

## РАСЧЕТ УДАРНЫХ АДИАБАТ НЕКОТОРЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СМЕСЕЙ

Г. А. Богачев

(Москва)

Метод расчета ударных адиабат двухфазных смесей, предложенный в [1] и не использующий принцип аддитивности, обобщается на среды, состоящие из  $n$  фаз. Вычислена и сопоставлена с экспериментом ударная адиабата трехфазной смеси — сплава, состоящего из меди, цинка и свинца (латунь). Для парафино-вольфрамовой смеси показано, что адиабаты фаз, составляющих гетерогенную смесь, отклоняются от соответствующих адиабат сплошного материала фаз. Исходя из известных уравнений состояния алюминия и эпоксидной смолы, определена ударная адиабата этой смеси. Проведено сравнение с аналогичным расчетом, выполненным с использованием принципа аддитивности.

**1. Описание модели.** Анализ ударных переходов в многофазных средах находит применение при изучении распространения ударных волн в горных породах, насыщенных водой или нефтью [2,3]; при определении уравнений состояния одной из фаз [1,4]; при исследовании свойств новых композиционных материалов и сплавов [5,6]. В большинстве опубликованных в последнее время работ [4-7] для нахождения ударной адиабаты многофазной смеси используется аддитивное приближение, при котором предполагается, что каждая фаза ударно сжимается по адиабате Гюгонио для монолитного вещества этой фазы. Однако имеется другая точка зрения на ударные переходы в гетерогенных смесях, изложенная, например, в работах [1,8], согласно которой ударные адиабаты фаз, составляющих смесь, могут отклониться от адиабат сплошного вещества этих фаз, давая при некоторых концентрациях фаз аномальный наклон ударных адиабат Гюгонио, как в случае пористых материалов [9].

Пусть многофазная среда представляет собой разнородные частицы, состояние каждой из которых характеризуется давлением, плотностью и температурой. Эти параметры связаны между собой уравнением состояния соответствующего сплошного материала фазы. Предположим, что многофазная среда в макромасштабе однородна и изотропна. Рассмотрим стационарное распространение плоской ударной волны в такой среде. Пусть амплитуда волны не слишком велика и в уравнении состояния вещества можно не учитывать электронные составляющие давления и внутренней энергии. В то же время будем предполагать, что волна и не слабая, так что гидростатическая компонента приложенного к гетерогенной смеси силового поля значительно превышает внутренние напряжения сдвига. Тогда среду можно считать сжимаемой жидкостью и ее поведение при ударных переходах описывать уравнениями гидродинамики.

В предположении о равенстве фазовых давлений уравнения движения и энергии смеси [3] записываются в случае  $n$ -фазной смеси (в работе [1] рассматривалась двухфазная смесь) следующим образом. Имеем для  $i$ -й фазы уравнение движения

$$(1.1) \quad \rho_i \alpha_i \frac{d_i w_i}{dt} = -\alpha_i \frac{\partial p}{\partial x} + R_i$$

уравнение неразрывности

$$(1.2) \quad \frac{\partial(\rho_i \alpha_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i \alpha_i w_i)}{\partial x} = 0$$

уравнение баланса энергии

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_i \alpha_i \left( \varepsilon_i + \frac{w_i^2}{2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho_i \alpha_i \left( \varepsilon_i + \frac{w_i^2}{2} \right) w_i + \alpha_i p w_i \right\} + \frac{\delta W_i}{dt} + q_i = 0$$

$$\frac{\delta W_i}{dt} = p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + y_i, \quad \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w_i \frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь  $\rho_i$  — плотность  $i$ -й фазы;  $\alpha_i$  — ее объемная концентрация, причем  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ;  $w_i$  — скорость;  $p$  — давление;  $R_i$  — объемная сила межфазного взаимодействия, действующая на  $i$ -ю фазу со стороны остальных фаз;  $\varepsilon_i$  — удельная внутренняя энергия  $i$ -й фазы;  $\delta W_i / dt$  — эффективная работа сил, действующих со стороны всех других фаз на  $i$ -ю фазу в единицу времени;  $q_i$  — приток тепла в  $i$ -ю фазу от всех остальных фаз;  $y_i$  — работа вязких объемных сил, переходящая в тепло, совершаемая над  $i$ -й фазой остальными фазами и возникающая из-за относительного перемещения фаз. Суммарный вклад в импульс и энергию всей смеси от сил внутреннего взаимодействия между фазами равен нулю

$$\left( \sum_{i=1}^n R_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \delta W_i / dt = 0 \right)$$

