Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 5

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛИТРОПИЧЕСКОГО ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

УДК 532.72

Т. А. Боднарь

**Технологический институт
Алтайского государственного технического университета, 659305 Бийск**

В работе [1] проведен анализ устойчивости стационарных состояний проточного химического реактора, при котором условие адиабатичности процесса позволило свести систему двух дифференциальных уравнений в частных производных относительно температуры и концентрации к одному уравнению относительно температуры. При учете теплопотерь, которые всегда имеют место в реальных объектах, задача в общем случае остается существенно двумерной, и это может привести к качественно новому результату — возникновению периодических по времени решений из бифуркации стационарных. Качественное отличие между решениями соответствующих задач (адиабатической и политропической) сохраняется и в случае реактора идеального перемешивания [2]. Действительно, бифуркация стационарного состояния в периодический по времени поток присуща многомерным задачам, сформулированным как в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных. При этом одномерная (по температуре) нелинейная задача, сформулированная в бесконечномерном пространстве, также может иметь наряду со стационарными периодические решения, которые возникают вследствие вторичной бифуркации, обусловленной нелинейностью закона тепловыделения. Это происходит тогда, когда решение бесконечномерной задачи притягивается к конечномерному пространству размерности $\geqslant 2$. Если решение притягивается к пространству размерности 2, то периодические решения возникают в том случае, когда двойной вещественный корень характеристического кубического уравнения, полученного в [1], расщепляется на пару комплексно-сопряженных корней. Условия устойчивости периодических по времени решений, возникающих в результате вторичной бифуркации,приведены в [3].

Согласно процедуре, принятой в [1], устойчивость политропического химического реактора изучается методом проекций [4], хотя возможно сведение рассматриваемой задачи на центральное многообразие. Последний метод применялся при анализе бифуркации рождения цикла в «брюсселяторе» [5]. Отсутствие в нелинейной математической модели «брюсселятора» квадратичных относительно неизвестных функций членов значительно упрощает анализ, но, несмотря на это, использование теоремы о центральном многообразии связано с более громоздкими, на наш взгляд, вычислениями по сравнению с методом проекций.

При постановке задачи первоначально все параметры приводятся в размерных величинах, а функции конкретизированы. Это сделано с целью сужения области исследования устойчивости, вытекающего из физических ограничений параметров и функций от них.

1. Процесс работы политропического химического реактора описывается системой дифференциальных уравнений [6]:

$$\partial T(x_1,t_1)/\partial t_1 = æ\partial^2 T(x_1,t_1)/\partial x_1^2 - w_1\partial T(x_1,t_1)/\partial x_1 + Qk_0c_p^{-1}\varphi(T,c) - \varphi_1(T); \quad (1.1)$$

$$\partial c(x_1,t_1)/\partial t_1 = D\partial^2 c(x_1,t_1)/\partial x_1^2 - w_1\partial T(x_1,t_1)/\partial x_1 - k_0\varphi(T,c). \qquad (1.2)$$

Здесь x_1 — координата; t_1 — время; T — температура; $æ$ — температуропроводность; c — концентрация; Q — тепловой эффект реакции, отнесенный к единице массы; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; k_0 — предэкспоненциальный множитель; c_p — удельная теплоемкость; w_1 — скорость потока; $\varphi(T,c)$ — функция, характеризующая интенсивность тепловыделения в потоке; $\varphi_1(T)$ — функция теплопотерь. Не нарушая общности, предполагаем, что в реакторе происходит реакция типа Лэнгмюра — Хиншельвуда с аррениусовской скоростью выделения тепла, а теплопотери линейно зависят от температуры: $\varphi(T,c) = k_1c(x_1,t_1)\exp(-E(RT(x_1,t_1))^{-1})(1+k_2c(x_1,t_1))^{-2}$, $\varphi_1(T) = k_3(T(x_1,t_1) - T(0,t_1))$ (k_1, k_2, k_3 — постоянные величины). Кроме того, полагаем, что механизмы кондуктивного переноса тепла и диффузии вещества одинаковы, и, следовательно, $D \cong æ$.

Температура $T(x_1,t_1)$ и концентрация $c(x_1,t_1)$ удовлетворяют начальным и граничным условиям

$$T(x_1,t_{10}) = T_0, \quad c(x_1,t_{10}) = c_0; \qquad (1.3)$$

$$T(0,t_1) = T_0, \quad c(0,t_1) = c_0, \quad \partial T(l_1,t_1)/\partial x_1 = 0, \quad \partial c(l_1,t_1)/\partial x_1 = 0, \qquad (1.4)$$

где t_{10} — начальный момент времени; l_1 — длина реактора.

