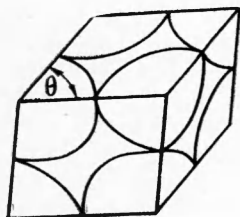


ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОГО ГРУНТА. (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ И КОЭФФИЦИЕНТ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТА.)

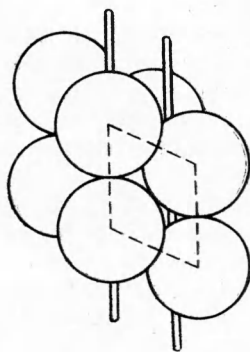
С. В. Кузнецов

(Новосибирск)

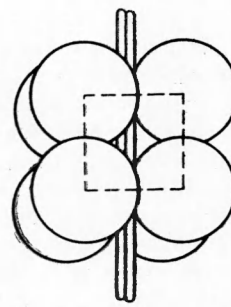
1. Модель грунта. 1°. Естественные грунты весьма разнообразны по своему строению, физико-механическим характеристикам и химическому составу зерен, образующих грунт. Для изучения физико-механических свойств грунта, в частности его фильтрационных способностей и прочности, необходимо изучить его геометрические параметры и их влияние на физико-механические свойства грунта. Изучение геометрических параметров грунта естественно начать с идеализированной модели, представляющей собой грунт, составленный из шарообразных частиц одинакового диаметра. Такой грунт называется фиктивным. Впервые



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

такая модель грунта была построена и изучена Сликхтером. Так как все шары, образующие фиктивный грунт, одинакового диаметра, то расстояние между центрами двух соприкасающихся шаров будет равно сумме их радиусов. Центры каждых восьми соприкасающихся шаров будут расположены в вершинах ромбоэдра, каждая грань которого есть ромб (фиг. 1). Таким образом, ромбоэдр является основной моделью элементарного объема для фиктивного грунта. Расположения шаров фиктивного грунта колеблются между двумя крайними конфигурациями, из которых первая (фиг. 2) соответствует теснейшему расположению шаров, а другая (фиг. 3) их наиболее свободному расположению (при условии взаимного прикосновения шаров).

Очевидно, угол θ ромба (фиг. 1), из которого образованы грани ромбоэдра, будет изменяться в пределах от 90° до 60° . Эти два крайних случая (слабая и плотная упаковка) и изучим подробно. Так как в ромбоэдре для каждого угла грани имеется дополнительный угол 180° , то, очевидно, восемь кусков шаров, вырезаемых гранями ромбоэдра, если их сложить надлежащим образом, образуют один целый шар. При слабой упа-

ковке ($\theta = 90^\circ$) ромбоэдр содержит восемь равных шаровых элементов (фиг. 1) с углами граней в вершинах по 90° . При плотной упаковке ($\theta = 60^\circ$) ромбоэдр содержит два шаровых элемента с углами граней в вершинах по 60° и шесть шаровых элементов, у которых одна грань в вершине имеет угол 60° , а остальные две грани в той же вершине имеют углы по 120° . Очевидно, объем основного ромбоэдра зависит только от угла упаковки θ и радиуса r шаров, образующих грунт, и равен

$$V = 8r^3(1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \quad (1.1)$$

При этом шаровые куски, образующие основной элементарный ромбоэдр, составляют шар радиусом r и их суммарный объем равен $v = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Используя (1.1) и исходя из определения пористости m , будем иметь

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta}} \quad (1.2)$$

Так как крайние значения θ суть 90 и 60° , то крайние значения пористости будут 0.476 и 0.259 соответственно. Формула (1.2) впервые была выведена Слехтером.

