УДК 538.566

АСИМПТОТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НАД СЛОИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ С ВЫСОКОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Г. Г. Щепкин

(*Ростов-на-Дону*)

В задачах электромагнитного зондирования часто используется модель анизотропной слоистой среды. Распространению электромагнитного поля в таких средах посвящено большое количество работ. Систематическое исследование подобных задач было изложено в работах [1—6].

В данной работе построена асимптотика электромагнитного поля точечного источника, расположенного над слоистой анизотропной средой, когда эта среда имеет достаточно высокую продольную и поперечную проводимость или высота источника над средой достаточно велика. Приведенное в работе обоснование построенной асимптотики показывает, когда такая асимптотика возможна, и позволяет (в случае необходимости) учесть следующие приближения.

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 и будем считать, что диэлектрическая проницаемость ε и проводимость σ зависят лишь от одной координаты x_3, а магнитная проницаемость $\mu = 1$. При этом верхнее полупространство ($x_3 > 0$) имеет постоянные ε, σ, а нижнее ($x_3 < 0$) — переменные. Поскольку рассматриваем анизотропные среды, в которых эти характеристики различны в горизонтальном и вертикальном направлениях, то $\varepsilon_m = \varepsilon_m(x_3)$, $\sigma_m = \sigma_m(x_3)$ ($m=1, 2, 3$—номер декартовой оси). Относительно функций ε_m и σ_m будем предполагать, что они являются непрерывными на каждом из замкнутых отрезков

$$x_{3p} \leqslant x_3 \leqslant x_{3p-1} \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1),$$

для n — число слоев нижнего полупространства. Над слоистой средой в точке с координатами (x_{10}, x_{20}, h, где $h > 0$) расположен излучатель интенсивности $I_m = \mathcal{I}_m e^{i\omega t}$, где $\mathcal{I}_m$ — амплитуда тока в направлении m; ω — круговая частота. Задача состоит в нахождении электромагнитного поля этого излучателя. Рассмотрим поле в верхнем полупространстве ($x_3 > 0$). В этой системе координат компоненты векторного потенциала $\mathbf{u}$ для $\zeta > 0$ удовлетворяют трем неоднородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u_m + k_0^2 u_m = f_m, \tag{1}$$

для $\zeta < 0$ при $m = 1, 2$ — однородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u_m + k_m^2 u_m = 0, \tag{2}$$

при $m = 3$ — уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\lambda^2} k_t^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{k_t^2}\frac{\partial u_3}{\partial \zeta}\right) + k_3^2 u_3 = \tag{3}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial \eta}\right) - \frac{1}{\lambda^2} k_t^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{k_t^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial \eta}\right).$$

Здесь

$$\xi = x_1/h; \ \eta = x_2/h; \ \zeta = x_3/h;$$

$$k_0^2 = (\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - i\omega\mu_0\sigma_0)h^2 = a_0^2 - ib_0^2 = \text{const};$$

$$k_m^2 = (\omega^2\mu_0\varepsilon_m - i\omega\mu_0\sigma_m)h^2 = a_m^2(\zeta) - ib_m^2(\zeta);$$

$\lambda^2 = k_t^2/k_3^2$, $k_t^2 = k_3^2$ при $m = 1, 2$; Δ — оператор Лапласа;

$$f_m = f_m(\xi, \eta, \zeta) = -\mu_0 I_m \delta(\xi - \xi_1)\delta(\eta - \eta_1)\delta(\zeta - 1),$$

где $\xi_1 = x_{10}/h$; $\eta_1 = x_{20}/h$; δ — дельта-функция Дирака.

В точках разрыва функции k_m^2 при $\zeta = \zeta_p$

$$(\zeta_p = x_{3p}/h)\,(p = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \text{ где } \zeta_0 = 0, \ k_m^2(+\zeta_0) = k_0^2,$$

должны выполняться условия «склейки»:

$$(4) \qquad [u_m(\zeta_p)] = 0 \quad (m = 1, 2, 3), \quad [\partial u_m(\zeta_p)/\partial\zeta] = 0$$

$$(m = 1, 2), \left[(1/k_t^2)\operatorname{div} u(\zeta_p)\right] = 0,$$

квадратными скобками обозначен разрыв функций

$$[u(\zeta_p)] = u(\xi, \eta, \zeta)|_{\zeta=\zeta_p+0} - u(\xi, \eta, \zeta)|_{\zeta=\zeta_p-0}.$$

Кроме того, u_m удовлетворяют условиям излучения на бесконечности.

Для $\zeta < 0$ введем обозначения $b^2 = -\min\limits_{\zeta}\left(\operatorname{Re} k_2^t + \operatorname{Im} k^2\right)$, $d^2 = k_t^2/b^2$. Параметр $b > 0$ предполагается большим. Построим асимптотику функций $u_m(\xi, \eta, \zeta)$ по $\varepsilon = 1/b$. С этой целью применим к задаче (1)—(4) преобразование Фурье по переменным ξ, η, получим

для $\zeta > 0$

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_m}{\partial\zeta^2} - q_0^2 \bar{\bar{u}}_m = \bar{\bar{f}}_m \ (m = 1, 2, 3);$$

для $\zeta < 0$ при $m = 1, 2$

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_m}{\partial\zeta^2} - q_m^2 \bar{\bar{u}}_m = 0;$$

$$k_t^2 \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{k_t^2}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_3}{\partial\zeta}\right) - \lambda^2 q_3^2 \bar{\bar{u}}_3 = -i(\lambda^2 - 1)\frac{\partial}{\partial\zeta}(\alpha\bar{\bar{u}}_1 + \beta\bar{\bar{u}}_2) +$$

$$+ ik_t^2 \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{k_t^2}\right)(\alpha\bar{\bar{u}}_1 + \beta\bar{\bar{u}}_2); \ [\bar{\bar{u}}_m(\zeta_p)] = 0 \quad (m = 1, 2, 3);$$

$$\left[\frac{\partial\bar{\bar{u}}_m}{\partial\zeta}(\zeta_p)\right] = 0 \ (m = 1, 2); \ \left[\frac{1}{k_t^2}\left(-i\alpha\bar{\bar{u}}_1(\zeta_p) - i\beta\bar{\bar{u}}_2(\zeta_p) + \frac{\partial\bar{\bar{u}}_3}{\partial\zeta}(\zeta_p)\right)\right] = 0,$$

