

**ОБ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ**

**В. В. Соколов**

(Новосибирск)

В работе численно моделируется процесс распространения длинноволновых возмущений в рамках уравнения Бюргера—Кортевега—де Вриза с учетом низкочастотного поглощения. Рассматриваются возможные автомодельные решения.

Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды  $U$  в среде с кубической дисперсией описывается уравнением Кортевега—де Вриза [1-3]

$$U_t + UU_x + \beta U_{xxx} = 0 \quad (1)$$

Если в среде есть диссипация, то вместо (1) имеет

$$U_t + UU_x + \beta U_{xxx} - \alpha U_{xx} + \gamma U = 0 \quad (2)$$

Два последних члена в (2) определяют высокочастотное и низкочастотное поглощения. Уравнение (2) и его модификации получаются при рассмотрении эволюции возмущений в плазме, на поверхности жидкости, в двухфазной среде, в среде с неоднородностями и т. д. [1-7].

Когда отсутствуют дисперсия и высокочастотное поглощение ( $\beta = \alpha = 0$ ), из (2) имеем

$$U_t + UU_x + \gamma U = 0 \quad (3)$$

Получим автомодельное решение этого уравнения. После замены

$$\xi = x \exp(\gamma t), \quad U = \exp(\gamma t) \psi(\xi)$$

уравнение (3) принимает вид

$$2\psi + \xi\psi_\xi + \mu\psi\psi_\xi = 0, \quad \mu = \exp(2\gamma t)\gamma^{-1} \quad (4)$$

Вводим  $\varphi = \mu\psi$ . Тогда из (4) получаем

$$2\varphi + (\xi + \varphi)\varphi_\xi = 0 \quad (5)$$

Это — уравнение Абеля второго рода, в него входят только автомодельные переменные.

Если исключить случай  $\varphi \equiv 0$ , то для функции  $\xi = \xi(\varphi)$  получается линейное уравнение

$$\frac{d\xi}{d\varphi} + \frac{1}{2\varphi}\xi = -\frac{1}{2} \quad (6)$$

Его решение есть

$$\xi = C\varphi^{-1/2} - \varphi/3 \quad (7)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Из (7) можно найти  $\varphi$ . Пусть  $\beta = \gamma = 0$ . Тогда (2) переходит в известное уравнение Бюргерса

$$U_t + UU_x - \alpha U_{xx} = 0 \quad (8)$$

Нетрудно показать, что (8) имеет автомодельное решение вида

$$U(x, t) = \alpha (2\alpha t)^{-1/2} \psi [x (2\alpha t)^{-1/2}] \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получим уравнение для

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} - \psi \frac{d\psi}{d\eta} + \eta \frac{d\psi}{d\eta} + \psi = 0, \quad \eta = x(2\alpha t)^{-1/2} \quad (10)$$

Когда амплитуда возмущения достаточно мала и нелинейным членом в (10) можно пренебречь, то

$$\psi = e^{-\eta^2/2} \left( C_1 + C_2 \int e^{-\eta^2/2} d\eta \right) \quad (11)$$

где  $C_1, C_2$  — константы интегрирования.

В общем случае (10) заменой

$$y = (\eta - \psi) / 2 \quad (12)$$

приводится к уравнению Риккати

$$y' + y^2 = 1/2 + \eta^2 / 4 + C \quad (13)$$

Подстановка

$$z = \exp \left( \int y d\eta \right) \quad (14)$$

дает

$$z'' = (1/2 + \eta^2 / 4 + C) z \quad (15)$$

Если  $\psi = \psi' = 0$  при  $\eta = 0$ , то из (12), (13) следует, что  $C = -1/2$ . Тогда

$$z = A_1 \sqrt{\eta} J_{1/4}(i\eta^2 / 4) + A_2 \sqrt{\eta} Y_{1/4}(i\eta^2 / 4) \quad (16)$$

где  $A_1, A_2$  определяются из начальных и краевых условий,  $J_{1/4}, Y_{1/4}$  функции Бесселя.