Для дальнейшего анализа введем общепринятые масштабы времени и длины: $t_a = c_pRT_0^2(EQk_0)^{-1}\exp(E(RT_0)^{-1})$, $x_a = (æt_a)^{0,5}$, на их основе определим безразмерные координаты и параметры: $t = t_1t_a^{-1}$, $t_0 = t_{10}t_a^{-1}$, $x = x_1x_a^{-1}$, $l = l_1x_a^{-1}$, $w = w_1t_ax_a^{-1}$, $\beta = RT_0^2E^{-1}$, $\alpha = k_0t_ac_0^{-1}$, $\alpha_1 = k_3RT_0^2E^{-1}$,

$$\mathbf{U} = \left\| \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} E(T-T_0)R^{-1}T_0^{-2}\exp(0{,}5wx) \\ (c-c_0)c_0^{-1}\exp(0{,}5wx) \end{matrix} \right\|.$$

В новых переменных функции $\varphi(T,c)$, $\varphi_1(T)$ запишем в форме

$$\varphi(U_1,U_2) = c_0k_1(1+U_2\exp(-0{,}5wx))(1+k_2c_0(1+U_2\exp(-0{,}5wx)))^{-2}\times$$
$$\times\exp(U_1\exp(-0{,}5wx)(1+\beta U_1\exp(-0{,}5wx))^{-1}),$$
$$\varphi_1(U_1) = \alpha_1U_1\exp(-0{,}5wx).$$

Функция $\varphi(U_1,U_2)$ может быть представлена в окрестности точки $\mathbf{U}=0$ в виде ряда

$$\varphi(U_1,U_2) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{i,j}U_1^iU_2^j\exp(-0{,}5wx), \quad \varphi_{i,j} = \frac{1}{i!j!}\exp(0{,}5wx)\partial^{i+j}\varphi(0,0)/\partial U_1^i\partial U_2^j.$$

Теперь, сгруппировав слагаемые при одинаковых степенях U_1, U_2, запишем систему (1.1), (1.2) с условиями (1.3), (1.4) в безразмерных переменных:

$$\partial\mathbf{U}/\partial t = \mathbf{AU} + \mathbf{B}(\mathbf{U},\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U},\mathbf{U},\mathbf{U}) + \mathbf{\Phi}(0,0) + O(|\mathbf{U}|^4); \qquad (1.5)$$

$$\mathbf{U}(x,t_0) = 0; \qquad (1.6)$$

$$\mathbf{U}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{U}(l,t)}{\partial x} - 0{,}5w\mathbf{U}(l,t) = 0. \qquad (1.7)$$

Постоянный $\mathbf{\Phi}(0,0)$, линейный $\mathbf{AU}$ и нелинейные операторы $\mathbf{B}(\mathbf{U},\mathbf{U})$, $\mathbf{C}(\mathbf{U},\mathbf{U},\mathbf{U})$ представим как

$$\mathbf{\Phi}(0,0)=\left\|\begin{matrix}\varphi(0,0)\\ -\alpha\varphi(0,0)\end{matrix}\right\|,$$

$$\mathbf{AU}=\left\|\begin{matrix}\partial^2/\partial x^2+\varphi_{1,0}-\alpha_1-0{,}25w^2 & \varphi_{0,1}\\ -\alpha\varphi_{1,0} & \partial^2/\partial x^2-\alpha\varphi_{0,1}-0{,}25w^2\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}U_1\\ U_2\end{matrix}\right\|,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{U},\mathbf{U})=\left\|\begin{matrix}\varphi_{2,0} & \varphi_{1,1} & \varphi_{0,2}\\ -\alpha\varphi_{2,0} & -\alpha\varphi_{1,1} & -\alpha\varphi_{0,2}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}U_1^2 & U_1U_2 & U_2^2\end{matrix}\right\|^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{U},\mathbf{U},\mathbf{U})=\left\|\begin{matrix}\varphi_{3,0} & \varphi_{2,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{0,3}\\ -\alpha\varphi_{3,0} & -\alpha\varphi_{2,1} & -\alpha\varphi_{1,2} & -\alpha\varphi_{0,3}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}U_1^3 & U_1^2U_2 & U_1U_2^2 & U_2^3\end{matrix}\right\|^{\mathrm{T}}$$

($\|\cdot\|^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица).

Устойчивость решения уравнения (1.5) с условиями (1.6), (1.7) может быть установлена после решения спектральной задачи

$$\sigma\mathbf{U}=\mathbf{AU}. \tag{1.8}$$

Решениями уравнения (1.8) с учетом (1.6), (1.7) являются собственные векторы

$$\mathbf{y}_n=\left\|\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\|\sin(\lambda_n x).$$

Здесь λ_n — положительные корни уравнения $\mathrm{tg}\,(\lambda l)=2\lambda w^{-1}$, расположенные в порядке возрастания: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ Значения a_n, b_n ($n=1,2,\ldots$) вычисляются с точностью до постоянного множителя,а соотношение между ними находится из решения уравнения $(\mathbf{A}-\sigma_n\mathbf{I})\mathbf{U}=0$, где σ_n — значение параметра σ при $\lambda=\lambda_n$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица 2×2. Если положить $a_n=1$, то $b_n=(\lambda_n^2+0{,}25w^2+\alpha_1-\varphi_{1,0}-\sigma_n)\varphi_{0,1}^{-1}$, $n=1,2,\ldots$

Спектр оператора $\mathbf{A}$ состоит исключительно из дискретных собственных значений σ_n ($n=1,2,\ldots$), удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned}&\sigma_n^2+\sigma_n(2\lambda_n^2+0{,}5w^2+\alpha\varphi_{0,1}+\alpha_1-\varphi_{1,0})+\alpha\alpha_1\varphi_{0,1}+\\ &+(\lambda_n^2+0{,}25w^2)(\lambda_n^2+0{,}25w^2+\alpha\varphi_{0,1}+\alpha_1-\varphi_{1,0})=0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Среди вещественных или комплексно-сопряженных корней уравнений (1.9) есть пара корней, содержащая наибольший вещественный корень или наибольшую вещественную часть. Если эти корни вещественные, то анализ устойчивости состояний равновесия проводится так же, как в [1, 3]. В случае комплексно-сопряженных корней максимальную вещественную часть имеют корни при $n=1$. Тогда, если $\mathrm{Re}\sigma_1=0$, то остальная часть спектра оператора $\mathbf{A}$ расположена в левой части комплексной плоскости.

Первое ($n=1$) из уравнений (1.9) имеет пару чисто мнимых корней лишь тогда, когда $\varphi_{1,0}-a=0$, $\alpha\alpha_1\varphi_{0,1}-(\lambda_1^2+0{,}25w^2)^2>0$, где $a=2\lambda_1^2+0{,}5w^2+\alpha\varphi_{0,1}+\alpha_1$.

Обозначив умноженную на 2 вещественную часть собственного значения σ_1 через $\mu=\mathrm{Re}\sigma_1=0{,}5(\varphi_{1,0}-a)$ и определив частоту в точке $\mu=0$ как $\omega_0=\mathrm{Im}\sigma_1=(\alpha\alpha_1\varphi_{0,1}-(\lambda_1^2+0{,}25w^2)^2)^{0,5}$, заключаем, что периодическое решение уравнения $\partial\mathbf{U}/\partial t=\mathbf{AU}$, имеющее частоту ω_0, строго теряет устойчивость, когда μ, возрастая, проходит через критическую точку $\mu=0$.

Собственный вектор, отвечающий собственному значению σ_1 при $\mu = 0$, имеет вид

$$\mathbf{y}_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ (-\eta + i\omega_0)\varphi_{0,1}^{-1} \end{matrix} \right\| \sin(\lambda_1 x) \qquad (\eta = \lambda_1^2 + \alpha\varphi_{0,1} + 0{,}25w^2).$$

Для проведения анализа устойчивости решения нелинейного уравнения (1.5) сначала полагаем, что дефект, разрушающий бифуркацию в точке $\mu = 0$, равен нулю: $\varphi(0,0) = 0$.

Подстановка $\varphi_{1,0} = 2\mu + a$ в выражение для оператора $\mathbf{A}$ дает в окрестности точки $\mu = 0$ зависимость $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mu) = \mathbf{A}(0) + \mu\partial\mathbf{A}(0)/\partial\mu$, которая с учетом принятого допущения $\varphi(0,0) = 0$ позволяет переписать (1.5):

$$\partial\mathbf{U}/\partial t = (\mathbf{A}(0) + \mu\partial\mathbf{A}(0)/\partial\mu)\mathbf{U} + \mathbf{B}(\mathbf{U},\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U},\mathbf{U},\mathbf{U}) + O(|\mathbf{U}|^4). \qquad (1.10)$$

Линейный $\mathbf{A}(0) + \mu\partial\mathbf{A}(0)/\partial\mu$ и нелинейные $\mathbf{B}(\mathbf{U},\mathbf{U})$, $\mathbf{C}(\mathbf{U},\mathbf{U},\mathbf{U})$ операторы определены на пространстве собственных векторов $\mathbf{y}_n$, $n = 1, 2, \ldots$

2. В критической точке $\mu = 0$ от решения уравнения $\mathbf{AU} = 0$ ответвляются два независимых периодических по времени решения: $\mathbf{z}_1 = \mathbf{y}_1 \exp(is)$ и $\bar{\mathbf{z}}_1 = \bar{\mathbf{y}}_1 \exp(-is)$ (черта означает комплексную сопряженность, $s = \omega_0 t$). Другие решения ($\mathbf{z}_n$, $\bar{\mathbf{z}}_n$, $n > 1$), отвечающие собственным значениям σ_n с отрицательной вещественной частью, экспоненциально убывают со временем.

Векторы $\mathbf{z}_1$, $\bar{\mathbf{z}}_1$ являются 2π-периодическими функциями и принадлежат нуль-пространству оператора

$$\mathbf{L}_s = \left\| \begin{matrix} -\omega_0\partial/\partial s + \partial^2/\partial x^2 + 2\lambda_1^2 + \alpha\varphi_{0,1} + 0{,}25w^2 & \varphi_{0,1} \\ -a\alpha & -\omega_0\partial/\partial s + \partial^2/\partial x^2 - \alpha\varphi_{0,1} - 0{,}25w^2 \end{matrix} \right\|,$$

наделенному скалярным произведением на прямоугольнике $(0,l) \times (0,2\pi)$

$$\langle \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^l \mathbf{z}_m^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{z}}_n \, dx ds.$$

Для построения бифуркационного решения (1.10) определим амплитуду ε как скалярное произведение $\varepsilon = \langle \mathbf{U}, \mathbf{z}_1^* \rangle$, где $\mathbf{z}_1^*$ — собственный вектор сопряженного оператора

$$\mathbf{L}_s^* = \left\| \begin{matrix} \omega_0\partial/\partial s + \partial^2/\partial x^2 + 2\lambda_1^2 + \alpha\varphi_{0,1} + 0{,}25w^2 & -a\alpha \\ \varphi_{0,1} & \omega_0\partial/\partial s + \partial^2/\partial x^2 - \alpha\varphi_{0,1} - 0{,}25w^2 \end{matrix} \right\|,$$

действующего на произвольные векторы $\mathbf{z}_i$, $\mathbf{z}_j$ так, что $\langle \mathbf{L}_s\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle = \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{L}_s^*\mathbf{z}_j \rangle$. Решая уравнение $\mathbf{L}_s^*\mathbf{U} = 0$, находим с точностью до постоянного множителя γ, что собственному значению σ_1 отвечает вектор $\mathbf{z}_1^* = \mathbf{y}_1^* \exp(is)$, где

$$\mathbf{y}_1^* = \gamma \left\| \begin{matrix} a\alpha \\ \eta + i\omega_0 \end{matrix} \right\| \sin(\lambda_1 x).$$

Легко проверить, что $\langle \mathbf{z}_1, \bar{\mathbf{z}}_1^* \rangle = \langle \bar{\mathbf{z}}_1, \mathbf{z}_1^* \rangle = 0$, $\langle \mathbf{z}_n, \mathbf{z}_1^* \rangle = 0$ при $n > 1$.

Теперь 2π-периодические решения $\mathbf{U}(s,\varepsilon) = \mathbf{U}(s + 2\pi, \varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ уравнения (1.10) могут быть представлены в виде рядов по степеням амплитуды ε:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}(s,\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \\ \omega(\varepsilon) - \omega_0 \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n(s) \\ \mu_n \\ \omega_n \end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{U}_n(s) = \|U_{1n}\ U_{2n}\|^{\mathrm{T}}$; μ_n, ω_n — функции и коэффициенты,подлежащие определению.