Так как скорость ударной волны  $U$  постоянна, то в уравнениях (1.1) — (1.3) удобно перейти к новой переменной  $z = x - Ut$ . Получим интегралы неразрывности масс для каждой из фаз

$$(1.4) \quad \alpha_i \rho_i u_i = \alpha_{i0} \rho_{i0} u_{i0} = M_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

интегралы сохранения суммарного импульса среды

$$(1.5) \quad p + \sum_{i=1}^n M_i u_i = \sum_{i=1}^n M_i u_{i0} + p_0$$

и суммарной полной энергии

$$(1.6) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ M_i \left( \varepsilon_i + \frac{u_i^2}{2} \right) + \alpha_i u_i p \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ M_i \left( \varepsilon_{i0} + \frac{u_{i0}^2}{2} \right) + \alpha_{i0} u_{i0} p_0 \right\}$$

Здесь  $u_i = w_i - U$  — массовая скорость частиц  $i$ -й фазы относительно фронта ударной волны. Индексом нуль помечены величины, характеризующие состояние среды перед фронтом ударной волны. Уравнения баланса импульса и энергии для  $i$ -й фазы при переходе к новой переменной преобразуются к виду

$$(1.7) \quad \frac{d}{dz} (M_i w_i + \alpha_i p) - p \frac{d\alpha_i}{dz} = R_i$$

$$(1.8) \quad \frac{d}{dz} \left\{ M_i \left( \varepsilon_i + \frac{w_i^2}{2} \right) + \alpha_i p w_i \right\} - U p \frac{d\alpha_i}{dz} + y_i + q_i = 0$$

Умножая уравнение (1.7) на  $U$  и вычитая из уравнения (1.8), получим

$$\frac{d}{dz} \left\{ M_i \left( \varepsilon_i + \frac{w_i^2}{2} \right) + \alpha_i p (w_i - U) - M_i w_i U \right\} = -q_i - y_i - R_i U$$

Проинтегрировав это уравнение по интервалу  $z_0 - h, z_0 + h$ , заключающему в себе ударный фронт, и переходя затем к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим (в предположении, что в интервале  $2h$  могут неограниченно возрастать лишь производные, а сами переменные  $w_i, \varepsilon_i, p$  и их функции  $q_i, y_i$  и  $R_i$  меняются скачком, но эти изменения ограничены) следующее соотношение:

$$(1.9) \quad M_i (\varepsilon_i + u_i^2 / 2) + \alpha_i u_i p = M_i (\varepsilon_{i0} + u_{i0}^2 / 2) + \alpha_{i0} u_{i0} p_0$$

**2. Приближение механического равновесия.** Запишем уравнения (1.4) — (1.6), (1.9) для случая, когда за фронтом ударной волны достигается механическое равновесие фаз, т. е. предположим, что сразу за скачком будет выполнено условие

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$$

Это соотношение делает систему уравнений (1.4) — (1.6), (1.9) замкнутой.

Если определить массовые концентрации фаз  $x_i$  и их удельные объемы  $v_i$  соотношениями

$$x_i = \alpha_i \rho_i / \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i, \quad v_i = 1 / \rho_i$$

то для удельного объема гетерогенной многофазной среды  $V$  получим

$$(2.1) \quad V = 1 / \rho = 1 / \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

Тогда уравнения (1.4) и (1.5) при  $u_{i0} = -U$  преобразуются к виду обычному для ударных переходов, но справедливому при (2.1) и для смесей

$$(2.2) \quad u^2 / V + p = U^2 / V_0 + p_0, \quad u / V = -U / V_0$$

Чаще пользуются другой записью этих равенств

$$(2.3) \quad U^2 = V_0^2 \frac{p - p_0}{V_0 - V}, \quad u^2 = V^2 \frac{p - p_0}{V_0 - V}$$

Уравнение для приращения внутренней энергии среды (1.6) с учетом выражений (2.2) сводится к следующему соотношению:

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^n x_i (\varepsilon_i - \varepsilon_{i0}) = 1/2 (p + p_0) (V_0 - V)$$

которое, используя равенство (2.1), можно также записать в виде

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^n x_i \{ \varepsilon_i - \varepsilon_{i0} - 1/2 (p + p_0) (v_{i0} - V) \} = 0$$

Учитывая равенства (2.2), соотношение (1.9) можно заменить выражением

$$(2.6) \quad \varepsilon_i - \varepsilon_{i0} = 1/2 (p + p_0) (V_0 - V) + p (V - v_i) - p_0 (V_0 - v_{i0})$$

Для двухфазной среды (2.1) — (2.6) переходят в формулы, приведенные в работе [1].