Если начальные условия таковы, что константа  $C$  в (15) равна нулю, то

$$z = e^{\eta^2/4} \left( B_1 + B_2 \int e^{-\eta^2/4} d\eta \right) \quad (17)$$

Зная  $z$ , с помощью (12), (14) можно определить  $\psi$ . При других значениях  $C$  уравнение (15) не интегрируется в квадратурах.

Выясним физический смысл автомодельного решения уравнения (8). Пусть в качестве начального условия для (8) задается распределение с характерной амплитудой  $U_0$  и характерным размером  $\lambda$ . Вводя безразмерные величины

$$\tau = U_0 t / \lambda, \quad y = x / \lambda, \quad v = U / U_0$$

из (8) получим

$$v_\tau + vv_y - v^{-1}v_{yy} = 0, \quad v = U_0 \lambda / \alpha$$

Рассмотрим последовательность начальных возмущений, у которых  $\lambda \rightarrow 0$ , но величина  $U_0 \lambda$  остается постоянной. Тогда при одном и том же  $\alpha$

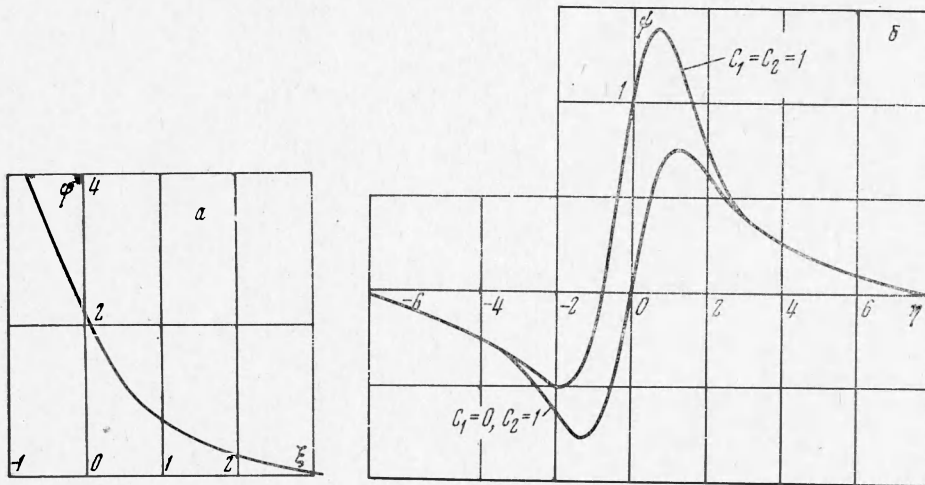
решения уравнения (8) должны быть подобными, так как  $v = \text{const}$ , следовательно, предельное решение может содержать только комбинацию параметров, имеющих размерность длины и скорости. В уравнении Бюргера таким параметром является  $\alpha$ . Тогда предельное решение имеет вид (9). Можно показать, что начальное возмущение, приводящее к (9), есть

$$U(x, 0) = \alpha v \delta(x)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция. Действительно, если  $A$  — произвольная постоянная, то, воспользовавшись одним из представлений  $\delta(x)$ , имеем

$$A \delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (A \lambda \pi^{-1} / (x^2 + \lambda^2))$$

Здесь  $A / \lambda$  есть характерная скорость  $U_0$ , тогда  $U_0 \lambda = A = \text{const}$ . Но  $U_0 \lambda = \alpha v$ , следовательно,  $A = \alpha v$ . Таким образом, физический смысл



Фиг. 1

автомоделного решения (8) уравнения Бюргера состоит в том, что оно описывает распространение начальных возмущений вида

$$U(x, 0) = \frac{\alpha v \lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)} \quad \text{при } x \gg \lambda, t^{1/2} \gg \lambda x^{-1/2}$$

Подобным же образом в [2] устанавливается физический смысл автомоделного решения уравнений Кортевега — де Вриза, о котором говорится ниже. На фиг. 1, а, б изображены соответственно автомоделное решение  $\varphi(\xi)$  уравнения (5) и решение (14) уравнения (10). Из фиг. 1, а видно, что  $\varphi(\xi)$  имеет смысл при  $\xi \gg 1$ , т. е.  $x \gg \lambda, t \gg \gamma^{-1}$ .