Продифференцировав выражение

$$\varepsilon = \langle \mathbf{U}, \mathbf{z}_1^* \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{U}_n(s),\ \mathbf{z}_1^* \right\rangle$$

по ε, находим

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{U}_n(s),\ \mathbf{z}_1^* \right\rangle = 1.$$

Определение амплитуды ε сохраняется, если $\langle \mathbf{U}_1(s),\ \mathbf{z}_1^* \rangle = 1$, $\langle \mathbf{U}_n(s),\ \mathbf{z}_1^* \rangle = 0$ при $n > 1$. Условие нормировки $\langle \mathbf{U}_1(s),\ \mathbf{z}_1^* \rangle = 1$ дает возможность найти постоянную

$$\gamma = \frac{\lambda_1 \varphi_{0,1}(\omega_0 - i\eta)}{\omega_0(\omega_0^2 + \eta^2)(\lambda_1 l - \sin(\lambda_1 l)\cos(\lambda_1 l))},$$

и тогда

$$\mathbf{z}_1^* = \frac{\lambda_1 \varphi_{0,1}(\omega_0 - i\eta)\sin(\lambda_1 x)\exp(is)}{\omega_0(\omega_0^2 + \eta^2)(\lambda_1 l - \sin(\lambda_1 l)\cos(\lambda_1 l))} \left\| \begin{matrix} a\alpha(\omega_0 + i\eta) \\ i(\omega_0^2 + \eta^2) \end{matrix} \right\|.$$

Подстановка рядов (2.1) в уравнение (1.10) и отождествление членов при независимых степенях ε дают систему уравнений относительно неизвестных функций $\mathbf{U}_n(s)$ и коэффициентов μ_n, ω_n:

$$\mathbf{L}_s \mathbf{U}_1 = 0; \tag{2.2}$$

$$\mathbf{L}_s \mathbf{U}_2 - 2\omega_1 \partial \mathbf{U}_1/\partial s + 2\mu_1 \partial \mathbf{A}(0)/\partial\mu \mathbf{U}_1 + \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1) = 0; \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{L}_s \mathbf{U}_3 - 3\omega_1 \partial \mathbf{U}_2/\partial s + 3\mu_1 \partial \mathbf{A}(0)/\partial\mu \mathbf{U}_2 - 3\omega_2 \partial \mathbf{U}_1/\partial s + 3\mu_2 \partial \mathbf{A}(0)/\partial\mu \mathbf{U}_1 + \\ + \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2) + \mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1) = 0, \end{gathered} \tag{2.4}$$

и для любого $n > 3$ имеем $\mathbf{L}_s \mathbf{U}_n - n\omega_{n-1} \partial \mathbf{U}_1/\partial s + n\mu_{n-1} \partial \mathbf{A}(0)/\partial\mu \mathbf{U}_1 - n\omega_1 \partial \mathbf{U}_{n-1}/\partial s + n\mu_1 \partial \mathbf{A}(0)/\partial\mu \mathbf{U}_{n-1} + \mathbf{R}_{n-2} = 0$, где $\mathbf{R}_{n-2}$ зависит от $\mathbf{U}_k$, ω_k, μ_k, $k < n-1$.

Решением уравнения (2.2) может быть любая линейная комбинация независимых векторов $\mathbf{z}_1$, $\bar{\mathbf{z}}_1$, обращаемых в нуль оператором $\mathbf{L}_s$. Векторы $\mathbf{U}_n$ принадлежат вещественному пространству, и поэтому $\mathbf{U}_1 = b\mathbf{z}_1 + \bar{b}\bar{\mathbf{z}}_1$. При определении постоянной b будем исходить из того, что начальный момент времени t_0 пока не установлен, и его можно выбрать таким образом, чтобы при $s = \omega_0(t + t_0)$ число $b\exp(i\omega_0 t_0)$ было вещественным. Тогда без ограничения общности можно записать $\mathbf{U}_1 = b\exp(i\omega_0 t_0)(\mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{z}}_1)$. Далее, учитывая нормировку $\langle \mathbf{U}_1,\ \mathbf{z}_1^* \rangle = 1$, имеем $b\exp(i\omega_0 t_0) = 1$, $\mathbf{U}_1 = \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{z}}_1$ или

$$\mathbf{U}_1 = 2\sin(\lambda_1 x) \left\| \begin{matrix} \cos s \\ -\eta\cos s - \omega_0 \sin s \end{matrix} \right\|.$$

Условие разрешимости уравнения (2.3), вытекающее из теоремы Фредгольма об альтернативе, формулируется в виде $\langle \mathbf{L}_s \mathbf{U}_2,\ \mathbf{z}_1^* \rangle = 0$, позволяющем получить одно уравнение в комплексной форме относительно коэффициентов μ_1, ω_1:

$$2\mu_1 \langle \partial \mathbf{A}(0)/\partial\mu \mathbf{U}_1,\ \mathbf{z}_1^* \rangle - 2\omega_1 \langle \partial \mathbf{U}_1/\partial s,\ \mathbf{z}_1^* \rangle + \langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1),\ \mathbf{z}_1^* \rangle = 0. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) расщепляется на два в вещественной форме:

$$2\mu_1 \langle \partial \mathbf{A}(0)/\partial\mu \mathbf{U}_1,\ \mathbf{z}_1^* \rangle + \mathrm{Re}\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1),\ \mathbf{z}_1^* \rangle = 0,$$

$$-2\omega_1 \mathrm{Im}\langle \partial \mathbf{U}_1/\partial s,\, \mathbf{z}_1^*\rangle + \mathrm{Im}\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0.$$

Вещественная и мнимая части скалярного произведения $\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle$ обращаются в нуль после интегрирования по s, и поэтому, учитывая, что $\langle \mathbf{U}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 1$, $\langle \partial \mathbf{U}_1/\partial s,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = i$, имеем $\mu_1 = 0$, $\omega_1 = 0$.

При $\mu_1 = 0$, $\omega_1 = 0$ решение уравнения (2.3) состоит из общего решения однородного уравнения $\mathbf{L}_s\mathbf{U}_2 = 0$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения

$$\mathbf{L}_s\mathbf{U}_2 = -\mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1), \tag{2.6}$$

причем, как было показано выше, должно соблюдаться условие $\langle \mathbf{U}_2,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0$. Общим решением $\mathbf{U}_{2g}$ однородного уравнения $\mathbf{L}_s\mathbf{U}_2 = 0$ может быть любая линейная комбинация векторов $\mathbf{z}_1$, $\bar{\mathbf{z}}_1$, $\mathbf{U}_{2g} = \gamma_1\mathbf{z}_1 + \bar{\gamma}_1\bar{\mathbf{z}}_1$ (γ_1 — постоянная величина).

Перед тем как получить частное решение $\mathbf{U}_{2p}$ неоднородного уравнения (2.6) представим оператор $\mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1)$ в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1) = \sin^2(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\left\| \begin{matrix} \Delta_{11}\sin^2 s + \Delta_{12}\cos^2 s + \Delta_{13}\sin s\cos s \\ \Delta_{21}\sin^2 s + \Delta_{22}\cos^2 s + \Delta_{23}\sin s\cos s \end{matrix} \right\|,$$

где $\Delta_{11} = 4\omega_0^2\varphi_{0,2}\exp(0{,}5wx)$; $\Delta_{12} = 4(\varphi_{2,0} - \eta\varphi_{1,1} + \eta^2\varphi_{0,2})\exp(0{,}5wx)$; $\Delta_{13} = 4(2\eta\omega_0\varphi_{0,2} - \omega_0\varphi_{1,1})\exp(0{,}5wx)$; $\Delta_{2i} = -\alpha\Delta_{1i}$ $(i = 1 - 3)$. Специальный вид правой части (2.6) и метод разделения переменных позволяют разыскивать частное решение этого уравнения как

$$\mathbf{U}_{2p} = \exp(-0{,}5wx)\left\| \begin{matrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{N}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{N}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{N}_2^{\mathrm{T}} \end{matrix} \right\|, \tag{2.7}$$

где

$$\mathbf{N}_1 = \|\sin^2(\lambda_1 x) \quad \cos^2(\lambda_1 x) \quad \sin(\lambda_1 x)\cos(\lambda_1 x)\|;$$

$$\mathbf{N}_2 = \|\sin^2 s \quad \cos^2 s \quad \sin s\cos s\|;$$

$\mathbf{M}_1 = \|a_{ij}\|$, $\mathbf{M}_2 = \|b_{ij}\|$ $(i,\, j = 1 - 3)$ — матрицы неопределенных коэффициентов.

Подстановка (2.7) в (2.6) дает систему из 18 линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{ij}, b_{ij} $(i,\, j = 1 - 3)$.