Изменение внутренней энергии  $i$ -й фазы при ударном переходе можно записать в виде суммы приращений упругой энергии  $\varepsilon_x$  и тепловой энергии [9]

$$(2.7) \quad \varepsilon_i - \varepsilon_{i0} = \varepsilon_x(v_i) + v_i(p - p_x(v_i)) / \gamma(v_i)$$

где  $p_x(v_i)$  — холодное давление  $i$ -й фазы,  $\gamma(v_i)$  — параметр Грюнайзена. Исключая из системы (2.6), (2.7)  $\varepsilon_i - \varepsilon_{i0}$ , получим уравнение адиабаты Гюгонио в виде

$$(2.8) \quad p = \frac{(h-1)p_x(v_i) - 2\varepsilon_x(v_i)/v_i}{h+1 - (V+V_0)/v_i}$$

где  $h = 1 + 2/\gamma(v_i)$ , а  $p_0$  опущено, так как  $p_0 \ll p$ .

При  $V = v_i$  и  $v_0 = v_{i0}$  формула (2.8) переходит в уравнение адиабаты сплошного вещества  $i$ -й фазы, которое приведено в [9]

$$(2.9) \quad p = \frac{(h-1)p_x(v_i) - 2\varepsilon_x(v_i)/v_i}{h - v_{i0}/v_i}$$

Если формально распространить соотношение (2.8) на ударные волны большой амплитуды, получим условие для предельного сжатия многофазной среды:  $(V_0 + v) / V_i < h + 1$ .

Зная давление и удельный объем смеси, по уравнению (2.8) можно найти удельный объем  $i$ -й фазы и построить, следовательно, ударную адиабату этой фазы.

Аналогично решается обратная задача о построении ударной адиабаты смеси по известным уравнениям состояния фаз. Для этого составляется система из  $n + 1$  алгебраических уравнений вида

$$(2.10) \quad V = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad p = p(V, v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где  $p(V, v_i)$  — правая часть соотношения (2.8). При заданном давлении эта система становится замкнутой. Решив ее, можно найти удельный объем смеси и построить, таким образом, ударную адиабату смеси.

**3. Расчетные приближения.** В приведенных ниже расчетах гетерогенных смесей будут использованы уравнения состояния следующие веществ: меди, цинка, свинца, вольфрама, алюминия и эпоксидной смолы. Упругие составляющие давления для металлов, за исключением алюминия, брались в виде (см., например, [10])

$$(3.1) \quad p_x(v_i) = p_H - \gamma(v_i)(\varepsilon_H - \varepsilon_x(v_i))/v_i \\ p_H = a^2(v_{i0} - v_i) / [v_{i0} - b(v_{i0} - v_i)]^2, \quad \varepsilon_H = 1/2 p_H(v_{i0} - v_i)$$

где  $a$  и  $b$  являются коэффициентами, определяющими линейную зависимость скорости ударной волны в сплошном веществе  $i$ -й фазы от массовой скорости ( $U = a + bw$ ). Численные значения этих коэффициентов указаны в табл. 1. Выражение для упругого давления алюминия и эпоксидной смолы было взято в форме [16]

$$(3.2) \quad p_x(v_i) = C\mu_i + D\mu_i^2 + S\mu_i^3 \quad (\mu_i = v_{i0}/v_i - 1)$$

где значения коэффициентов  $C$ ,  $D$  и  $S$  даны в табл. 2. Удельная энергия холодного сжатия для всех веществ вычислялась по формуле

$$(3.3) \quad \varepsilon_x(v_i) = - \int_{v_{i0}}^{v_i} p_x(v) dv$$

Таблица 1

Материал	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$a$ , км/сек	$b$	$\gamma_0$	Литература
Cu	8.90	3.958	1.497	2.00	[11]
Zn	7.14	3.050	1.559	2.45	[11]
Pb	11.34	2.028	1.517	2.77	[11]
W	19.35	4.000	1.285	1.54	[7,11]

