

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ
НЕОДНОРОДНЫХ ДИФFUЗИОННЫХ СТРУКТУР
В ПРОЦЕССАХ НЕЛИНЕЙНОЙ
ИОНИЗАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННОЙ КИНЕТИКИ**

Л. Н. Николаева, В. Ф. Резцов
(Киев)

Перенос электронов и ионов в низкотемпературной плазме и плазме полупроводников при некоторых условиях проходит с формированием резко неоднородных структур. Одной из возможных причин такого формирования, изучаемой численно в данной работе, является нелинейность в уравнении амбиполярной диффузии вследствие трехчастичной электрон-ионной рекомбинации.

В приближении изотермической амбиполярной диффузии ($(|N_e - N_i|)/N_e \ll 1$) уравнения ионизационно-рекомбинационной кинетики для нестационарного процесса переноса электронов (e) и ионов (i) имеют вид [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} - \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_e + \mu_i} \frac{\partial^2 N_e}{\partial x^2} - \alpha_i N N_e - \alpha_r N_e^3, \\ \frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{D_e - D_i} \frac{\partial (N_e F_x)}{\partial x} = \alpha_i N N_e - \alpha_r N_e^3. \end{aligned}$$

В безразмерной форме уравнения (1) имеют вид

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \varphi(u - u^3);$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\varphi - 1}{\varphi} \frac{\partial (uF)}{\partial \xi} = \varphi(u - u^3),$$

где $u = N_e/N_e(\infty)$; $\tau = t/t^*$; $\xi = x/x^*$; $F = E_x/E_x^*$; $\varphi = \frac{\mu_e + \mu_i}{2\mu_i}$;

$$t^* = \left(\frac{2\mu_i \alpha_r N_e^2(\infty)}{\mu_e + \mu_i} \right)^{-1}; \quad x^* = \left(\frac{D_e}{\alpha_r N_e^2(\infty)} \right)^{1/2}; \quad E_x^* = \left(\frac{ex^3}{kT} \right)^{-1},$$

а остальные обозначения общеприняты [2]. Отметим только, что u — концентрация электронов N_e , отнесенная к величине $N_e(\infty)$, соответствующей установившемуся однородному стационарному состоянию, когда ионизация полностью компенсируется рекомбинацией: $N_e(\infty) = (\alpha_i/\alpha_r)^{1/2}$.

Так как в дальнейшем рассматривается только задача о распределении концентраций, то граничные условия типа Дирихле

$$u(\xi = 0, \tau) = u_0 = \text{const}, \quad u(\xi = \delta, \tau) = u_\delta = \text{const}$$

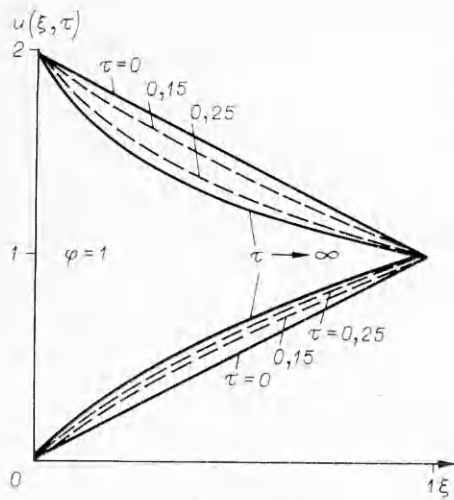
на конечном интервале $(0, \delta)$ ставятся для уравнения (2).

Начальные условия

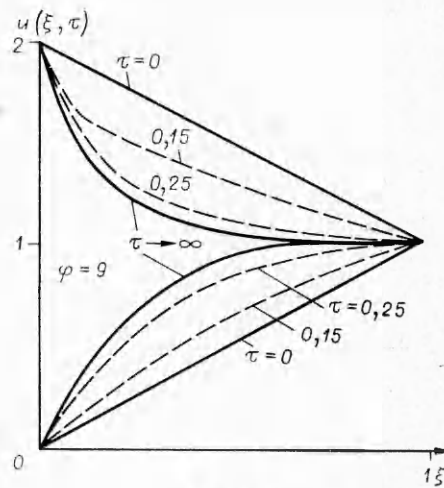
$$u(\xi, \tau = 0) = u^*(\xi),$$

в качестве которых используются линейное, прямоугольное или синусоидальное распределения, для простоты алгоритма расчета сопрягаются с граничными