2°. В действительности пористость m естественных грунтов изменяется в более широких пределах. Это естественно, так как зерна действительных грунтов в значительной мере отличаются от формы шара и имеют площадки контакта между зернами, отличные от точечных контактов шаров фиктивного грунта. Однако любое зерно естественного грунта можно рассматривать как деформированный по форме шар, объем которого при деформации остается постоянным и равным объему зерна. Поэтому, чтобы приблизить фиктивный грунт к естественному, будем деформировать шары фиктивного грунта, сохраняя объем массы зерна-шара, т. е. будем считать, что изменение объема грунта при объемной деформации происходит только за счет изменения объема пустот (пористости) грунта. Деформацию элементов зерен-шаров, образующих ромбоэдр до деформации, будем осуществлять с сохранением геометрического подобия ромбоэдра. При этом точки контакта перейдут в площадки контакта. Очевидно, при слабой упаковке каждое зерно-шар будет иметь шесть площадок контакта и с увеличением деформации сжатия форма зерна будет приближаться к кубу. При плотной упаковке каждое зерно-шар имеет двенадцать площадок контакта, которые с увеличением деформации сжатия возрастают, а шар переходит в додекаэдр.

Кроме того, будем считать, что при деформации фиктивного грунта¹ неконтактирующая поверхность зерна имеет сферическую форму некоторого радиуса R .

2. Пористость деформированного фиктивного грунта. При сделанных выше допущениях легко найти пористость фиктивного деформированного грунта. Действительно, если до деформации зерен длина ребра ромбоэдра равнялась $2r$, а после деформации с сохранением подобия ромбоэдра его длина ребра равна $2(r - h)$, то объем вновь полученного основного элементарного ромбоэдра равен

$$v_1 = 8(r - h)^3(1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \quad (2.1)$$

При этом объем массы шаровых кусков, образующих ромбоэдр, остается без изменения и в сумме равен объему исходного шара радиуса $v = \frac{4}{3} \pi r^3$.

¹ Автор приносит благодарность А. Г. Хромову, любезно сообщившему результаты своей работы.

Используя (2.1) найдем пористость m деформированного фиктивного грунта

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta}} \frac{1}{1 + \Delta V/V} \quad (2.2)$$

где

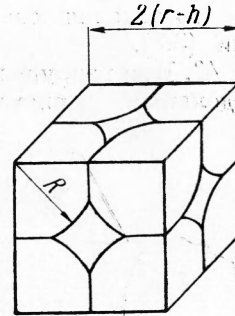
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{v_1 - V}{V} = \left(\frac{r-h}{r}\right)^3 - 1 \quad (2.3)$$

Таким образом, пористость m зависит от относительной деформации $\Delta V/V$ фиктивного грунта и от плотности упаковки θ и не зависит от размеров зерен, образующих грунт.

3. Слабая упаковка $\theta = 90^\circ$. 1°. При слабой упаковке ромбоэдр принимает форму куба (фиг. 4). Подставляя $\theta = 90^\circ$ в (2.2), получим формулу для пористости при слабой упаковке

$$m = 1 - \frac{\pi}{6} \frac{1}{1 + \Delta V/V} \quad (3.1)$$

2°. Рассматривая элементарный куб (фиг. 4), мы видим, что часть поверхности сечения куба занимают поверхности сечений зерен. Очевидно, наименьший проход между зернами образуется в плоскости, содержащей центры четырех соприкасающихся зерен. Если s_1 — площадь квадрата со стороной $2(r-h)$, а s_2 — площадь, занятая сечением зерен (фиг. 4), то $s_1 - s_2$ есть наименьшая площадь прохода между зернами в элементарном кубе. Отношение



Фиг. 4

$$n = \frac{s_1 - s_2}{s_1} \quad (3.2)$$

принято называть просветом [1]. Физическое значение просвета n очевидно, ибо оно определяет живое сечение пласта, через которое происходит фильтрация. Из фиг. 4 находим

$$s_1 = 4(r-h)^2 \quad (3.3)$$

$$s_2 = 4 \left[(r-h)a + \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{a}{r-h} \right) R^2 \right] \quad (3.4)$$