где

$$\bar{\bar{u}}_m = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_m(\xi, \eta, \zeta)\, e^{i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi d\eta;$$

$$\bar{\bar{f}}_m = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_m(\xi, \eta, \zeta)\, e^{i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi d\eta;$$

$$q_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k_0^2};\ q_m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k_m^2},\ \mathrm{Re}\, q_0, q_m > 0.$$

Введем функции $v_m(\zeta) = \overline{\overline{u}}_m(\zeta) - w_m(\zeta)$, где w_m — решения задач для $\zeta > 0$

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial \zeta^2} - q_0^2 w_m = \overline{\overline{f}}_m \text{ при } w_m(0) = 0,\ w_m(-\infty) = 0\ (m = 1, 2);$$

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial \zeta^2} - q_3^2 w_3 = \overline{\overline{f}}_3 \text{ при } \frac{\partial w_3}{\partial \zeta}(0) = 0,\ w_3(-\infty) = 0.$$

Функции v_m определяются как решения следующих краевых задач

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial \zeta^2} - q_0^2 v_m = 0\ (m = 1, 2, 3,) \text{ для } \zeta > 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial \zeta^2} - q_m^2 v_m = 0\ (m = 1, 2) \text{ для } \zeta < 0;$$

$$k_t^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{k_t^2}\frac{\partial v_3}{\partial \zeta}\right) - \lambda^2 q_3^2 v_3 = 0.$$

На границе $\zeta = 0$ при $m = 1, 2$ функция $v_m(\zeta)$ непрерывна, ее производная терпит разрыв

$$[v_m(0)],\ [v_m'(0)] = -w_m'(0),$$

на других границах раздела при $\zeta = \zeta_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ $v_m(\zeta)$ и $v_m'(\zeta)$ непрерывны

$$[v_m(\zeta_p)] = [v_m'(\zeta_p)] = 0. \tag{6}$$

При $m = 3$ на границе $\zeta = 0$ функция $v_3(\zeta)$ терпит разрыв

$$[v_3(0)] = -w_3(0), \tag{7}$$

а при $\zeta = \zeta_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ $v_3(\zeta)$ — непрерывна

$$[v_3(\zeta_p)] = 0.$$

Кроме того, при $\zeta = \zeta_p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ выполняется

$$\left[(1/k_t^2)(-i\alpha v_1(\zeta_p) - i\beta v_2(\zeta_p) + v_3'(\zeta_p))\right] = 0.$$

На бесконечности функции $v_m(\zeta)$ $(m = 1, 2, 3)$ стремятся к нулю. Следуя [7], вместо функции $v_3(\zeta)$ введем функцию $z(\zeta)$ соотношением

$$z(\zeta) = v_3(\zeta) - [i/(\alpha^2 + \beta^2)]\left(\alpha \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \beta \frac{\partial v^2}{\partial \zeta}\right). \tag{8}$$

Тогда для функции $z(\zeta)$ будет более простая краевая задача

$$\partial^2 z/\partial \zeta^2 - q_0^2 z = 0 \text{ для } \zeta > 0, \tag{9}$$

$$k_t^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{k_t^2} - \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) - \lambda^2 q_3^2 z = 0 \text{ для } \zeta < 0.$$

На границе $\zeta = 0$ выполняется условие

$$[z(0)] = -w_3(0) + [i/(\alpha^2+\beta^2)]\left(\alpha \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}(0) + \beta \frac{\partial w_2}{\partial \zeta}(0)\right),$$

$$\left[\frac{1}{k_t^2}\frac{\partial z}{\partial \zeta}(0)\right] = 0,$$

на других границах при $\zeta = \zeta_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$

(10) $$[z(\zeta_p)] = 0, \left[\frac{1}{k_t^2}\frac{\partial z}{\partial \zeta}(\zeta_p)\right] = 0.$$

Исходя из того, что при $\zeta \geqslant 0$ функции $v_m(\zeta)(m=1, 2)$ и $z(\zeta)$ имеют вид

$$v_m(\zeta) = A_m\, e^{-q_0\zeta},\ z(\zeta) = A_3\, e^{-q_0\zeta},$$

их производные соответственно

$$\frac{\partial v_m}{\partial \zeta}(\zeta) = -q_0 v_m(\zeta),\ \frac{\partial z}{\partial \zeta}(\zeta) = -q_0 z(\zeta),$$

преобразуем граничные условия на границе $\zeta = 0$

(11) $$\frac{\partial v_m}{\partial \zeta}(-0) = -q_0 v_m(-0) + \frac{\partial w_m}{\partial \zeta}(0)\ (m = 1,2);$$

(12) $$q_0 z(-0) + \frac{k_0^2}{k_1^2}\frac{\partial z(-0)}{\partial \zeta} = q_0 w_3(0) - \frac{q_0}{\alpha^2+\beta^2}\times$$
$$\times\left(\alpha\frac{\partial w_1}{\partial \zeta}(0) + \beta\frac{\partial w_2}{\partial \zeta}(0)\right).$$

Таким образом, задача свелась к нахождению функций $v_m(\zeta)(m = 1, 2)$ и $z(\zeta)$ для $\zeta < 0$, удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям (5), (9) с граничными условиями (11), (12) при $\zeta = 0$ и условиям (6), (8) при $\zeta = \zeta_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$. На бесконечности функции $v_m(\zeta)$ $(m = 1, 2)$, $z(\zeta)$ стремятся к нулю. Переходим к построению асимптотики этой задачи. Для этого в уравнениях и граничных условиях сделаем замену $\zeta = t\varepsilon$ $(t \leqslant 0)$

(13) $$\partial^2 v_m/\partial t^2 + d^2 v_m = (\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2 v_m \qquad (m = 1, 2);$$

(14) $$d^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{d^2}\frac{\partial z}{\partial t}\right) + d^2 z = (\alpha^2+\beta^2)\,\varepsilon^2 z\lambda^2(t),\ -\operatorname{Re} d > 0;$$

(15) $$\frac{\partial v_m(0)}{\partial t} = -q_0 v_m(0)\,\varepsilon + \frac{\partial w_m}{\partial \zeta}(0)\,\varepsilon,$$

$$[v_m(t_p)] = \left[\frac{\partial v_m}{\partial t}(t_p)\right] = 0\ \ (p = 1, 2, \ldots, n-1);$$

(16) $$q_0 z(0) + \frac{k_0^2}{k_1^2\,\varepsilon}\frac{\partial z}{\partial t}(0) = q_0 w_3(0) - \frac{q_0 i}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\frac{\partial w_1}{\partial \zeta}(0) + \right.$$
$$\left. + \beta\frac{\partial w_2}{\partial \zeta}(0)\right),\ [z(t_p)] = \left[\frac{1}{k_t^2}\frac{\partial z}{\partial t}(t_p)\right] = 0\ (p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Решение задачи (13) — (16) ищем в виде ряда

$$v_m = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon^j v_{mj} + R_{ms}\,(m=1,\,2),\; z = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon^j z_j + R_s, \tag{17}$$

где R_{ms}, R_s — остатки рядов.

Подставляя выражения (17) в уравнения и граничные условия задачи (13) — (16), получим уравнения и граничные условия для последовательного определения v_{m1}, v_{m2}, ..., z_0, z_1, ...

$$\partial^2 v_{mj}/\partial t^2 + d^2 v_{mj} = (\alpha^2+\beta^2)\, v_{mj-2}\,(m=1,2),(j=1,2,\ldots,s), \quad (v_{mj}=0 \text{ при } j\leqslant 0); \tag{18}$$

$$d^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{d^2}\frac{\partial z_j}{\partial t}\right) + d^2 z_j = (\alpha^2+\beta^2)\, z_{j-2}\lambda^2(t)\,(z_j=0 \text{ при } j<0); \tag{19}$$

$$\frac{\partial v_{mj}(0)}{\partial t} = -q_0 v_{mj-1}(0) + \frac{\partial w_m(0)}{\partial \zeta}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial \zeta}(0)=0 \text{ при } j>1, [v_{mj}(t_p)] = \left[\frac{\partial v_{mj}}{\partial t}(t_p)\right] = 0$$

$$(p=1,2,\ldots,(n-1));$$

$$q_0 z_j(0) + \frac{k_0^2}{bd_1^2}\frac{\partial z_j(0)}{\partial t} = q_0 w_3(0) - \frac{q_0 i}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\frac{\partial w_1}{\partial \zeta}(0) + \beta\frac{\partial w_2}{\partial \zeta}(0)\right) \tag{21}$$

$$\left(w_3(0) = \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}(0) = \frac{\partial w_2}{\partial \zeta}(0) = 0 \text{ при } j>0\right),$$

$$[z_j(0)] = \left[\frac{1}{d^2}\frac{\partial z(t_p)}{\partial t}\right] = 0 \;\; (p=1,2,\ldots,n-1).$$

На бесконечности функции v_{mj}, z_j стремятся к нулю. Функции v_{mj}, z_j для $t<0$ находятся как решения дифференциальных уравнений (18), (19) при известных правых частях и условиях (20), (21). Если известны v_{mj} для $\zeta<0$, то $v_m(\zeta)$ для $\zeta>0$ определяются в виде

$$v_m(\zeta) = \sum_{j=1}^{s}(\varepsilon^j v_{mj}(0) + R_{ms}(0))\, e^{-q_0\zeta}\,(m=1,2). \tag{22}$$

Функция $v_3(\zeta)$ для $\zeta>0$ при известных $z_j(\zeta)$ для $\zeta<0$ определяется, если учесть (7), (8) и (22)

$$v_3(\zeta) = \sum_{j=0}^{s}\Big\{\varepsilon^j\Big[z_j(0) + \frac{i}{\alpha^2+\beta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\alpha v_{1j+1}(0) + \beta v_{2j+1}(0)) - w_3(0) + $$
$$+ R_s(0) + \frac{\partial R_{1s}}{\partial\zeta}(0) + \frac{\partial R_{2s}}{\partial s}(0)\Big\}e^{-q_0\zeta}.$$

Зная $v_m(\zeta)$ ($m=1,2,3$), находим $\overset{=}{u}_m = v_m(\zeta) + w_m(\zeta)$, а затем с помощью обратного преобразования Фурье решение задачи (1) — (4) для $\zeta\geqslant 0$

$$u_m(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=1}^{s}(\varepsilon^j v_{mj}(0) + R_{ms}(0)) \times \tag{23}$$
$$\times\, e^{-q_0\zeta} + w_m(\zeta)\Big\}e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\,d\alpha\, d\beta;$$

$$u_3'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \sum_{j=0}^{s} \left\{ \varepsilon^j \left[z_j(0) + \frac{i}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \times \right.\right.\right. \tag{24}$$

$$\left.\left.\left. \times\ (\alpha v_{1j+1}(0) + \beta v_{2j+1}(0)) \right] w_3(0) + R_{3s}(0) \right\} e^{-q_0 \zeta} + w_3(\zeta) \right\rangle e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\alpha d\beta,$$

где

$$R_{3s}(0) = R_s(0) + \frac{\partial R_{1s}}{\partial \zeta}(0) + \frac{\partial R_{2s}}{\partial \zeta}(0).$$