Таблица 2

Материал	$C$ , Мбар	$D$ , Мбар	$S$ , Мбар	$\gamma_0$	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>
Al	0.761888	0.778860	-1.19871	2.13	2.785
Эпоксидная смола	0.098842	0.059183	0.16653	0.79	1.190

Функция  $\gamma(v_i)$  считалась пропорциональной  $v_i$ , т. е.

$$(3.4) \quad \gamma(v_i) = \gamma_0 v_i / v_{i0}$$

где  $\gamma_0$  — коэффициент Грюнайзена при нормальных условиях, приведенный в табл. 1 и 2. Приближения (3.1), (3.3) и (3.4) использовались в работе [10] при расчете ударных адиабат пористого алюминия.

Оценка точности формул (3.1)—(3.4) и констант, входящих в них, производилась путем сравнения результатов расчета адиабат металлов по формуле (2.9) с экспериментальными данными работы [11], а также с адиабатами, вычисленными по более сложной методике, изложенной в [12]. Оба расчета и экспериментальные цифры для всех металлов практически совпали между собой. Ввиду отсутствия опубликованных экспериментальных данных по ударной адиабате эпоксидной смолы аналогичная проверка для этого вещества не производилась.

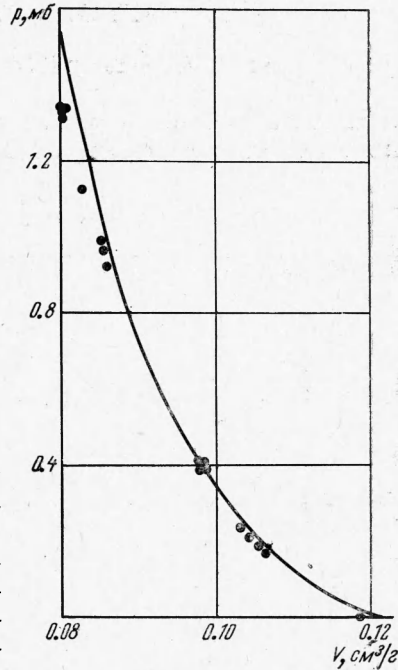
4. Ударная адиабата трехфазной смеси. По описанной выше методике определялась ударная адиабата вещества, состоящего из трех фаз. В качестве такого материала была взята латунь, которая, как известно, состоит из меди, цинка и свинца с весовым содержанием фаз соответственно 61.5, 36 и 2.5% [13]. Записав систему уравнений (2.10) для  $n = 3$  и подставив в нее значения функций  $p_x(v_i)$ ,  $\epsilon_x(v_i)$  и  $\gamma(v_i)$  из формул (3.1), (3.3) и (3.4), получим алгебраическую систему нелинейных уравнений с неизвестными  $v_i$  и  $V$ . Эта система решалась на ЭВМ методом скорейшего спуска (градиента). За начальное приближение принималось значение параметров  $v_i$ , соответствующее нормальным условиям. Счет заканчивался, когда разность значений  $v_i$  в двух последовательных итерациях была меньше  $0.0001 \text{ см}^3/\text{г}$ .

Вычисленная ударная адиабата латуни (сплошная кривая) вместе с экспериментальными данными работы [13] представлена на фиг. 1, из которой видно хорошее совпадение опытных и расчетных величин. Так как латунь образует частично упорядоченную структуру CuZn, то при нулевом давлении наблюдаемая плотность ( $8.41 \text{ г/см}^3$ ) больше заданной по правилу смесей ( $8.22 \text{ г/см}^3$ ) [13]. Простое смещение предсказанной кривой Гюгонио в точку наблюдаемой начальной плотности приведет к улучшению согласия с экспериментом для всех плотностей.

5. Двухфазные смеси. На примере парафино-вольфрамовой смеси покажем, как по известной из эксперимента смесевой ударной адиабате [7]

и известному уравнению состояния одной из фаз находятся ударные адиабаты этих фаз. Для этого достаточно найти удельный объем одной фазы из уравнения (2.8), так как для другой фазы он определяется из формулы (2.1). В расчетах для рассматриваемой смеси использовались предварительно проверенные параметры вольфрама.