Здесь

$$a^2 = R^2 - (r-h)^2 \quad (3.5)$$

Подставляя выражение для s_1 и s_2 в (3.2), получим выражение для просвета

$$n = 1 - \left[\sqrt{\xi^2 - 1} + \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \xi^2 \right] \quad (3.6)$$

Здесь

$$\xi = \frac{R}{r-h} \quad (3.7)$$

Так как при отсутствии деформации фиктивного грунта $h = 0$, $R = r$, то $\xi = 1$ и просвет $n = 0.2146$. Из фиг. 4 легко видеть, что просвет исчезает, когда $R^2 = 2(r-h)^2$, т. е. при $\xi^2 = 2$. Следовательно, в формуле (3.6) ξ изменяется в пределах

$$1 \leq \xi^2 \leq 2 \quad (3.8)$$

3°. Из допущения сохранения объема массы зерен при деформации грунта выведем основное соотношение, связывающее параметр ξ с относительным объемным изменением фиктивного грунта при деформации.

При слабой упаковке элементарный куб содержит в себе восемь равных между собой деформированных шаровых элементов. Их суммарный объем массы равен

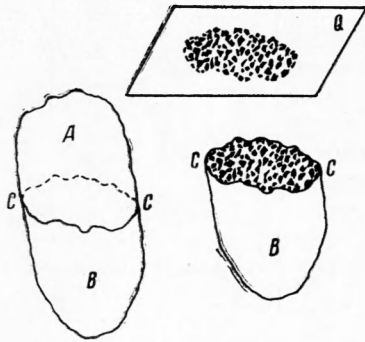
$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi [R - (r - h)] [3a^2 + \{R - (r - h)\}^2]$$

Приравнявая его объему исходного шара радиуса r и используя (3.7) и (2.3), будем иметь

$$\left(\frac{9}{2} - 2\xi\right)\xi^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{1 + \Delta V/V} \quad (3.9)$$

Это основное соотношение, связывающее параметр ξ с $\Delta V/V$ при условии (3.8).

4°. При разрушении грунта, как известно [2], разрушается связь между отдельными зернами, а не зерна грунта. Поэтому важно знать усилия,



Фиг. 5

передающиеся по грунтовому скелету через поверхности контакта зерен, т. е. усилия, прижимающие зерна одно к другому. Но, чтобы знать усилия, передающиеся по грунтовому скелету через поверхности контакта зерен, необходимо знать соотношение между площадью проекции на одну и ту же плоскость площадок контакта, по которым произошел разрыв между зернами, и площадью проекции поверхности всех зерен, по площадкам которых произошел разрыв. Рассмотрим некоторый зернистый кусок грунта (фиг. 5) и пусть по поверхности CC произошел разрыв куска на части A и B . Выберем на поверхности разрыва части B (А) любые три

точки, расстояние между которыми во много раз превосходит размеры зерен. Параллельно плоскости, проходящей через эти точки, проведем плоскость Q вне части B (А). Пусть площадь проекции на плоскость Q площадок контакта части B (А), по которым произошел разрыв, будет s_K , а площадь проекции поверхности зерен части B (А), содержащих те же площадки контакта, по которым произошел разрыв, будет s_3 . Отношение

$$\delta = \frac{s_K}{s_3} \quad (3.10)$$

будет характеризовать долю, занятую проекцией площадок контакта по отношению к проекции поверхности зерна.

5°. Так как основным элементом деформированного фиктивного грунта при слабой упаковке является куб, то, очевидно, за плоскость, на которую будем проектировать площадки контакта и поверхности зерен, можно взять плоскость основания куба. Из фиг. 4 легко находим

$$s_K = \pi [R^2 - (r - h)^2] \quad (3.11)$$

и очевидно, что в данном случае площадь проекции поверхности зерен совпадает с площадью s_2 сечения зерен гранью куба, т. е. согласно (3.4) имеем

$$s_3 = 4 \left[(r - h) a + \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{a}{r - h} \right) R^2 \right] \quad (3.12)$$

