda_i$. Следовательно, по лемме 1 $|\sigma_{i+1} - \sigma^*| \le q^{i+1}\rho = r\lambda_{i+1}^\gamma$. □

Приведем содержательный пример ядра $K(t,\sigma)$ и усредняющей функции $\phi(t)$, для которых справедливо разложение (1.4) с оценками (1.5), (1.6) и, таким образом, применима теорема. Ниже будут использованы формулы прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\widehat f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt, \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat f(z)e^{izt}dz.$$

Пример. Функция $K(t,\sigma) = \exp(-t^2/(2\sigma^2))$. Ее преобразование Фурье имеет вид $\widehat K(z,\sigma) = \sigma\exp(-z^2\sigma^2/2)$. Выберем усредняющую функцию $\phi(t) = \sin t/t$, имеющую финитное преобразование Фурье. Ясно, что $\phi \in \Phi 1_\gamma \bigcap \Phi_\gamma[K_\sigma]$. Запишем функцию $x_\lambda^\delta[\sigma]$ в виде суммы двух функций:

$$x_\lambda^\delta[\sigma](s) = x_\lambda[\sigma](s) + \Delta x_\lambda^\delta[\sigma](s), \qquad \Delta x_\lambda^\delta[\sigma](s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(y(t) - y^\delta(t)\Big) f_\lambda[\sigma](s-t)\,dt,$$

$$x_\lambda[\sigma](s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t) f_\lambda[\sigma](s-t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat x(z)\widehat{\phi'_\lambda}(z)Q(z,\sigma)e^{izs}dz, \quad Q(z,\sigma) = \frac{\widehat K(z,\sigma^*)}{\widehat K(z,\sigma)}.$$

Для усредняющей функции, имеющей финитное преобразование Фурье, функция $\eta(\lambda,\sigma)$ из оценки в (1.5) выписывается в явном виде

$$\eta(\lambda,\sigma) = \|f_\lambda[\sigma]\|_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\frac{z\widehat\phi_\lambda}{\widehat K(z,\sigma)}\right\|_{L_2}.$$

Тогда $\eta(\lambda,\sigma) \le \vartheta(\lambda)\|\phi'\|_{L_2}\lambda^{-0.5}$, где $\vartheta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\max_{|z|\le 1/\lambda, |\sigma-\sigma^*|\le\rho}\left|\widehat K(z,\sigma)\right|^{-1}$. Следовательно, можно положить $\bar\eta(\lambda) = \vartheta(\lambda)\|\phi'\|_{L_2}\lambda^{-1}$.

Используем формулу Тейлора по σ при фиксированном s для разности $x_\lambda[\sigma](s) - x_\lambda[\sigma^*](s)$:

$$x_\lambda[\sigma](s) - x_\lambda[\sigma^*](s) = (\sigma - \sigma^*)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat x(z)\widehat{\phi'_\lambda}(z)Q'_\sigma(z,\sigma^*)e^{izs}dz +$$

$$\frac{(\sigma-\sigma^*)^2}{2}\int\limits_{-1/\lambda}^{1/\lambda}\widehat x(z)\widehat{\phi'_\lambda}(z)Q''_{\sigma\sigma}(z,\tilde\sigma)e^{izs}dz. \tag{3.1}$$

Поскольку $Q'_\sigma(z,\sigma^*) = \sigma^* z^2 - 1/\sigma^*$, то для первого слагаемого имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat x(z)\widehat{\phi'_\lambda}(z)Q'_\sigma(z,\sigma^*)e^{izs}dz = \sigma^*\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat x(z)\widehat{\phi'''_\lambda}(z)e^{izs}dz - \frac{1}{\sigma^*}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat x(z)\widehat{\phi'_\lambda}(z)e^{izs}dz.$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(z)\widehat{\phi'''}_\lambda(z)e^{izs}dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\phi_\lambda(s-t))'''_{sss}dt = \sum_{k=1}^{l}\Delta_k\phi''_\lambda(s-s_k) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x'(t)(\phi_\lambda(s-t))''_{ss}dt,$$