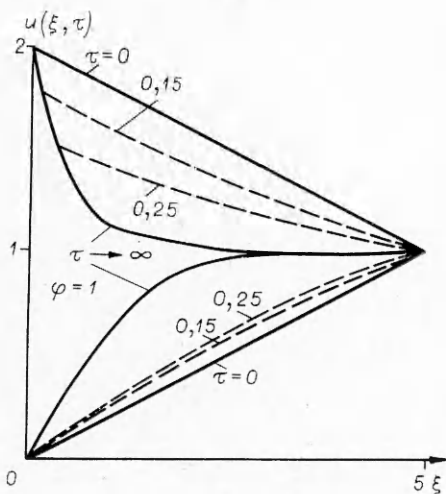
$$u^*(\xi = 0) = u_0, \quad u^*(\xi = \delta) = u_\delta.$$



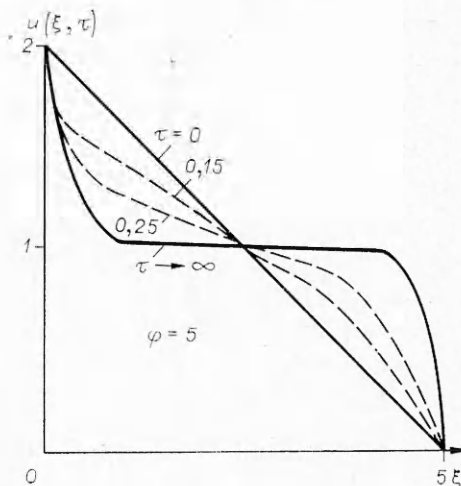
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

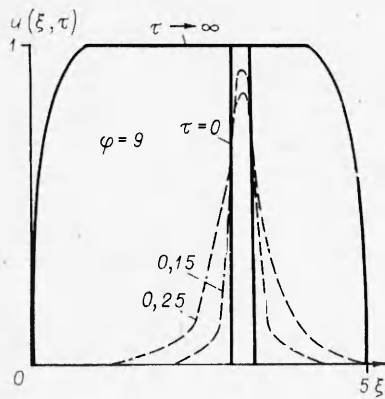
Для получения конкретных зависимостей $u(\xi, \tau)$ использовался метод скалярной прогонки [3] с аппроксимацией нелинейности в правой части уравнения (2) по методу квазилинеаризации [4], когда значение u^3 на i -м шаге по координате и $j + 1$ -м шаге по времени определяется выражением

$$(u_i^{j+1})^3 = (u_i^j)^3 + 3(u_i^j)^2(u_i^{j+1} - u_i^j).$$

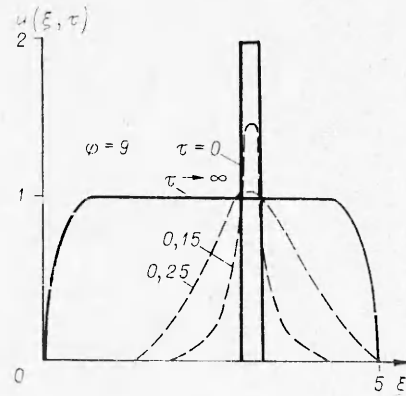
Условие сходимости метода скалярной прогонки для данной задачи выполняется при шаге по времени $\theta < 0,5$. В расчетах значение θ принималось равным 0,05 и считалось, что решение выходит на режим стабилизации при $\tau \rightarrow \infty$, если выполняется условие

$$\max_i |u_i^{j+1} - u_i^j| < 10^{-3}.$$

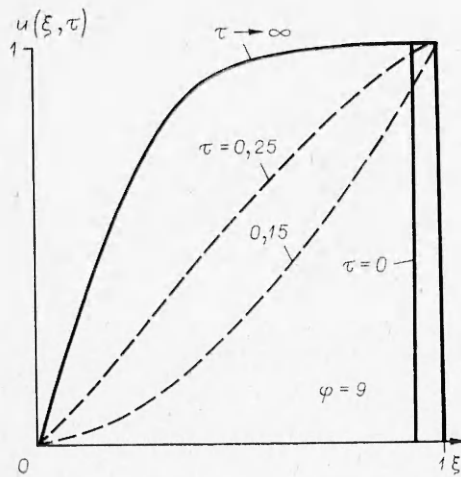
В результате численных расчетов режимов установления выясняется, что пространственное распределение концентрации электронов является резко неоднородным, причем вид установившегося распределения зависит не столько от формы начального распределения, а в основном опреде-