В табл. 3 и на фиг. 2 и 3 представлены вычисленные ударные адиабаты вольфрама (кривые 2) и парафина (кривые 4) вместе с экспериментальными данными работы [7] (точки 1) для парафино-вольфрамовой смеси, содержащей соответственно 66.2% ( $x_1 = 0.662$ ) и 84% ( $x_1 = 0.84$ ) вольфрама по весу (кривые 3). Из этих фигур видно, что ударные адиабаты для фаз вольфрама и парафина отклонились от ударных адиабат сплошного вещества этих фаз (кривые 1 и 5 соответственно для вольфрама и парафина). Экспериментальные точки 2 на фиг. 2 и 3 взяты из работы [11]. Тяжелая фаза (вольфрам) в смеси с легкой, как и в случае пористых металлов [9], расширяется, что приводит к аномальному наклону ударной адиабаты. Подобное поведение смеси при ударном переходе, по видимому, можно объяснить, если рассматривать смесь в виде пористого материала, например, из тяжелой фазы с порами, заполненными легкой фазой. Хотя за фронтом волны происходит общее сжатие смеси, тяжелая фаза может входить в поры и за счет этого даст фактически расширение этой фазы и дополнительное сжатие легкой.



Фиг. 1

Таблица 3

$x_1$	$V$ , см <sup>3</sup> /г	$p$ , Мбар	$v_W$ , см <sup>3</sup> /г	$v_n$ , см <sup>3</sup> /г	$\epsilon \cdot 10^{-10}$ , эрг/г	$\epsilon_W \cdot 10^{-10}$ , эрг/г	$\epsilon_n \cdot 10^{-10}$ , эрг/г
0.662	0.252	0.231	0.129	0.494	1.826	4.680	-3.762
	0.221	0.500	0.195	0.272	4.728	6.025	2.187
	0.217	0.574	0.204	0.243	5.543	6.306	4.049
	0.165	1.495	0.224	0.049	18.327	9.486	35.643
0.840	0.140	0.310	0.072	0.495	1.265	3.368	-9.77
	0.119	0.656	0.089	0.276	3.365	5.334	-6.97
	0.115	0.816	0.094	0.223	4.349	6.041	-4.53
	0.090	2.200	0.106	0.007	14.481	11.007	32.71

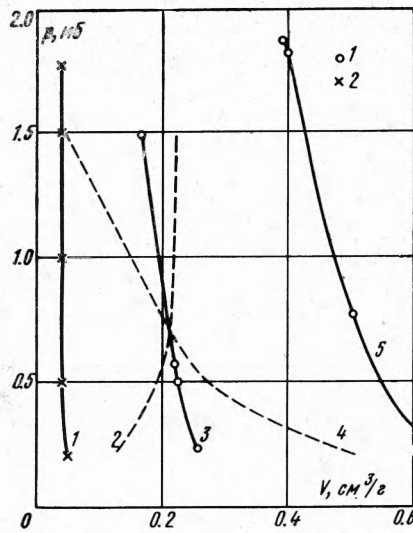
При исследовании ударных переходов в парафино-вольфрамовой смеси в работе [7] было показано, что по известным адиабатам Гюгонио вольфрама и смеси можно, применяя аддитивное приближение, определить адиабату парафина. На основании этого факта в [7] был сделан вывод о том, что смешевые ударные адиабаты удовлетворяют принципу аддитивности. Проведенный расчет показывает, что измеренную экспериментально адиабату смеси можно представить как сумму смещенных ударных адиабат отдельных фаз.

Сравним расчеты ударной адиабаты смеси, выполненные по методике, применяемой в данной работе, и по аддитивному приближению [4,7], которое для бинарной смеси характеризуется соотношениями

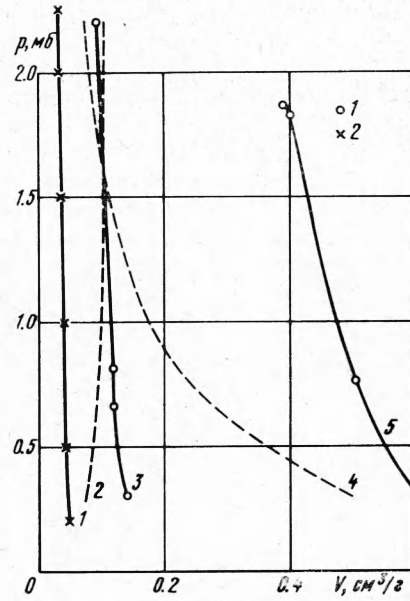
$$V(p) = x_1 v_1(p) + x_2 v_2(p)$$

$$\varepsilon_1 = 1/2 p (v_{10} - v_1), \quad \varepsilon_2 = 1/2 p (v_{20} - v_2)$$