то, подставляя полученные выражения в (3.1) и учитывая представление (1.2) для $x_\lambda[\sigma^*](s)$, получаем искомое разложение

$$x_\lambda^\delta[\sigma](s) = \sum_{k=1}^{l}\Delta_k\phi_\lambda(s-s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta[\sigma](s) +$$

$$(\sigma-\sigma^*)\sigma^*\sum_{k=1}^{l}\Delta_k(\phi_\lambda(s-s_k))''_{ss} + (\sigma-\sigma^*)\beta_\lambda^1[\sigma^*](s) + (\sigma-\sigma^*)^2\beta_\lambda^2[\sigma](s),$$

$$\sup_s|\alpha_\lambda(s)| \le A_0\lambda^{0.5}, \qquad \sup_s|\Delta x_\lambda^\delta[\sigma](s)| \le \delta\eta(\lambda,\sigma), \qquad \sup_s|\beta_\lambda^1[\sigma^*](s)| \le B_1\lambda^{-1.5},$$

$$\sup_s|\beta_\lambda^2[\sigma](s)| \le B_2\lambda^{-4},$$

A_0, B_1, B_2 — константы. Причем $\eta(\lambda,\sigma)\lambda^{-0.5} \le \bar{\eta}(\lambda)$ для всех $\sigma:\ |\sigma^*-\sigma| \le \rho$, функция $\bar{\eta}(\lambda)$ монотонно убывает и $\lim_{\lambda\to+0}\bar{\eta}(\lambda) = \infty$. Таким образом, для ядра $K(t,\sigma)$ справедливо представление (1.4) с оценками (1.5), (1.6), и, следовательно, теорема применима.

Литература

1. **Бейтс Р., Мак-Доннел М.** Восстановление и реконструкция изображений. — М.: Мир, 1989. (Bejts R., Mak-Donnel M. Vosstanovlenie i rekonstruktsiya izobrazhenij. — M.: Mir, 1989.)
2. **Василенко Г.И., Тараторин А.М.** Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. (Vasilenko G.I., Taratorin A.M. Vosstanovlenie izobrazhenij. — M.: Radio i svyaz', 1986.)
3. **Протасов К.Т., Белов В.В., Молчунов Н.В.** Восстановление изображений с предварительным оцениванием функции рассеяния точки // Оптика атмосферы и океана. — 2000. — Т. 13, № 2. — С. 139–145. (Protasov K.T., Belov V.V., Molchunov N.V. Vosstanovlenie izobrazhenij s predvaritel'nym otsenivaniem funktsii rasseyaniya tochki // Optika atmosfery i okeana. — 2000. — T. 13, № 2. — S. 139–145.)
4. **Ageev A.L., Antonova T.V.** On solution of nonlinear with respect to parameter equation of the first kind on the class of discontinuous functions // J. Inverse and Ill-Posed Problems. — 1999. — Vol. 7, iss. 1. — P. 1–16.
5. **Антонова Т.В.** О решении нелинейных по параметру уравнений 1 рода на классах обобщенных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 819–831. (Antonova T.V. O reshenii nelinejnykh po parametru uravnenij 1 roda na klassakh obobshchennykh funktsii // Zhurn. vychisl. matematiki i mat. fiziki. — 2000. — T. 40, № 6. — S. 819–831.)
6. **Антонова Т.В.** Решение уравнений первого рода на классах функций с особенностями // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. — 2002. — Т. 8, № 1. — С. 147–188. (Antonova T.V. Reshenie uravnenij pervogo roda na klassakh funktsij s osobennostyami // Tr. in-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2002. — T. 8, № 1. — S. 147–188.)
7. **Антонова Т.В.** Решение нелинейных уравнений 1 рода на классах функций с разрывами / ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2000. — Деп. в ВИНИТИ 17.10.00, № 2639–В00. (Antonova T.V. Reshenie nelinejnykh uravnenij 1 roda na klassakh funktsij s razryvami / IMM UrO RAN. — Ekaterinburg, 2000. — Dep. v VINITI 17.10.00, № 2639–V00.)

8. **Hall P., Qui P.** Blind deconvolution and deblurring in image analysis // Statistica Sinica. — 2007. — Vol. 17. — P. 1483–1509.

9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 30–45. (Ageev A.L., Antonova T.V. O nekorrektno postavlennykh zadachakh lokalizatsii osobennostej // Tr. in-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2011. — T. 17, № 3. — S. 30–45.)

Поступила в редакцию 1 апреля 2014 г.