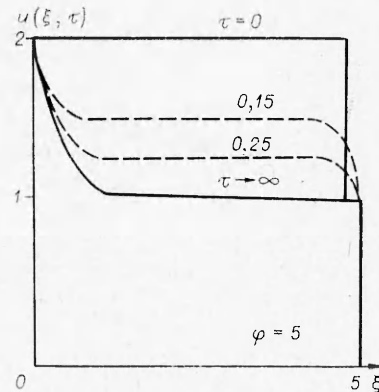
Ф и г. 5



Ф и г. 6



Ф и г. 7



Ф и г. 8

ляется граничными значениями. Рассмотрим вначале процесс установления для линейного начального распределения (фиг. 1—4). Здесь и на остальных фигурах сплошными линиями отмечены начальное ($\tau = 0$) и установившееся ($\tau \rightarrow \infty$) состояния, а штриховыми — промежуточные состояния.

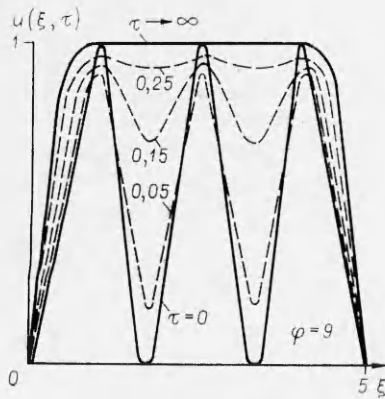
Из представленных зависимостей видно, что с течением времени формируется резко неоднородное распределение концентрации электронов. Степень неоднородности, количественной величиной которой может служить максимум модуля производной $\partial u / \partial \xi$, монотонно увеличивается с ростом параметра φ (фиг. 2) и ширины отрезка (фиг. 3), если величина δ изменяется в интервале $\sim (0-5)$. Дальнейшее увеличение δ практически не сказывается на крутизне функции $u(\xi, \tau \rightarrow \infty)$.

Необходимо заметить, что степень неоднородности профиля электронной концентрации при $u_0 = 1$ тем больше, чем больше величина u_0 отличается от стационарного однородного состояния, и достигает максимума при выходе на стационарный режим.

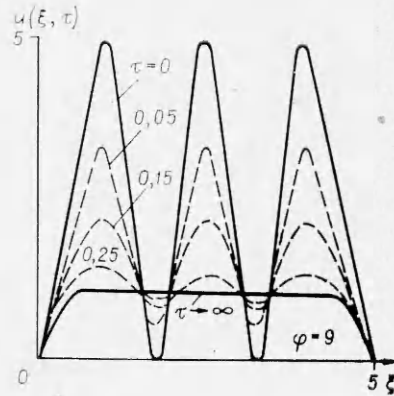
Для стационарного состояния, следуя работе [2], можно получить соотношение

$$(4) \quad \partial u / \partial \xi = \sqrt{(\varphi/2)}(1 - u^2) + A, \quad A = \text{const.}$$

Если иметь в виду данные, приведенные на фиг. 1—3, и положить $\partial u / \partial \xi (u = 1) = 0$, то $A = 0$ и максимум модуля производной $\partial u / \partial \xi$, который



Ф и г. 9



Ф и г. 10

вследствие гладкости функции $u(\xi, \tau \rightarrow \infty)$ достигается в точке $\xi = 0$, растет с увеличением u_0 при $u_0 > 1$ и с уменьшением u_0 при $u_0 < 1$.

Аналогичными свойствами характеризуется установление стационарного неоднородного профиля из начального линейного, если на одном из концов интервала задано значение $u_0 > 1$, а на другом $u_\delta < 1$ (фиг. 4). При этом в средней части промежутка формируется плато, ширина которого тем больше, чем больше величина параметра φ и ширина промежутка δ .

Другая серия расчетов была выполнена для задач о расплывании узкого слоя плазмы толщиной $h (h \ll \delta)$ при нулевых граничных условиях в точках $\xi = 0$ и $\xi = \delta$ (фиг. 5, 6). Как видно из фиг. 5, 6, узкое прямоугольное распределение электронной концентрации трансформируется в выпуклый профиль, причем в процессе стабилизации могут реализоваться колебания в максимуме функции $u(\xi, \tau)$, если $\max u^*(\xi) < 1$. При $\max u^*(\xi) > 1$ максимум распределения $u(\xi, \tau)$ монотонно стремится к единице.