Подставляя выражение для s_K и s_3 в (3.10) и используя, согласно (3.7), параметр ξ при условии (3.8), будем иметь

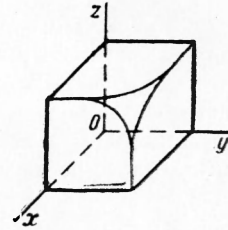
$$\delta = \frac{\pi}{4} \frac{\xi^2 - 1}{\sqrt{\xi^2 - 1} + (1/4\pi - \arctg \sqrt{\xi^2 - 1}) \xi^2} \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что площадки контакта зависят только от ξ , а следовательно, только от $\Delta V/V$ и не зависят от размеров частиц, составляющих грунт.

6°. Как было показано выше, при $\xi^2 = 2$ просвет n обращается в нуль. При дальнейшем сжатии фиктивного грунта элементы зерен, из которых составлен основной элементарный куб, принимают форму, показанную на фиг. 6. Отсюда замечаем, что в данном случае ξ изменяется в пределах

$$2 \leq \xi^2 \leq 3 \tag{3.14}$$

причем, при $\xi^2 = 3$ пористость обращается в нуль и элемент зерна, а следовательно, и само зерно принимает форму куба. Так как формула (2.2), выражающая пористость m в функции θ и $\Delta V/V$, не зависит от ξ , то она сохраняет силу и при условии (3.14).



Фиг. 6

7°. Выведем основное соотношение, связывающее параметр ξ с $\Delta V/V$ при условии (3.14). Объем элемента зерна (фиг. 6) равен

$$(r-h)^2 \sqrt{R^2 - 2(r-h)^2} + [R^2 - (r-h)^2] [r-h] \left(\frac{\pi}{4} - \varphi_1 \right) + 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \tag{3.15}$$

где

$$\varphi_1 = \arctg \sqrt{\frac{R^2}{(r-h)^2} - 2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \varphi_1, \quad \rho_1 = \sqrt{R^2 - (r-h)^2} \\ \rho_2 = \frac{r-h}{\cos \varphi} \tag{3.16}$$

Приравнявая (3.15) восьмой части объема шара исходного радиуса r и интегрируя, получим, используя (2.3) и (3.7), основное соотношение, связывающее параметр ξ с $\Delta V/V$ и выражающее сохранение объема деформируемого зерна при условии (3.14)

$$\sqrt{\xi^2 - 2} + \left(\xi^2 - \frac{1}{3} \right) \left[\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt{\xi^2 - 2} + \arcsin \frac{3 - \xi^2}{\xi^2 - 1} \right] - \\ - \frac{2}{3} \xi^3 \arctg \frac{(3 - \xi^2) \xi}{(1 + \xi^2) \sqrt{\xi^2 - 2}} = \frac{\pi}{6} \frac{1}{1 + \Delta V/V} \tag{3.17}$$

8°. Запишем уравнение площадок контакта δ при условии (3.14). Из фиг. 6 видно, что площадь проекции площадок контакта на грань основного элементарного куба равна

$$s_{\kappa} = 4 \left[(r-h) \sqrt{R^2 - 2(r-h)^2} + \{ R^2 - (r-h)^2 \} \left\{ \frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt{\frac{R^2}{(r-h)^2} - 2} \right\} \right] \tag{3.18}$$

а проекция поверхности зерен покрывает всю грань элементарного куба и, следовательно,

$$s_3 = 4(r-h)^2 \tag{3.19}$$

Тогда по формуле (3.10), используя (3.7), будем иметь

$$\delta = \sqrt{\xi^2 - 2} + (\xi^2 - 1) \left[\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt{\xi^2 - 2} \right] \tag{3.20}$$