Используя уравнения (5), (9) (при граничных условиях (11), (12), (6), (10)) и определение асимптотики (18) — (21), получим уравнения и граничные условия для остатков R_{ms}, R_s

$$\frac{\partial^2 R_{ms}}{\partial \zeta^2} - q_m^2 R_{ms} = (\alpha^2 + \beta^2)(v_{ms-1} + v_{ms}) \tag{25}$$

$$(m = 1,2),\ v_{ms} = 0 \text{ при } s < 1;$$

$$k_t^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{k_t^2} \frac{\partial R_s}{\partial \zeta} \right) - q_3^2 \lambda^2 R_s = (\alpha^2 + \beta^2) \lambda^2 (z_{s-1} + z_s), \tag{26}$$

$z_s = 0$ при $s < 0$, $R_{m0} = v_m$ — точное решение ($m = 1, 2$);

$$\frac{\partial R_{ms}(0)}{\partial \zeta} + q_0 R_{ms}(0) = -q_0 v_{ms}(0), \tag{27}$$

$$[R_{ms}(\zeta_p)] = \left[\frac{\partial R_{ms}}{\partial \zeta}(\zeta_p) \right] = 0\ (p = 1, 2, \ldots, n-1);$$

$$\frac{\partial R_s(0)}{\partial \zeta} + \frac{k_0^2}{k_{t1}^2} R_s(0) = 0, \tag{28}$$

$$[R_s(\zeta_p)] = \left[\frac{1}{k_t^2} \frac{\partial R_s}{\partial \zeta}(\zeta_p) \right] = 0\ (p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Кроме того, R_{ms}, R_s на бесконечности стремятся к нулю. Для обоснования построенной асимптотики проведем оценку остатков R_{ms} ($m = 1$, 2, 3). Вначале получим априорную оценку самих приближений. Для этого воспользуемся энергетическим методом и, следуя [8], введем функциональное Гильбертово пространство H_0 на интервале $(-\infty, 0)$ со скалярным произведением

$$(v, u) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} v \bar{u} d\zeta,\ (v, v) = \|v\|^2$$

и Гильбертово пространство H со скалярным произведением

$$(v, u)_H = b^2 \int_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} v \bar{u} d\zeta + \int_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} d\zeta, \tag{29}$$

$$(v, v)_H = \|v\|_H^2,$$

где ν — некоторая постоянная $0 < \nu < b$; $e^{-\nu\zeta}$ — весовая функция.

Пространства H_0 и H могут быть получены как замыкание по норме $\| \|$, $\| \|_H$ множества функций, определенных на полуоси $[-\infty, 0]$, непрерывных вместе с первой производной и равных нулю вне некоторого отрезка $[-a, 0]$.

Обоснование проведем на «модельных» задачах.

Рассмотрим уравнение

$$Lx \equiv x'' - b_2^2 x = h \tag{30}$$

с граничными условиями

$$x'(0) + Ax(0) = f(0), \ [x(\zeta_p)] = [x'(\zeta_p)] = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1), \ x(-\infty) = 0 \tag{31}$$

и уравнение

$$L_1 x \equiv k^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{k^2}\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right) - b_2^2 x = h_1 \tag{32}$$

при граничных условиях

$$Ax(0) + Bx'(0) = f_1(0), \ [x(\zeta_p)] = [(1/k^2)x'(\zeta_p)] = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1), \ x(-\infty) = 0. \tag{33}$$

Комплексные функции $b_2^2 = b_2^2(\zeta)$, $k^2 = k^2(\zeta)$ кусочно-непрерывны, $|k^2(\zeta)| > 0$, $\zeta = \zeta_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ — точки их разрывов. Обозначим

$$b_0^2 = \min_{\zeta}\left(\operatorname{Re} b_2^2 + \operatorname{Im} b_2^2\right) > 0. \tag{34}$$

Функции $h = h(\zeta)$, $h_1 = h_1(\zeta)$, $f = f(\zeta)$, $f_1 = f_1(\zeta)$ принадлежат пространству H. A, B, — константы $\operatorname{Re} A$, $\operatorname{Im} A \geqslant 0$,

$$\operatorname{Re}(\bar{B}/A) + \operatorname{Im}(\bar{B}/A) \geqslant 0.$$

Под решением задачи (30), (31), и (32), (33) будем понимать функцию $x = x(\zeta)$, непрерывную на полуоси $[-\infty, 0]$, имеющую первую и вторую непрерывные производные в каждой точке, кроме точек $\zeta = \zeta_p$, а в точках $\zeta = \zeta_p$ имеющую предельные значения первых производных слева и справа. Уравнения (30), (32) выполняются в каждой точке полуоси $(-\infty, 0)$, кроме точек $\zeta = \zeta_p$.

Лемма 1. Если функция $x = x(\zeta) \in H$, то справедлива оценка

$$|x(\zeta_p)| \leqslant \left(e^{\nu\zeta_p/2}/\sqrt{\nu}\right)\|x'\| \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \ \zeta_0 = 0. \tag{35}$$

Доказательство основано на неравенстве Коши—Буняковского

$$|x(\zeta)|^2 - \left|\int_{-\infty}^{\zeta} x'(t)\,dt\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\zeta} e^{\frac{\nu t}{2}} e^{-\frac{\nu t}{2}} x'(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\zeta} e^{\nu t} dt \int\limits_{-\infty}^{\zeta} e^{-\nu t} |x'(t)|^2 dt \leqslant \frac{e^{\nu\zeta}}{\nu} \|x'\|^2,$$

откуда следует (35).

Лемма 2. Пусть функция $x = x(\zeta)$ — решение уравнения (30) при граничных условиях (31). Тогда справедлива оценка

$$\|x\|_H^2 \leqslant C\left(\|f\|_H^2/b_0^2 + \|h\|^2/b_0^4\right). \tag{36}$$

Константа C не зависит от f, h, b_0.