Таким образом, решением уравнения (2.3) является сумма $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_{2g} + \mathbf{U}_{2p}$, в которой $\mathbf{U}_{2g}$ зависит от постоянного множителя γ_1. Для определения γ_1 воспользуемся условием $\langle \mathbf{U}_2,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = \langle \mathbf{U}_{2g},\, \mathbf{z}_1^*\rangle + \langle \mathbf{U}_{2p},\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0$. Поскольку $\langle \mathbf{U}_{2p},\, \mathbf{z}_1^*\rangle$ обращается в нуль после интегрирования по s, $\langle \bar{\mathbf{z}}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0$, $\langle \mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 1$,то это условие выполняется, если $\gamma_1 = 0$, и, следовательно, $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_{2p}$. Заметим,что если функция $\varphi(U_1,\, U_2)$ не равна нулю тождественно, т. е. c_0 и k_1 не равны нулю, то не существует такого сочетания параметров процесса, при котором $\mathbf{U}_2 = 0$. Действительно, если $c_0 \neq 0$, $k_1 \neq 0$, то $\varphi_{1,1} \neq 0$ и функция Δ_{13} может быть равной нулю лишь тогда, когда $\varphi_{0,2} \neq 0$, но тогда $\Delta_{11} \neq 0$. Значит, $\mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1) \neq 0$, $\mathbf{U}_2 \neq 0$.

Условие разрешимости уравнения (2.4) $\langle \mathbf{L}_s\mathbf{U}_3,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0$ дает одно уравнение относительно неизвестных коэффициентов μ_2, ω_2 в комплексной форме

$$3\mu_2\langle \partial\mathbf{A}(0)/\partial\mu\mathbf{U}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle - 3\omega_2\langle \partial\mathbf{U}_1/\partial s,\, \mathbf{z}_1^*\rangle + 3\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle + \langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0$$

или два уравнения в вещественной форме

$$3\mu_2\langle \partial\mathbf{A}(0)/\partial\mu\mathbf{U}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle + 3\mathrm{Re}\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle + \mathrm{Re}\langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0; \tag{2.8}$$

$$-3\omega_2\mathrm{Im}\langle \partial\mathbf{U}_1/\partial s,\, \mathbf{z}_1^*\rangle + 3\mathrm{Im}\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle + \mathrm{Im}\langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0. \tag{2.9}$$

Операторы $\mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2)$, $\mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1)$ определяются как

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2) = \begin{Vmatrix} \varphi_{2,0} & \varphi_{1,1} & \varphi_{0,2} \\ -\alpha\varphi_{2,0} & -\alpha\varphi_{1,1} & -\alpha\varphi_{0,2} \end{Vmatrix} \|2U_{11}U_{12} \quad U_{12}U_{21} + U_{11}U_{22} \quad 2U_{21}U_{22}\|^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1) = \begin{Vmatrix} \varphi_{3,0} & \varphi_{2,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{0,3} \\ -\alpha\varphi_{3,0} & -\alpha\varphi_{2,1} & -\alpha\varphi_{1,2} & -\alpha\varphi_{0,3} \end{Vmatrix} \|U_{11}^3 \quad U_{11}^2U_{21} \quad U_{11}U_{21}^2 \quad U_{21}^3\|^{\mathrm{T}}$$

Из уравнений (2.8), (2.9) с учетом

$$\langle \partial\mathbf{A}(0)/\partial\mu\mathbf{U}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 2\langle \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{z}}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 2, \quad \langle \partial\mathbf{U}_1/\partial s, \mathbf{z}_1^*\rangle = \langle i\mathbf{z}_1 - i\bar{\mathbf{z}}_1,\, \mathbf{z}_1^*\rangle = i$$

находим

$$\mu_2 = -\frac{\mathrm{Re}\,[3\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle + \langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle]}{6}; \tag{2.10}$$

$$\omega_2 = \frac{\mathrm{Im}\,[3\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle + \langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle]}{3}, \tag{2.11}$$

и решение бифуркационной задачи (1.6), (1.7), (1.10) примет вид

$$\mu = 0{,}5\mu_2\varepsilon^2, \quad \omega = \omega_0 + 0{,}5\omega_2\varepsilon^2, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_1\varepsilon + 0{,}5\mathbf{U}_2\varepsilon^2. \tag{2.12}$$

В соответствии с [4] периодическое по времени решение уравнения (1.10) в точке $\mathbf{U} = 0$, $\mu = 0$ устойчиво, если $(\partial\mu(\varepsilon)/\partial\varepsilon)\partial\mathrm{Re}\sigma_1/\partial\mu > 0$, и неустойчиво, если $(\partial\mu(\varepsilon)/\partial\varepsilon)\partial\mathrm{Re}\sigma_1/\partial\mu < 0$. Используя нормировку $\varepsilon = 1$, заключаем, что решение уравнения (1.10) устойчиво, если $\mu_2 > 0$, и неустойчиво, если $\mu_2 < 0$.