4°. Плотная упаковка. 1°. При плотной упаковке имеем ромбоэдр (фиг. 7), угол грани которого равен 60° . Подставляя $\theta = 60^\circ$ в (2.2), получим формулу для выражения пористости при плотной упаковке

$$m = 1 - \frac{\pi \sqrt{2}}{6} \frac{1}{1 + \Delta V/V} \quad (4.1)$$

2°. Рассматривая ромбоэдр, замечаем, что наименьший проход между зернами, как и при слабой упаковке, образуется в плоскости, содержащей центры четырех соприкасающихся зерен. Если длина ребра деформированного исходного ромбоэдра при плотной упаковке равна $2(r-h)$, то площадь s_1 ромба, образующего грань основного деформированного ромбоэдра с ребром, равным $2(r-h)$, будет

$$s_1 = 2\sqrt{3}(r-h)^2 \quad (4.2)$$

а площадь s_2 сечения деформированных зерен гранью ромбоэдра равна

$$s_2 = 6(r-h)\sqrt{R^2 - (r-h)^2} + 6\left(\frac{\pi}{6} - \arctg \sqrt{\frac{R^2}{(r-h)^2} - 1}\right)R^2 \quad (4.3)$$

Подставляя (4.2) и (4.3) в выражение для просвета (3.2), находим для случая плотной упаковки

$$n = 1 - \sqrt{3} \left[\sqrt{\xi^2 - 1} + \left(\frac{\pi}{6} - \arctg \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \xi^2 \right] \quad (4.4)$$

где ξ — параметр, определенный соотношением (3.7). Так как при отсутствии деформации $R = r$, $h = 0$, то $\xi = 1$ и просвет $n = 0.0931$. Очевидно, что просвет исчезает, когда $R \sin 30^\circ = \sqrt{R^2 - (r-h)^2}$, т. е. при $\xi^2 = 4/3$.

Следовательно, ξ изменяется в пределах

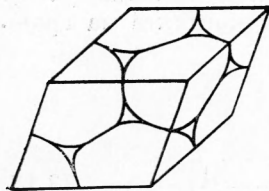
$$1 \leq \xi^2 \leq \frac{4}{3} \quad (4.5)$$

3°. Из допущения сохранения объема массы зерен при деформации грунта в случае плотной упаковки основное соотношение, связывающее относительное объемное изменение $\Delta V/V$ фиктивного грунта с параметром ξ , изменяющимся в пределах, ограниченных неравенством (4.5), примет вид

$$(9 - 5\xi)\xi^2 - 3 = \frac{1}{1 + \Delta V/V} \quad (4.6)$$

4°. При плотной упаковке выражение параметра δ , характеризующего долю, занятую проекцией на некоторую плоскость площадок контакта по отношению к проекции на ту же плоскость поверхности зерен, имеет вид

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - 1 + (1/6\pi - \arctg \sqrt{\xi^2 - 1})\xi^2} \quad (4.7)$$



Фиг. 7

При этом параметр ξ изменяется в пределах, ограниченных неравенством (4.5). Таким образом, формулы (4.1), (4.4), (4.6) и (4.7) в области изменения параметра ξ , определенной неравенством (4.5), позволяют определить все основные геометрические параметры грунта m , n , δ в функции от $\Delta V/V$ при плотной упаковке. Эти параметры, как и при слабой упаковке грунта, не зависят от размеров зерен, образующих грунт.

5°. В случае плотной упаковки просвет n равен нулю, когда ξ принимает значение, равное $2/\sqrt{3}$. При этом значении ξ параметр δ равен 0.745, отношение $\Delta V/V$ равно 0.235, а пористость m равна 0.0327. При

Таблица 1

α	$\theta = 90^\circ$			
	m	n	δ	$K \cdot 10^2$
0.0	0.0000	0.0000	1.0000	0.000
0.0449	0.0345	0.0000	0.7854	0.000
0.1	0.0841	0.0077	0.604	0.008
0.2	0.1540	0.0289	0.448	0.080
0.3	0.2126	0.0535	0.342	0.420
0.4	0.2675	0.0753	0.263	1.010
0.5	0.3128	0.1025	0.202	1.690
0.6	0.3520	0.1255	0.153	2.610
0.7	0.3887	0.1475	0.108	3.780
0.8	0.4211	0.1740	0.068	5.150
0.9	0.4489	0.1984	0.033	6.810
1.0	0.4764	0.2216	0.000	8.794