Доказательство. Запишем выражение для вещественной и мнимой частей квадратичной формы оператора $L \equiv (Lx, \bar{x})$

$$\operatorname{Re}(h, x) = \operatorname{Re} f(0)\bar{x}(0) - \operatorname{Re} A|x(0)|^2 + \nu \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} x'\bar{x} d\zeta - \tag{37}$$

$$- \|x'\|^2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}} b_2^2 |x|^2 e^{-\nu\zeta} d\zeta;$$

$$\operatorname{Im}(h, x) = \operatorname{Im} f(0)\bar{x}(0) - \operatorname{Im} A|x(0)|^2 + \nu \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} \times \tag{38}$$

$$\times x'\bar{x} d\zeta - \operatorname{Im} \sum_{p=1}^{m} \int\limits_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}} b_2^2 |x|^2 e^{-\nu\zeta} d\zeta,$$

где $\zeta_0 = 0$, $\zeta_n = -\infty$.

Сложив (37) и (38), получим

$$\|x'\|^2 + \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}} |x|^2 e^{-\nu\zeta} \left(\operatorname{Re} b_2^2 + \operatorname{Im} b_2^2\right) d\zeta + |x(0)|^2 \times$$

$$\times (\operatorname{Re} A + \operatorname{Im} A) = \operatorname{Re} f(0)\bar{x}(0) + \operatorname{Im} f(0)\bar{x}(0) + \nu \left(\operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} \times \right.$$

$$\left. \times x'\bar{x} d\zeta + \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} x'\bar{x} d\zeta \right) - \operatorname{Re}(h, x) - \operatorname{Im}(h, x).$$

Учитывая (34), отбрасывая неотрицательные слагаемые в левой части, имеем

$$\|x'\|^2 + b_0^2 \|x\|^2 \leqslant 2|f(0)| \cdot |x(0)| + 2\nu \left| \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\nu\zeta} x'\bar{x} d\zeta \right| + 2|(h, x)|.$$

Применяя неравенство (35) к первому слагаемому правой части, а затем ко всем слагаемым правой части элементарное неравенство

$$(FG) \leqslant \frac{1}{2}[(1/\delta^2)\|F\|^2 + \delta^2 \|G\|^2], \tag{39}$$

выбрав $\nu = b_0/3$, получим

$$\|x'\|^2 + b_0\|x\|^2 \leqslant C\ \left(|f(0)|^2/b_0^2 + \|h\|^2/b_0^4\right),$$

откуда уже следует (36), если учесть (29), (35) для функции $f(0)$.

Лемма 3. Для решения уравнения (32) при граничных условиях (33) справедлива оценка

$$|x'(\zeta_p)| \leqslant C\left(e^{\nu\zeta_p/2}/\sqrt{\nu}\right)\left(\|h\| + \|x\|\, b_0^2\right) \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{40}$$

Константа C не зависит от h, b_0.

Доказательство. Рассмотрим равенство, вытекающее из (32), (33),

$$x'(\zeta_{p-1}) = k_p^2 \sum_{j=1}^{n} \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j-1}} \frac{1}{k^2}\left(h_1 + b_2^2 x\right) d\zeta,\ \zeta_0 = 0,\ \zeta_n = -\infty.$$

Справедливо неравенство

$$|x'(\zeta_{p-1})| \leqslant |k_p^2| \sum_{j=p}^{n} \left|\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j-1}} \frac{h_1}{k^2} d\zeta\right|^2 + b_0^4 \left|\int_{\zeta_j}^{\zeta_{j-1}} \frac{b_2^2 x}{b_0^2 k^2} d\zeta\right|^2.$$

К каждому слагаемому последнего неравенства применим неравенство (35), учитывая

$$C = |k_p^2| \max\left\{\max_{\zeta}\left|\frac{1}{k^2(\zeta)}\right|^2,\quad \max_{\zeta}\left|\frac{b_2^2(\zeta)}{k^2(\zeta)\, b_0^2}\right|\right\},$$

получим (40).

Лемма 4. Пусть $x = x(\zeta)$ — решение уравнения (32) при граничных условиях (33). Тогда справедлива оценка

$$\|x\|_H^2 \leqslant C\left(\left\|\frac{f_1}{A}\right\|_H^2 + \frac{\|h\|^2}{b_0^4}\right). \tag{41}$$

Константа C не зависит от A, h_1, f_1, b_0. Запишем выражение для вещественной и мнимой частей квадратичной формы оператора $L_1 \equiv (L_1 x, \bar{x})$

$$\mathrm{Re}(h_1, x) = \mathrm{Re}\,\frac{\overline{f(0)}}{A}\, x'(0) - \mathrm{Re}\,\frac{\overline{B}}{A}\,|x'(0)|^2 + \mathrm{Re}\sum_{p=1}^{n-1} e^{-\nu\zeta_p}\, \bar{x}(\zeta_p)\, \times$$

$$\times\, x'(\zeta_p)\left(1 - \frac{k_{p+1}^2}{k_p^2}\right) + \nu\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{n} \int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}} e^{-\nu\zeta}\, \bar{x} x'\, d\zeta\, -$$

$$-\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{n} \int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}} e^{-\nu\zeta}|x'|^2\, d\zeta - \mathrm{Re}\sum_{p=1}^{n} \int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}} e^{-\nu\zeta}|x|^2\, b_2^2\, d\zeta\, +$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}} e^{-\nu t}\bar{x}x'M(\zeta)\,d\zeta,$$

$$M(\zeta)=k^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{k^2}\right);$$

$$\operatorname{Im}(h_1,x)\operatorname{Im}\frac{\overline{f(0)}}{A}x'(0)-\operatorname{Im}\frac{\overline{B}}{A}|x'(0)|+$$

$$+\operatorname{Im}\sum_{p=1}^{n-1}e^{-\nu\zeta_p}\bar{x}(\zeta_p)x'(\zeta_p)\left(1-\frac{k_{p+1}^2}{k_p^2}\right)+\nu\operatorname{Im}\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu\zeta}\bar{x}x'd\zeta-$$

$$-\operatorname{Im}\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu\zeta}|x'|^2d\zeta-\operatorname{Im}\sum_{p-1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu\zeta}|x|^2b_2^2\,d\zeta+$$

$$+\operatorname{Im}\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu t}\bar{x}x'M(\zeta)\,d\zeta.$$