Чтобы эта система стала замкнутой, к ней необходимо добавить уравнения состояния отдельных фаз. В качестве примера был сделан расчет удар-



Фиг. 2



Фиг. 3

ной адиабаты смеси, состоящей из алюминия и эпоксидной смолы [16]. Отсутствие надежных данных об уравнении состояния парафина не позволило провести аналогичный расчет для парафино-вольфрамовой смеси. Результаты вычислений по схемам [1] и [7] вместе с экспериментальными данными [16] помещены в табл. 4, из которой видно, что оба расчета близки к экспериментальным цифрам.

Таблица 4

Объем Al, %	p, Мбар	Эксперимент			Аддитивный расчет	Расчет по [1]			
		v, км/сек	U, км/сек	V, см³/г	V, см³/г	V, см³/г	$\varepsilon \cdot 10^{-10}$ , эрг/г	$\varepsilon_{Al} \cdot 10^{-10}$ , эрг/г	$\varepsilon_0 \cdot 10^{-10}$ , эрг/г
25	0.242	2.28	6.63	0.41	0.407	0.406	2.70	0.048	4.82
40	0.281	2.21	6.97	0.374	0.367	0.368	2.52	0.415	5.81
60	0.328	2.23	7.25	0.330	0.330	0.328	2.32	0.965	7.07

Таким образом, выполненные расчеты не позволяют категорически судить о справедливости принципа аддитивности [4,7]. В работе [14] его применение для процесса детонации в смеси взрывчатое вещество — вольфрам привело к принципиальным трудностям. При переходе к пористым

материалам (одна из фаз — пустота или газ) принцип аддитивности заведомо не выполняется, тогда как нахождение полуэмпирических уравнений состояния конденсированных сред вне адиабат Гюгонио для монолита основано на этом принципе.

Расчет по формуле (2.6) приводит к отрицательным приращениям удельной внутренней энергии легкой фазы  $\epsilon_n$  при некоторых давлениях для парафино-вольфрамовой смеси (см. табл. 3). Это было оценено в работе [7] как парадоксальный результат (при расчетах остальных смесей это приращение всегда положительно (см. табл. 4)). Такое распределение внутренней энергии между фазами может быть связано либо с тем, что за экспериментально измеряемым фронтом ударной волны одновременно могут не выполняться условия механического равновесия и термически замороженного состояния, либо с известной недостаточностью линейной аппроксимации зависимости между массовой скоростью и скоростью ударной волны [15].

Автор благодарит В. Н. Николаевского за предложенные темы работы и полезные обсуждения.

Поступила 16 I 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ. ПМТФ, 1969, № 3.
2. Butkovich T. R. The influence of water in rocks on effects of underground nuclear explosions. J. Geophys. Res., 1971, vol. 76, No. 8.
3. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
4. Дремин А. Н., Карпухин И. А. Метод определения ударных адиабат для дисперсных веществ. ПМТФ, 1960, № 3.
5. Tsou F. K., Chou P. C. Analytical study of hughoniot in unidirectional fiber reinforced composites. J. Compos. Mater., 1969, vol. 3.
6. Torvic P. J. Shock propagation in a composite material. J. Compos. Mater., 1970, vol. 4.
7. Алексева Ю. Ф., Алтшулер Л. В., Грушников В. П. Ударное сжатие двухкомпонентных парафино-вольфрамовых смесей. ПМТФ, 1971, № 4.
8. Duvall G. E., Taylor S. M., Jr. Shock parameters in two component mixture. J. Compos. Mater., 1971, vol. 5.
9. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
10. Херман В. Определяющее уравнение для динамического сжатия пластических пористых материалов. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1970, № 5.
11. McQueen R. G., March S. P. Equation of state for nineteen metallic elements from shock wave measurements to two megabars. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 7.
12. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. М., «Наука», 1968.
13. Скидмор И. Ударные волны в твердых телах. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 4.
14. Алтшулер Л. В., Рязанов В. Т., Сперанская М. П. Влияние тяжелых примесей на режимы детонации конденсированных ВВ. ПМТФ, 1972, № 1.
15. High-velocity impact phenomena. London, Acad. Press., 1970.
16. Holmes V. S., Tsou F. K. Steady shock waves in composite materials. J. Appl. Phys., 1972, vol. 43, No. 3.