Таблица 2

α	$\theta = 60^\circ$			
	m	n	δ	$K \cdot 10^2$
0.0	0.0000	0.0000	1.000	0.000
0.0927	0.0327	0.0000	0.745	0.000
0.1	0.0350	0.0001	0.730	0.002
0.2	0.0662	0.0031	0.552	0.004
0.3	0.0958	0.0113	0.427	0.024
0.4	0.1240	0.0210	0.336	0.060
0.5	0.1493	0.0316	0.264	0.123
0.6	0.1732	0.0426	0.201	0.226
0.7	0.1962	0.0544	0.145	0.378
0.8	0.2188	0.0668	0.092	0.579
0.9	0.2398	0.0796	0.044	0.841
1.0	0.2590	0.0921	0.000	1.170

дальнейшем сжатии фиктивного грунта просвет n остается равным нулю, пористость уменьшается, а параметр δ возрастает. По формуле (4.1) легко находим предельное значение $\Delta V/V = (\Delta V/V)_*$, при котором пористость равна нулю, т. е. $(\Delta V/V)_* = 0.259$. При этом, очевидно, что параметр δ принимает значение, равное единице. При относительном объемном изменении $\Delta V/V$ в пределах от 0.235 до 0.259 параметр δ целесообразнее определять непосредственно в виде функции от $\Delta V/V$ интерполяцией кривой $\delta = \delta(\Delta V/V)$, построенной по формулам (4.6) и (4.7) в соответствии с (4.5), учитывая, что в крайней точке, когда $\Delta V/V$ равно 0.259 параметр δ равен 1.

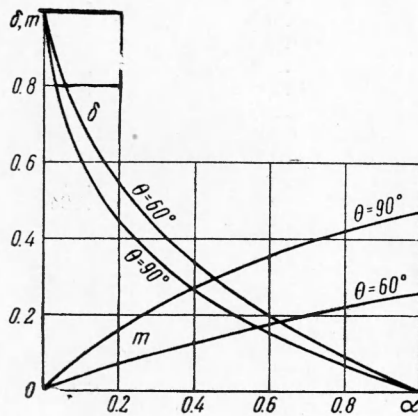
6°. Значения параметров m , n , δ , вычисленные по соответствующим формулам слабой и плотной упаковок как функции от параметра

$$\alpha = 1 - \frac{\Delta V}{V} / \left(\frac{\Delta V}{V} \right)_*$$

даны в табл. 1 и 2. Соответствующие им графики приведены на фиг. 8—10. Легко видеть, что каждому значению $\theta = \text{const}$, характеризующему плотность упаковки грунта в пределах от 90° до 60° , можно построить соответствующие кривые $m = m(\alpha)$, $n = n(\alpha)$ и $\delta = \delta(\alpha)$. Они будут расположены в областях, ограниченных соответствующими парами кривых при крайних значениях θ , равных 90° и 60° (фиг. 8—10).

5. Коэффициент фильтрации грунта. 1°. При решении многих задач теории фильтрации возникает необходимость знать зависимость коэффициента фильтрации K_ϕ от геометрических параметров и относительной объемной деформации грунтов. Пользуясь принципом подобия и размерностей в фильтрации [1], можно показать, что скорость фильтрации w в фиктивном деформируемом грунте может быть записана в виде

$$w = f\left(\frac{l}{d}, m, n\right) \frac{d^2}{\mu} \frac{\Delta p}{l} \quad (5.1)$$



Фиг. 8

где d — диаметр частиц, образующих грунт, l — длина пути, по которому проходит жидкость в элементе при разности давления Δp на его концах, μ — вязкость жидкости. Формула (5.1) является основным законом фильтрации в деформируемом фиктивном грунте.