Сложив полученные выражения, получим

$$\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu\zeta}|x'|^2d\zeta+\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu\zeta}|x|^2\left(\operatorname{Re}b_2^2+\operatorname{Im}b_2^2\right)d\zeta+$$

$$+|x'(0)|^2\left(\operatorname{Re}\frac{\overline{B}}{A}+\operatorname{Im}\frac{\overline{B}}{A}\right)=\operatorname{Re}\frac{\overline{f_1(0)}}{A}x'(0)+\operatorname{Im}\frac{\overline{f_1(0)}}{A}x'(0)+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}e^{-\nu\zeta_p}\left[\operatorname{Re}\bar{x}(\zeta_p)x'(\zeta_p)\left(1-\frac{k_{p+1}^2}{k_p^2}\right)+\operatorname{Im}\bar{x}(\zeta_p)x'(\zeta_p)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{k_{p+1}^2}{k_p^2}\right)\right]+\nu\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu\zeta}\left(\operatorname{Re}\bar{x}x'+\operatorname{Im}\bar{x}x'\right)d\zeta+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}\left[\operatorname{Re}\bar{x}x'M(\zeta)+\operatorname{Im}\bar{x}x'M(\zeta)\right]d\zeta-\operatorname{Re}(h_1,x)-\operatorname{Im}(h_1,x).$$

Предполагая, что $\max\limits_{\zeta}|M(\zeta)|<C$, учитывая (34) и отбрасывая неотрицательные слагаемые в левой части, имеем

$$\|x'\|^2+b_0^2\|x\|^2\leqslant 2\left|\frac{f_1(0)}{A}\right||x'(0)|+2C_1\sum_{p=1}^{n-1}e^{-\nu\zeta_p}|x(\zeta_p)|\times$$

$$\times|x'(\zeta_p)|+2(\nu+C)\sum_{p-1}^{n}\int_{\zeta_p}^{\zeta_{p-1}}e^{-\nu\zeta}|x||x'|d\zeta+2|(h_1,x)|.$$

Применяя к первому и второму слагаемым справа неравенство (40), а затем ко всем слагаемым справа неравенство (39), выбрав $\nu = b_0/3$, имеем

$$\|x'\|^2 + b_0^2\|x\|^2 \leqslant C\left(\left|\frac{f_1(0)}{A}\right|^2 b_0 + \frac{\|h_1\|^2}{b_0^2}\right),$$

откуда следует (41), если учесть (29) и оценку (35) для функции $f_1(0)$.

Перейдем к оценке построенных приближений v_{mj} и z_j из (18), (19). Далее считаем, что константы C могут зависеть лишь от параметров $|k_0^2|$, $\max\limits_{\zeta}|\lambda^2(\zeta)|$, $\max\limits_{\zeta}\left|\frac{M^2(\zeta)}{b^2}\right|$.

Теорема 1. Для решения уравнения (18) ($m = 1, 2$) при граничных условиях (20) и уравнения (19) при граничных условиях (21) справедливы оценки

$$\|v_{mj}\|_H \leqslant \frac{C_{mj}}{b^{j-1/2}}\left|\frac{\partial w_m}{\partial\zeta}(0)\right| |q_0'|^{j-1} (m = 1, 2), \tag{42}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, s), \ |q_0'| = \sqrt[4]{(\alpha^2 + \beta^2 + a_0^2)^2 + b_0^4};$$

$$\|z_j\|_H \leqslant \frac{C_{32j}}{b^{2j-1/2}}(\alpha^2 + \beta^2)^j \left\{|w_3(0)| + \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\left(\left|\alpha\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}(0)\right| + \right.\right. \tag{43}$$
$$\left.\left. + \left|\beta\frac{\partial w_2}{\partial\zeta}(0)\right|\right)\right\}, \ j = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

Доказательство. Применяя лемму 2 к уравнению (18) ($m = 1, 2$) при граничных условиях (20), где

$$x(\zeta) = v_{mj}(t), b_2^2(\zeta) = -d^2(t), h(\zeta) = (\alpha^2 + \beta^2)v_{mj-2}(t), A = 0,$$
$$f(0) = -q_0 v_{mj-1} + \frac{\partial w_m}{\partial\zeta}(0), \frac{\partial w_m}{\partial\zeta}(0) = 0 \text{ при } j > 1, v_{mj} = 0, \ j \leqslant 0$$

последовательно для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$, и используя математическую индукцию по j, получим (42). Применяя лемму 4 к уравнению (19) при граничном условии (21), где $x(\zeta) = z_j(t)$,

$$b_2^2(\zeta) = -d^2(t), k^2(\zeta) = d^2(t); \ h(\zeta) = (\alpha^2 + \beta^2) z_{j-2}\lambda^2(t),$$
$$A = q_0,$$
$$B = k_0^2/bd_1^2, f_1(0) = q_0 w_3(0) - \frac{l_0 i}{\alpha^2 + \beta^2}\left(\alpha\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}(0) + \beta\frac{\partial w_2}{\partial\zeta}(0)\right),$$
$$w_3(0) = \frac{\partial w_1}{\partial\zeta}(0) = \frac{\partial w_2}{\partial\zeta}(0) \text{ при } j > 0,$$

и поступая аналогично предыдущему, получим (43).