Оператор $\mathbf{B}(\mathbf{U},\, \mathbf{U})$ имеет порядок малости, равный 2, и в соответствии с утверждением [7] в окрестности точки $\mu = 0$ у уравнения (1.10) есть малые ненулевые решения при $\mu < 0$ или при $\mu > 0$. Поскольку операторы $\mathbf{A}(\mathbf{U})$, $\mathbf{B}(\mathbf{U},\, \mathbf{U})$, $\mathbf{C}(\mathbf{U},\, \mathbf{U},\, \mathbf{U})$ гладкие, решение $\mu \neq 0$ единственно [7]. Граница устойчивости этого решения определяется условием

$$\mu - 0{,}5\mu_2 = 0, \tag{2.13}$$

полученным из (2.12) при $\varepsilon = 1$. Решение задачи (1.6), (1.7), (1.10) устойчиво, если $\mu - 0{,}5\mu_2 < 0$, и неустойчиво, если $\mu - 0{,}5\mu_2 > 0$.

Возвращаясь к уравнению (1.5) с $\varphi(0,0) = \mathrm{const} \neq 0$, заметим, что, поскольку $\langle \mathbf{\Phi}(0,0),\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0$, дефект $\mathbf{\Phi}(0,0)$ не оказывает влияния на периодические решения $\mathbf{U}(s) = \mathbf{U}(s + 2n\pi)$ этого уравнения, и, следовательно, (2.13) определяет границу устойчивости решений задачи (1.5)–(1.7).

В качестве примера рассмотрим тепловую устойчивость политропического химического реактора при следующих исходных данных: $\beta = 0{,}2$, $c_0 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $\alpha = 0{,}6$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $w = 0{,}2$. Условие $\mu = \varphi_{1,0} - a = 0$ дает $a = 1$, $\lambda_1 = 0{,}374$, что позволяет найти в линейном приближении критическую длину реактора $l = 3{,}502$ (из уравнения $\mathrm{tg}(\lambda_1 l) - 2\lambda_1 l w^{-1} = 0$), параметры $\eta = 0{,}750$, $\omega_0 = 0{,}194$, $\Delta_{11} = 0$, $\Delta_{12} = -1{,}800$, $\Delta_{13} = -0{,}775$, $\Delta_{21} = 0$, $\Delta_{22} = -1{,}080$, $\Delta_{23} = -0{,}465$ и векторы

$$\mathbf{z}_1 = \|1 \quad -0{,}75 + 0{,}194i\|^{\mathrm{T}} \sin(\lambda_1 x) \exp(is),$$

$$\mathbf{z}_1^* = \|0{,}353 + 1{,}365i \quad 1{,}820i\|^{\mathrm{T}} \sin(\lambda_1 x) \exp(is).$$

В результате вычисления скалярных произведений $\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle$, $\langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_1),\, \mathbf{z}_1^*\rangle$ находим $\mathrm{Re}\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle = 0{,}0137$, $\mathrm{Im}\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{U}_2),\, \mathbf{z}_1^*\rangle = -0{,}0387$,

$\mathrm{Re}\langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1), \mathbf{z}_1^* \rangle = -0{,}113$, $\mathrm{Im}\langle \mathbf{C}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1), \mathbf{z}_1^* \rangle = 0{,}104$.

Подстановка полученных результатов в (2.10), (2.11) приводит к $\mu_2 = 0{,}012$, $\omega_2 = 0{,}004$, и решение нелинейной задачи примет вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1\varepsilon + 0{,}5\mathbf{U}_2\varepsilon^2, \quad \mu = 0{,}006\varepsilon^2, \quad \omega = 0{,}194 + 0{,}002\varepsilon^2. \tag{2.14}$$

Поскольку $\mu_2 > 0$, бифуркационное решение (2.14) задачи (1.5)–(1.7) является суперкритическим; оно устойчиво, если $\mu < 0{,}006$. Граница устойчивости, определяемая в области малых μ из (2.14) при $\varepsilon = 1$, дает при прочих равных условиях длину реактора $l = 3{,}531$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарь Т. А.** Устойчивость адиабатического проточного химического реактора // ПМТФ. 1991. № 3. С. 91–97.
2. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
3. **Боднарь Т. А.** Тепловая устойчивость тангенциального потока жидкости в кольцевом канале // ПМТФ. 1991. № 4. С.127–133.
4. **Йосс Ж., Джозеф Д.** Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
5. **Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.** Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
6. **Кафаров В. В.** Методы кибернетики в химии и химической технологии. М.: Химия, 1976.
7. **Функциональный** анализ / Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 25/VII 1995 г.