2°. В естественном грунте, и даже в фиктивном, сложное строение пор, образующих каналы, по которым течет жидкость, не позволяет дать решение уравнений движения жидкости в этих грунтах. Поэтому с самого начала изучения фильтрации грунтов пошли по пути построения упрощенных моделей грунта.

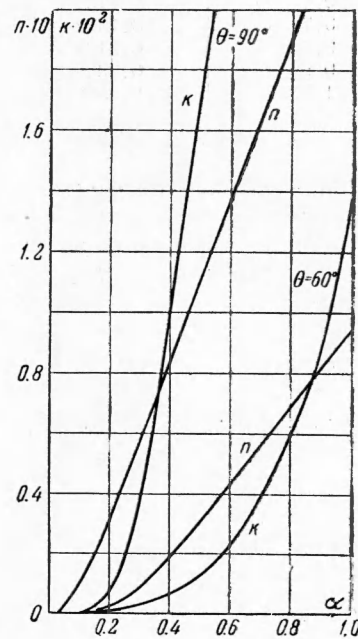
Одной из таких моделей является модель идеального грунта, поры которого образованы параллельными между собой цилиндрическими каналами.

Для изучения фильтрации через фиктивный деформируемый грунт, следуя предложенному Сlichtером [1] методу перехода от идеального грунта, заменим действительную пору фиктивного деформируемого грунта идеальной цилиндрической порой, площадь поперечного сечения s которой равна сечению действительной поры в самом узком месте ее, а длина L цилиндрической поры равна длине ребра основного ромбоэдра.

3°. Среднюю скорость v течения жидкости в круглой трубке длины L при ламинарном режиме и перепаде давления Δp на концах трубки можно записать в виде

$$v = \frac{s}{8\pi\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (5.2)$$

где s — площадь поперечного сечения трубки. Рассмотрим фильтрацию жидкости в грунте с плотной упаковкой. Из фиг. 7 видно, что в грани ромбоэдра имеем сечение двух пор, площадь которых характеризуется просветом n . Так как площадь грани рассматриваемого основного ромбоэдра равна $L^2 \sin \theta$, то площадь сечения s одной поры в самом узком месте будет равна $1/2 n L^2 \sin \theta$.



Фиг. 9

Подставляя выражение для s в формулу (5.2), будем иметь

$$v = \frac{nL^2 \sin \theta \Delta p}{16\pi\mu L} \tag{5.3}$$

Заменим в знаменателе формулы (5.3) длину L ребра ромбоэдра через его толщину H , т. е. через расстояние между двумя параллельными гранями ромбоэдра, через одну из которых трубка — пора — входит по нормали к ней, а через другую — выходит по нормали к ней, пройдя в ромбоэдре путь, равный L . Из ромбоэдра легко находим

$$L = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}} H$$

Подставляя выражение для L только в знаменатель формулы (5.3), последняя после простых преобразований приводится к виду

$$v = \frac{nL^2}{16\pi\mu} (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \frac{\Delta p}{H} \tag{5.4}$$

Кроме того, учитывая, что длина ребра L деформированного ромбоэдра равна $2(r-h)$ и используя выражения для пористости (2.2), формулу (5.4) можно привести к виду

$$v = \frac{nd^2 [(6/\pi) (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta}]^{1/2} \Delta p}{96\mu (1 - m)^{2/3}} \tag{5.5}$$

где $d = 2r$ — диаметр недеформированной шаровой частицы грунта. Обобщим полученный результат и примем, что для всякого значения угла θ имеет место формула (5.5).