Когда в среде нет диссипации, то распространение возмущения описывается уравнением Кортевега — де Вриза (1). В [2] показано, что уравнению (1) удовлетворяет следующее автомоделное решение:

$$U(x, t) = \beta (3 \beta t)^{-2/3} \chi [x (3 \beta t)^{-1/3}] \tag{18}$$

Подстановка (18) в (1) дает уравнение для

$$\chi'' - \zeta \chi' + \chi \chi' - 2 \chi = 0, \quad \zeta = x (3 \beta t)^{-1/3} \tag{19}$$

Если рассматривать экспоненциально затухающие при  $\zeta \rightarrow \infty$  решения (19), то

$$\chi(\zeta) \approx B \operatorname{Ai}(\zeta)/d\zeta \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty \quad (20)$$

где  $\operatorname{Ai}(\zeta)$  — функция Эйри,  $B$  — постоянная.

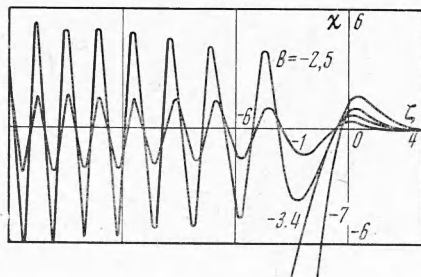
Поведение  $\chi(\zeta)$  при отрицательных и небольших положительных значениях  $\zeta$  найдено в [2] с помощью численного интегрирования (19) при положительных  $B$ . В данной работе выяснено поведение  $\chi(\zeta)$  и при отрицательных  $B$  (фиг. 2). Решения при  $B < 0$  и  $B > 0$  заметно отличаются в окрестности начала координат. При  $B < B_*$  функции  $\chi(\zeta)$  при отрицательных  $\zeta$  осциллируют с медленно растущей амплитудой. При  $B > B_*$  решения  $\chi$  имеют особенность. Как показывают численные эксперименты

$$B_*^{(+)} = -B_*^{(-)} = 3,35$$

Перейдем к рассмотрению нестационарных решений уравнения (2). В работах [6, 7] находятся поправки к стационарному решению уравнения (1), когда диссипативные члены в (2) малы и получающаяся волна близка к кноидальной. В данной работе с помощью численного интегрирования находятся решения уравнения (2) при различных соотношениях между коэффициентом дисперсии  $\beta$  и параметрами поглощения  $\alpha$  и  $\gamma$ .

В качестве начального условия для (2) задавалось гауссовское распределение

$$U(x, 0) = a_0 \exp[-(x - x_0)^2 / l^2] \quad (21)$$



Фиг. 2

Рассматривались периодические граничные условия

$$U(x, t) = U(x + L, t) \quad (22)$$

Для выяснения вопроса о структуре спектра возмущения полученное решение уравнения (2) разлагалось в ряд Фурье

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^N U_k \exp(2\pi kx / L) \quad (23)$$

Количество гармоник  $N$  выбиралось так, чтобы длина волны  $N$ -й гармоники  $\lambda_N = L / 2\pi N$  была много больше пространственного шага интегрирования.