Теорема 2. Для решения уравнения (25) ($m = 1, 2$) при граничных условиях (27) и уравнения (26) при граничных условиях (28) справедливы оценки

$$\|R_{ms}\|_H \leqslant C_{ms}\frac{|q_0|^3}{b^{s+1/2}}\left|\frac{\partial w_m}{\partial\zeta}(0)\right| (m = 1, 2); \tag{44}$$

$$\|R_s\|_H \leqslant C_{32s}\frac{(\alpha^2+\beta^2)^{s+1}}{b^{3/2+2s}}\left(|w_3(0)|+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\left|\alpha\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}(0)\right|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left|\beta\frac{\partial w_2}{\partial\zeta}(0)\right|\right)\right)\ (s=0,1,2,\ldots). \qquad (45)$$

Доказательство. Применяя лемму 2 к уравнению (25) ($m=1, 2$) при граничном условии (27), где

$$x(\zeta)=R_{ms}(\zeta);\ b_2^2(\zeta)=q_m^2(\zeta);\ h(\zeta)=(\alpha^2+\beta^2)(v_{ms-1}+v_{ms});\ A=q_0;$$
$$f(0)=-q_0v_{ms}(0);\ v_{ms}=0$$

при $s\leqslant 0$; $R_{mo}=v_m$ — точное решение, и учитывая (42), получим (44). Применяя лемму 4 к уравнению (26) при граничном условии (28), где

$$x(\zeta)=R_s(\zeta);\ b_2^2(\zeta)=q_3^2(\zeta)\lambda^2;\ h_1(\zeta)=(\alpha^2+b^2)\lambda^2(\zeta)(z_{s-1}+z_s);$$
$$A=q_0;\ B=k_0^2/k_{t_1}^2;\ k^2(\zeta)=k_t^2(\zeta);\ z_s=0 \text{ при } s<0,\ f_1(0)=0,$$

учитывая оценку (43), получим (45).

Теорема 3. (Доказывается на основе полученных теорем.) Для остаточного члена

$$\widetilde{R}_{ms}=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_{ms}(0)\,e^{-q_0\zeta}e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\,d\alpha d\beta \qquad (46)$$
$$(m=1,2,3),\ (s=0,1,2\ldots)$$

решения (1) — (4) для $\zeta\geqslant 0$ справедлива оценка

$$|R_{ms}|\leqslant C_{ms}/b^{s+1}\ (m=1,2,3),\ (s=0,1,\ldots). \qquad (47)$$

Доказательство. Справедливость оценки (47) следует из оценок (35), (44), (45) и ограниченности интегралов

$$\int\limits_0^\infty |q_0'|^s e^{-q_0}|\gamma d\gamma<C,\ \int\limits_0^\infty |q_0'|^s|e^{-q_0}|d\gamma<C,\ \int\limits_0^\infty\frac{\gamma^{s+2}}{|q_0|}|e^{-q_0}|d\gamma<C,$$
$$|q_0'|=\sqrt[4]{(\gamma^2+a_0^2)^2+b_0^4},\quad |q_0|=\sqrt[4]{(\gamma^2-a_0^2)^2+b_0^4}.$$

Последние интегралы получаются, если в (46) сделать замену

$$\alpha=\gamma\cos\varphi,\ \beta=\gamma\sin\varphi,\ \xi=\rho\cos\psi,\ \eta=\rho\sin\psi.$$

Прежде чем доказывать разрешимость задач (18) — (21), (25)—(28), решение которых используется при построении асимптотики, рассмотрим аналогичную задачу для случая, когда нижняя среда есть идеальный проводник, т. е. при $\zeta=\zeta_n$, $1/k^2(\zeta_n)=0$ ($\zeta_n<\zeta_{n-1}$).

Рассматривается следующая задача А. Найти решение уравнений (1)—(3) при $\zeta>\zeta_n$, удовлетворяющее граничным условиям (4) и при $\zeta=\zeta_n$ условиям

$$u_1=u_2=0,\ du_3/d\zeta=0.$$

Построение асимптотики для решения задачи А может быть проведено так же, как и для задачи (1)—(4). При этом для оценки приближений и остатков могут быть использованы леммы 1—4, если доопределить функции $v_{mj}=R_{mj}=0$ ($m=1, 2$) при $\zeta<\zeta_n$, а функции z_jR_s доопределить при $\zeta < \zeta_n$ так, чтобы они принадлежали пространству H. Поэтому теоремы 1, 2 можно считать доказанными и для задачи А, причем константы C_{mj} не зависят от ζ_n.

Разрешимость соответствующих уравнений (18)—(21) и (25)—(28) для v_{mj}, z_j, R_{m_s}, R_s в случае задачи А следует из оценок (42)—(45), так как v_{mj}, z_j, R_{m_s}, R_s являются решениями обыкновенных линейных дифференциальных уравнений на каждом из отрезков (ζ_j, ζ_{j+1}) с непрерывными коэффициентами. Устремляя ζ_n к $-\infty$, получаем разрешимость соответствующих уравнений для v_{mj} —R_s исходной задачи.

В качестве примера применения построенной асимптотики приведем решение задачи (1)—(4) для верхнего полупространства, когда функция $k_t^2(\zeta)$ кусочно-постоянная. (Каждый слой имеет постоянную проводимость.) В соответствии с (23), (24) имеем

$$(48)\qquad u_m = w_m + \frac{1}{b} u_{1m} + \frac{1}{b^2} u_{2m} + \widetilde{R}_{m2} = \frac{\mu_0 I_m}{8\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q_0} \times$$

$$\times \left(e^{-q_0|1+\zeta|} - e^{-q_0(\zeta+1)}\right) e^{-i[\alpha(\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1)}d\alpha d\beta +$$

$$+ \frac{\mu_0 I_m}{4\pi^2} \frac{iR^*}{k_{t_1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-q_0(1+\zeta)} e^{-i[\alpha(\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1)]}d\alpha d\beta -$$

$$- \frac{\mu_0 I_m}{4\pi^2} \frac{R^{*2}}{k_{t_1}^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-q_0(1+\zeta)} q_0 e^{-i[\alpha(\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1]}d\alpha d\beta + \widetilde{R}_{m_2};$$