4°. Теперь легко установить основную зависимость коэффициента фильтрации K_ϕ от параметров m, n, θ . Действительно, количество жидкости, протекающее через поперечное сечение одной поры в единицу времени, равно vs . Если площадь поперечного сечения пласта F , то его живое сечение равно nF и содержит в сечении количество пор, равное nF/s . Тогда количество жидкости Q , протекающее через площадку F в единицу времени, будет vFn . Выражение для скорости фильтрации w , используя при этом (5.5), можно записать в виде

$$w = \frac{Q}{F} = \frac{[n^2 d^2 (6/\pi) (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta}]^{1/2} \Delta p}{96\mu (1 - m)^{2/3} H} \tag{5.6}$$

По закону Дарси

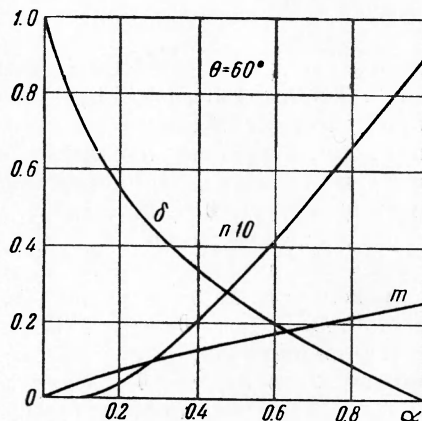
$$w = \frac{K_\phi \Delta p}{\mu H} \tag{5.7}$$

Сравнивая (5.6) и (5.7), найдем выражение для коэффициента фильтрации через основные геометрические параметры грунта

$$K_\phi = \frac{n^2 d^2}{96 (1 - m)^{2/3}} \left[\frac{6}{\pi} (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \right]^{1/2} \tag{5.8}$$

Введем обозначение

$$K(m, n, \theta) = \frac{n^2}{(1 - m)^{2/3}} \left[\frac{6}{\pi} (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} \right]^{1/2} \tag{5.9}$$



Фиг. 10

Тогда выражение для коэффициента фильтрации примет вид

$$K_{\phi} = \frac{d^2}{96} K(m, n, \theta) \quad (5.10)$$

Значения $K(m, n, \theta)$ для θ , равных 90 и 60°, даны в табл. 1 и 2, а их кривые представлены на фиг. 9. Так как в практике принято измерять зерна в миллиметрах, а коэффициент фильтрации K_{ϕ} в дарси и учитывая, что 1 дарси равен $10^{-5}/981 \text{ см}^2$, формула (5.10) примет вид

$$K_{\phi} = 1.022 \cdot 10^4 d^2 K(m, n, \theta) \quad (5.11)$$

где K_{ϕ} выражено в дарси, а d в миллиметрах.

5°. Из выражения (5.8) для коэффициента фильтрации следует, что пористая среда обладает фильтрационной способностью только в тех случаях, когда просвет n отличен от нуля. Просвет n обращается в нуль, когда пористость m принимает некоторое значение m° , зависящее от плотности упаковки θ . Для слабой упаковки ($\theta = 90^{\circ}$) просвет обращается в нуль, когда m° равно 0.0345, а для плотной упаковки ($\theta = 60^{\circ}$) просвет обращается в нуль, когда m° равно 0.0327, т. е. при различных значениях θ предельная пористость m° заключена в пределах от 0.0327 до 0.0345, т. е. $0.0327 \leq m^{\circ}(\theta) \leq 0.0345$.

Таким образом, пористая среда с упаковкой θ , у которой пористость меньше значения $m^{\circ}(\theta)$, имеет замкнутые, изолированные между собой поры и является нефилтующей средой. Как было показано выше, геометрические параметры m, n , а следовательно, и $K(m, n, \theta)$ не зависят от размеров частиц, образующих грунт, в то время как коэффициент фильтрации пропорционален квадрату диаметра этих частиц. Построенная модель и полученные результаты позволяют судить о количественном соотношении и взаимном изменении основных геометрических параметров, коэффициента фильтрации и плотности грунтов при их объемной деформации.

В заключение автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность С. А. Христиановичу за ценные советы и указания, сделанные им при выполнении работы.

Поступила 18 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение газа в пористой среде. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. Т. П. Сб. тр., Изд-во АН СССР, 1953.
2. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОН, 1955, № 5.