Для проверки правильности вычислений в качестве начального распределения для уравнения (2) при  $\alpha = \gamma = 0$  задавалось солитонное стационарное решение уравнения Кортевега — де Вриза [1-3]

$$U(x, 0) = a \operatorname{sech}^2(a/12\beta)^{1/2}(x - x_0) \quad (24)$$

Его изменение с течением времени не превышало погрешности интегрирования уравнения (2). Точность счета контролировалась законами сохранения. При  $\alpha = \gamma = 0$  проверялось сохранение первых двух инвариантов уравнения (1)

$$J_1 = \int_0^L U dx, \quad J_2 = \int_0^L U^2 dx$$

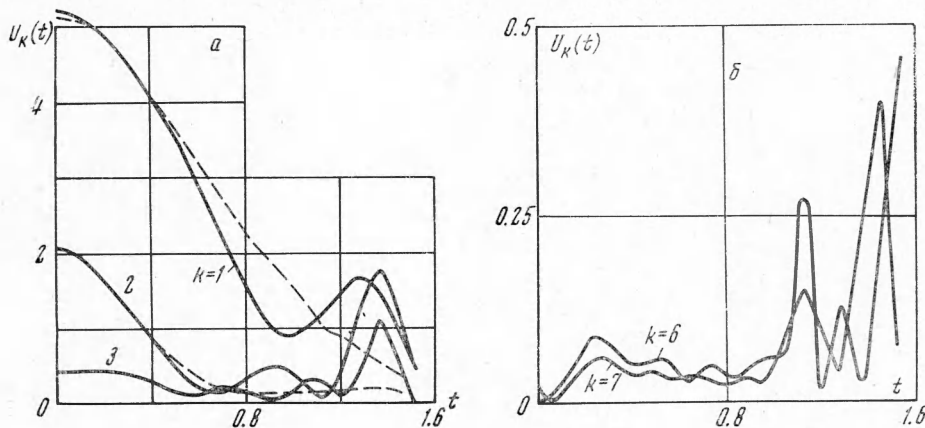
В процессе вычислений максимальные относительные погрешности были следующие:

$$\Delta J_1 / J_1 \approx 3 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta J_2 / J_2 \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

В общем случае ( $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ ) проверялся закон изменения импульса волны с течением времени

$$\int_0^L U(x, t) dx = \exp(-\gamma t) \int_0^L U(x, 0) dx$$

Параметр дисперсии  $\beta$ , амплитуда  $a_0$  и ширина  $l$  начального распределения (21) выбирались так, чтобы параметр подобия  $\sigma = (a_0 l^2 / \beta)^{1/2}$  был как больше, так и меньше  $\sigma_* = \sqrt{12}$  [2].



Фиг. 3

В случае очень больших  $\sigma$  ( $\sigma \gg \sigma_*$ ) образуется набор солитонов [2, 3]. На фиг. 3, а, б показана зависимость квадрата фурье-компонент решения  $U_k^2$  от времени при  $\sigma^2 = 7,5 \cdot 10^5$ ,  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $\gamma = 0$ . Видно, что относительный вклад первых гармоник ( $k=1, 2, 3$ ) с ростом  $t$  уменьшается, а более высоких ( $k=6, 7$ ) — увеличивается. То же происходит и при  $\sigma^2 = 9$ . Штриховыми линиями показано поведение  $U_k^2(t)$  в случае консервативной среды ( $\alpha = \gamma = 0$ ).

Таким образом, высокочастотное поглощение «дестабилизирует» волну возмущения. Это наблюдалось экспериментально, например, при распространении звука в двухфазной среде, состоящей из жидкости и пузырьков газа [5]. Картина качественно та же и при положительной дисперсии. Качественно дестабилизацию волны можно объяснить, используя стационарное решение уравнения (2).

Переходя к переменной  $r = x - Vt$ , полагая  $\gamma = 0$  и интегрируя полученное уравнение один раз при условии  $U = U' = U''$  при  $x \rightarrow \infty$ , имеем

$$\beta U'' - \alpha U' + U^2 / 2 - VU = 0 \quad (25)$$

Из анализа этого уравнения следует [2], что, если  $\alpha > \alpha_* = (4\beta V)^{1/2}$ , то профиль волны становится осцилляторным. Это можно качественно обобщить на случай, когда волна мало отличается от стационарной.