$$(49)\qquad u_3 = w_3 + u_{30} + \frac{1}{b} u_{31} + \widetilde{R}_{31} = \frac{\mu_0 I_3}{8\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q_0} \left(e^{-q_0|\zeta-1|} -\right.$$

$$\left. - e^{-q_0(\zeta+1)}\right) e^{-i[\alpha(\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1)]}d\alpha d\beta + \frac{\mu_0 I_3}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-q_0(1+\zeta)} e^{-i[\alpha(\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1)]}}{q_0 - \dfrac{ik_0^2}{k_{t_1}R_*}} \times$$

$$\times d\alpha d\beta + \frac{\mu_0}{4\pi^2} \frac{k_0^2}{k_{t1}R_*} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha I_1 + \beta I_2)\, e^{-q_0(1+\zeta)} e^{-i[\alpha(\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1)]}}{(\alpha^2+\beta^2)\left(q_0 - \dfrac{ik_0^2}{k_{t_1}R_*}\right)} \times$$

$$\times d\alpha d\beta + \frac{\mu_0}{4\pi^2} \frac{R^*}{k_{t_1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha I_1 + \beta I_2)}{\alpha^2+\beta^2} q_0 e^{-q_0(1+\zeta)} e^{-i[\alpha(\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1)}d\alpha d\beta + \widetilde{R}_{31},$$

где, следуя [7],

$$R^* = \mathrm{cth}\left[ik_{t1}h_1 + \mathrm{arcth}\frac{k_{t1}}{k_{t2}}\mathrm{cth}\left(ik_{t_2}h_2 + \ldots + \mathrm{arcth}\left(-\frac{k_{tn-1}}{k_{tn}}\right)\right)\right];$$

$$R_* = \mathrm{cth}\left[ik_{t1}h_1 + \mathrm{arcth}\frac{k_{t2}}{k_{t1}}\,\mathrm{cth}\left(ik_{t_2}h_2 + \ldots + \mathrm{arcth}\left(-\frac{k_{tn}}{k_{tn-1}}\right)\right)\right],$$

$$h_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i.$$

Из формул (48), (49) видно, что при больших b зависимость поля в верхней среде от параметров нижних сред одинакова для любого направления излучателя. Полученная асимптотика может быть использована при решении задач геофизики [7].

Поступила 21 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н.** О становлении электрического тока в однородном проводящем полупространстве. М., Изд-во АН СССР. Сер. геофиз., 1946, № 3.
2. **Тихонов А. Н.** О распределении переменного электромагнитного поля в слоистой среде.—«Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 5.
3. **Тихонов А. Н.** Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции.—«Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 5.
4. **Тихонов А. П., Скугаревская О. А.** О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. М., Изд-во АН СССР. Сер. геофиз., 1950, № 4.
5. **Дмитриев В. И.** Расчет электромагнитного поля в методе частотного зондирования.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Изд. Моск. ун-та, 1965, вып.III.
6. **Дмитриев В. И.** Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Изд. Моск. ун-та, 1968, вып. X.
7. **Ваньян Л. Л.** Основы электромагнитных зондирований. М., «Недра», 1965.
8. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.

УДК 539.374

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Я. А. Каменярж

(*Москва*)

В работе [1] делается попытка построения феноменологической модели упрочняющегося упругопластического тела. Введены обозначения: Σ, Σ_Δ, $\Omega_{p\Delta}$ — тензоры напряжений, приращения напряжений, приращения пластических деформаций, σ_1, σ_2, $\sigma_3(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3)$ и Δe_1, Δe_2, Δe_3 — главные значения тензоров Σ и $\Omega_{p\Delta}$. В числе одиннадцати явно сформулированных гипотез принимается следующее основное допущение II: если направление главных осей Σ_Δ совпадает с направлением главных осей Σ, то направление главных осей $\Omega_{p\Delta}$ также совпадает с направлением главных осей Σ. Если догружение Σ_Δ не изменяет главных осей Σ, то пластические деформации находятся при помощи условия пластической несжимаемости и дифференциальных соотношений (допущение IV):

$$\Delta\gamma_{13} = \frac{\Delta T_{13}}{g_{13}} + \frac{\Delta T_{12}}{2g_{12}}(1+\lambda_{12}) + \frac{\Delta T_{23}}{2g_{23}}(1+\lambda_{23}),$$

$$\Delta\gamma_{12} = \frac{\Delta T_{13}}{2g_{13}}(1+\lambda_{13}) + \frac{\Delta T_{12}}{g_{12}} - \frac{\Delta T_{23}}{2g_{23}}(1-\lambda_{23}),$$

$$\Delta\gamma_{23} = \frac{\Delta T_{13}}{2g_{13}}(1-\lambda_{13}) - \frac{\Delta T_{12}}{2g_{12}}(1-\lambda_{12}) + \frac{\Delta T_{23}}{g_{23}},$$

$$2T_{13} = \sigma_1 - \sigma_3,\ 2T_{12} = \sigma_1 - \sigma_2,\ 2T_{23} = \sigma_2 - \sigma_3;\ \Delta\gamma_{ij} = \Delta e_i - \Delta e_j.$$

Свойства материала задаются здесь модулями g_{ij}, а величины параметров λ_{ij} находятся с учетом граничных условий при помощи допущения VII — принципа максимальности приращения пластической работы (максимум находится по λ_{ij} при дополнительных условиях $|\lambda_{ij}| \leqslant 1$). Величины модулей g_{ij} должны определяться из опытов, они различны в состоянии полной ($T \geqslant \tau_s$, $T_1 \geqslant \tau_{s1}$) и неполной ($T \geqslant \tau_s$, $T_1 < \tau_{s1}$) пластичности (через T, T_1, T_2 обозначены величины T_{ij} в порядке их убывания, τ_s и τ_{s1} — характеристики материала, которые находятся экспериментально). Величины модулей g_{ij} зависят также от характера