Используя соотношение (4), можно установить связь между максимумами функции $u(\xi, \tau \rightarrow \infty)$ и значениями производных в точках $\xi = 0$ и $\xi = \delta$:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi = 0, \tau \rightarrow \infty) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi = \delta, \tau \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{\varphi}{2}} u_{\max}^2(\xi, \tau \rightarrow \infty),$$

из которой следует симметричность стока частиц на стенках в установившемся режиме.

Режимы расплывания некоторых других видов прямоугольного распределения представлены на фиг. 7, 8. Видно, что установившееся состояние для таких режимов совпадает с приведенными на фиг. 1—4.

Из изложенных выше данных следует, что неоднородное распределение электронов с их локализацией вблизи концов интервала $(0, \delta)$ при u_0 или $u_\delta > 1$ и делокализацией в тех же точках при u_0 или $u_\delta < 1$ начинает проявляться в первые моменты установления, монотонно усиливаясь к концу переходного процесса.

В работе проводилось также численное исследование выравнивания концентрации электронов в слоисто-неоднородной плазме (фиг. 9, 10). Результаты расчетов позволяют сделать вывод о том, что заполнение впадин происходит монотонным образом независимо от того, $\max u^*(\xi) \leq 1$ или $\max u^*(\xi) > 1$, и соответствует первой стадии установления выпуклого профиля концентраций для процессов нелинейной химической кинетики, рассмотренных в работе [5]. Однако в отличие от работы [5] в рассматриваемой системе не наблюдается пространственных колебаний, хотя при $\max u^*(\xi) \leq 1$ возможны локальные колебания в пиках (см. фиг. 9).

Для процессов установления при $\max u^*(\xi) > 1$ колебаний в пиках не обнаружено.

В заключение отметим, что причиной эффектов локализации и делокализации электронов в рассматриваемых диффузионных процессах так же, как и причиной формирования неоднородных тепловых структур в средах с нелинейным объемным поглощением [6—9], является изменение механизма генерации заряженных частиц с изменением знака источника в правой части уравнения (2) при переходе через границу однородного стационарного состояния $u = 1$.

Авторы выражают благодарность Н. Х. Эркенову за ценные рекомендации по разработке алгоритма численного расчета.

Поступила 30 1 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережинский Р. А., Резцов В. Ф. О промежуточной асимптотике одной модельной системы уравнений нелинейного переноса в плотной изотермической плазме при электродного слоя. — В сб.: Гидродинамика лопастных машин и общая механика. Воронеж, изд. ВПИ, 1973.
2. Лебедев А. Д. К вопросу о приэлектродных явлениях в газовом разряде. — ЖТФ, 1968, т. 38, № 10.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., Наука, 1973.
4. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., Мир, 1968.
5. Пригожин И., Николис Ж. Биологический порядок, структура и неустойчивости. — УФН, 1973, т. 109, № 3.
6. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. — ЖВММФ, 1972, т. 12, № 4.
7. Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла. — ЖВММФ, 1973, т. 13, № 5.
8. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. — ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4.
9. Калашников А. С. О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры. — ЖВММФ, 1976, т. 16, № 3.

УДК 530.18

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СЛАБОДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

А. А. Дорфман, Е. Н. Пелиновский, Ю. А. Степаняц
(Ленинград, Горький)

Задачи, связанные с возбуждением и распространением нелинейных цилиндрических и сферических волн в средах со слабой дисперсией, возникают во многих разделах теоретической и прикладной физики. Такого рода возбуждения наблюдаются, например, в плазме [1—3], на поверхности неглубокой жидкости (волны цунами и др.) [4, 5], в газодинамике [6], в нелинейных решетках и т. д. Эволюция соответствующих одномерных процессов, описываемых плоскими волнами с помощью уравнения Кортевега—де Вриза (КДВ), в настоящее время изучена достаточно подробно [7]. В последние годы неоднократно предпринимались попытки обобщения этого уравнения для описания неплоских волн, обладающих осевой или центральной симметрией [5, 8—11]. Были получены отдельные частные решения обобщенного уравнения КДВ, которые описывают квазистационарные уединенные импульсы — солитоны [2, 3, 5, 8—11], наблюдавшиеся также в ряде экспериментальных работ [1—4]. Данная работа посвящена дальнейшему изучению цилиндрических и сферических волн, здесь получены некоторые новые приближенные решения, учитывающие влияние потерь в среде, разобраны различные случаи преобладания тех или иных факторов (нелинейность, дисперсия, геометрическая расходимость), приведено сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными.