

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ОТ ЦИЛИНДРА В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ РИЧАРДСОНА

В. И. Букреев

(Новосибирск)

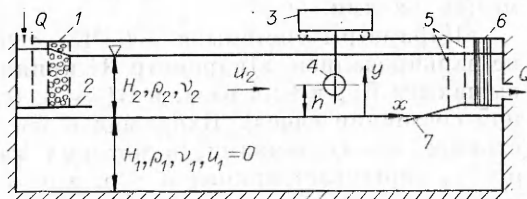
Рассматривается динамическая система, состоящая из двух жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2 < \rho_1$ , движущихся плоскопараллельно над горизонтальным дном с постоянными скоростями  $u_1$  и  $u_2$  и глубинами  $H_1$  и  $H_2$  (индекс 1 относится к нижнему, 2 — к верхнему слою). В зоне контакта жидкостей имеется прослойка с характерной толщиной  $\delta \ll H_1, H_2$ , в которой плотность и скорость плавно меняются от одного постоянного значения к другому. По критерию [1]

$$Ri = \varepsilon g \delta / (u_2 - u_1)^2 > Ri_*, \quad \varepsilon = \rho_1 / \rho_2 - 1$$

( $g$  — ускорение силы тяжести) система считается устойчивой. Экспериментально выясняется вопрос о том, могут ли в ней потерять устойчивость волны, генерируемые поступательно движущимся цилиндром. Для дальнейшего можно принять  $Ri_* = 0,25$ , поскольку уточнения этой величины [1] при использовавшихся в опытах значениях  $Ri$  незначительны.

В настоящее время имеется большое число теоретических работ (достаточно полную информацию о них можно найти в [1—5]), предсказывающих возможность потери устойчивости по иным причинам, чем та, что нашла отражение в упомянутом критерии. Даже малые возмущения, описываемые линейной теорией, могут, например, потерять устойчивость из-за существования в системе волн отрицательной энергии [5]. Возможность потери устойчивости под воздействием возмущений конечной амплитуды значительно увеличивается [2]. Из ранее выполненных экспериментальных исследований устойчивости сдвиговых течений стратифицированной жидкости можно отметить [2, 4, 6], как наиболее близкие к данной работе.

Опыты проводились на установке, схема которой приведена на рис. 1. Она представляла собой канал длиной 5 м, шириной 0,2 м и высотой 0,6 м с горизонтальным дном и стенками из оргстекла. В канал заливался сначала раствор глицерина в воде с плотностью  $\rho_1 = 1,013 \text{ г/см}^3$  и вязкостью  $\nu_1 = 0,0118 \text{ см}^2/\text{с}$ . Затем через поролоновые фильтры, плавающие на поверхности, медленно заливалась дистиллированная вода с  $\rho_2 = 1 \text{ г/см}^3$  и  $\nu_2 = 0,0105 \text{ см}^2/\text{с}$ . Далее верхний

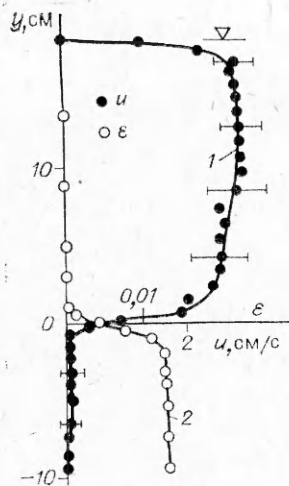


Р и с. 1

слой приводился в движение пропеллерным насосом со скоростью  $u_2$ . Скорость нижнего слоя с хорошей точностью можно было считать равной нулю (см. рис. 2).

Для выравнивания потока на входе в рабочую часть канала использовались перфорированная труба, фильтр из гравия 1 и горизонтальная пластина 2, расположенная немного выше границы раздела. На выходе из канала устанавливались отогнутая вниз пластина 7, две сетки 5 и цилиндрический обтекатель 6. Все это обеспечивало однородность течения в продольном направлении с вариацией  $u_2$  не более 5% на 1 м длины и такой уровень неконтролируемых возмущений, при котором визуально различимые волны на границе раздела появлялись лишь при  $Ri < 0,8$  (ср. [6]).

Профиль скорости  $u(y)$  в показанной на рис. 1 системе координат определялся по траекториям частиц размером около 1 мм, изготовленных



Р и с. 2

из смеси канифоли и парафина. Траектории частиц регистрировались кинокамерой, скорость вычислялась по приращению координаты  $\Delta x$  за известное время  $\Delta t$ . Вводилась поправка на оптические искажения при съемке. Используемый далее профиль скорости приведен на рис. 2. Каждая экспериментальная точка получена осреднением по десяти частицам, горизонтальными отрезками указаны интервалы, в которых располагались результаты отдельно взятого измерения. Ордината свободной поверхности помечена треугольником. Плотность определялась взвешиванием образцов, взятых из рассматриваемой точки с помощью медицинской иглы с диаметром отверстия 0,2 мм. Используемый далее профиль плотности приведен на рис. 2 (линия 2).

Цилиндр 4 диаметром  $D = 2$  см с помощью тележки 3 двигался перпендикулярно своей оси по траектории  $y = h = \text{const}$  со скоростью

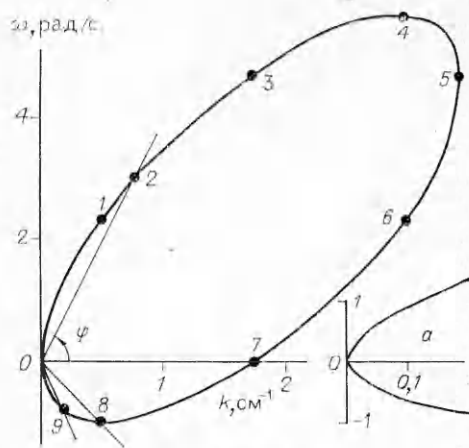
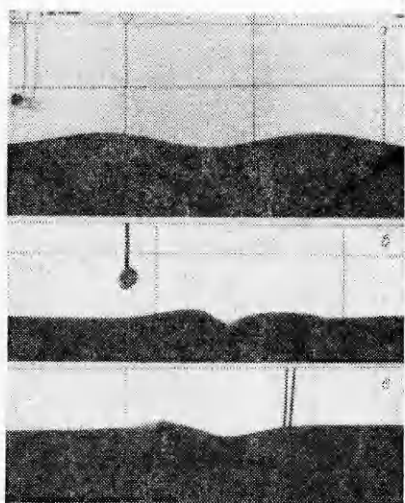
$$U = \begin{cases} U_0 [1 - \exp(-t/\tau_1)] & \text{при } 0 < t < T, \\ U_0 \exp(-t/\tau_2) & \text{при } t \geq T, \end{cases}$$

где  $t$  — время;  $U_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $T$  — постоянные величины. При этом  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  имели порядок 0,2 с, а  $T$  варьировалось в пределах 15—150 с, так что почти всю свою траекторию цилиндр проходил в режиме равномерного движения.

В опытах изучалось поведение той поверхности равной плотности  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $\rho_2 < \rho_0 < \rho_1$ , которая при фотосъемке с подкрашиванием нижнего слоя чернилами выглядела на фотоснимках как резкая граница между светлым и темным изображением. В невозмущенном состоянии положение этой поверхности соответствует на рис. 2 значению  $y = 0$ . И основное течение, и генерируемые цилиндром волны считались устойчивыми, если указанная граница при визуальном наблюдении и на фотоснимках оставалась гладкой. Признаком потери устойчивости служило либо хотя бы частичное обрушение волн, либо перемешивание жидкости между слоями.

Параметры системы  $\epsilon = 0,013$ ,  $\delta/H_1 = 0,08$  и  $\delta/H_2 = 0,1$  в опытах не варьировались, а параметр  $Ri$  принимал два значения:  $Ri = 3,1$ , превышавшее  $Ri_*$  в 12,4 раза, и  $Ri \rightarrow \infty$  (случай покоящихся в невозмущенном состоянии слоев). Входящая в эти параметры  $\delta$  определена как расстояние между точками, в которых касательная к профилю  $\rho(y)$  при  $\rho = \rho_0$  пересекает прямые  $\rho = \rho_1$  и  $\rho = \rho_2$ . Наиболее существенные параметры возмущения менялись в диапазонах  $2 \leq |h/D| \leq 6$ ,  $0 \leq Fr = (2 + \epsilon)U_0^2/\epsilon g R \leq 81$ ,  $400 \leq Re = U_\infty D/\nu_2 \leq 4000$ . В них  $R = D^2/2$ ,  $U_\infty = |U_0|$  при движении цилиндра в нижнем слое и  $U_\infty = |U_0 \pm u_2|$  — в верхнем. Важное значение в сдвиговом потоке имеет также знак параметра  $u_2/U_0$ ; в определенных условиях при одной только смене знака этого параметра устойчивые волны меняются на неустойчивые.

Движущийся цилиндр вносит возмущения двух типов. С одной стороны, при его обтекании частицы жидкости приобретают вертикальные ускорения, что приводит в стратифицированной среде к возникновению регулярных внутренних волн. С другой — за цилиндром образуется гидродинамический след, который при рассмотренных в опытах значениях  $Re$  был в целом турбулентным, хотя в нем и существовали сильно выраженные упорядоченные (когерентные) структуры. При достижении границы раздела след может вызвать перемешивание жидкости между слоями. В данных опытах такая картина наблюдалась, например, при  $Ri \rightarrow \infty$ ,  $h/D = 4$ ,  $Fr = 81$  на расстояниях от цилиндра, превышающих двести



Р и с. 4

Р и с. 3

его диаметров. Косвенно след вносит вклад и в возмущения волнового типа, усиливая их [7].

Раздельное изучение реакции системы на возмущения двух указанных типов оказывается возможным благодаря тому, что существуют области значений  $Ri$ ,  $h/D$  и  $Fr$ , где преобладает либо одно, либо другое из них. Так, при рассмотренных  $Ri$  и  $h/D$  непосредственное влияние следа сказывалось лишь при  $Fr > 50$ , тогда как возбуждаемые самим цилиндром знакопеременные волны в зоне выхода следа на границу раздела при  $Fr > 20$  становились пренебрежимо малыми. Далее более подробно обсуждаются результаты тех опытов, в которых преобладали возмущения волнового типа.

В покоящейся жидкости ( $Ri \rightarrow \infty$ ) волны от цилиндра устойчивы во всем диапазоне параметров. При этом наибольшее значение параметра  $\beta = 2\pi a/\lambda$ , характеризующего по [2] крутизну волн, достигало 0,3 ( $a$  — амплитуда,  $\lambda$  — длина волны). Расчеты на основе нелинейной математической модели [2] подтверждают возможность существования в покоящейся жидкости устойчивых волн столь значительной крутизны.

В сдвиговом потоке с  $Ri = 3,1$  возмущения волнового типа устойчивы при всех  $Fr$ , если  $|h/D| > 5$ . В диапазоне  $2 \leq |h/D| \leq 4$  наблюдались как устойчивые, так и неустойчивые волны. Пример устойчивой волны, образующейся при  $h/D = 3$ ,  $Fr = 3,37$ ,  $U_0 = -4,62$  см/с, приведен на рис. 3, а ( $\beta = 0,19$ ), треугольником помечена свободная поверхность, расстояние между делениями координатной сетки 20 см по горизонтали и 10 см по вертикали.

Неустойчивые возмущения волнового типа, наблюдавшиеся при  $Ri = 3,1$ ,  $h/D = 2$ ,  $Fr = 0,7$ ,  $U_0 = -2,11$  см/с, показаны на рис. 3, б. В этом режиме во впадинах волн образуются интенсивные вихри, поглощающие почти всю энергию возмущения. При увеличении  $h/D$  относительная доля энергии возмущения, переходящей в регулярные волны, непрерывно увеличивается, так что при  $h/D > 5$  волны становятся устойчивыми.

На рис. 3, в приведен еще один пример неустойчивости возмущений волнового типа, наблюдавшейся при движении цилиндра в нижнем слое в направлении  $u_2$  ( $Ri = 3,1$ ,  $h/D = -3$ ,  $Fr = 2,43$ ,  $U_0 = 3,92$  см/с). В этом режиме обрушение волны происходило на ее заднем фронте.

Правомерен вопрос о том, не связана ли неустойчивость возмущений волнового типа с какими-либо особенностями оператора рассматриваемой системы, в частности ее линейного оператора. Важная характеристика линейного оператора — дисперсионное соотношение  $\omega(k)$  ( $\omega$  — круговая частота,  $k$  — волновое число). Для сдвигового течения, несколько

отличающегося от рассмотренного профилем скорости, анализ дисперсионного соотношения выполнен в [5]. Дисперсионное соотношение для первой медленной моды в изучавшейся системе приведено на рис. 4. Оно справедливо для невязких жидкостей. Поправка на влияние вязкости может быть введена по формулам из [8]. Анализ показал, что эта поправка существенна при больших  $k$ , а для реализованных режимов она не превышала 5%. Фрагмент *a* на рис. 4 содержит область малых значений  $k$  в более крупном масштабе. В этой области сказывается влияние того, что слои в опытах имели конечную глубину.

На приведенной дисперсионной кривой имеется ряд характерных точек. В точке  $0$  (начало координат) фазовая скорость  $c = \omega/k$  равна групповой скорости  $c_* = d\omega/dk$  и предельной скорости распространения бесконечно малых синусоидальных волн в системе с конечной глубиной слоев, а при наличии сдвига скорости принимает два значения  $c_m^+$  и  $c_m^-$  (в опытах  $c_m^+ = 13,9$  см/с,  $c_m^- = -10,7$  см/с). Со скоростью, превышающей предельную, в рассматриваемой системе могут распространяться лишь кноидальные, уединенные, прерывные волны и плавные боры, которые линейная теория не описывает.

В точке 5 групповая скорость обращается в бесконечность и теряется устойчивость по механизму Кельвина — Гельмгольца. На дуге дисперсионной кривой 3—5—7 фазовая скорость лежит между  $u_1$  и  $u_2$ . Для возмущений с фазовыми скоростями из этого диапазона в размытой зоне существуют критические слои, через которые малые возмущения практически не проходят.

Для дальнейшего особый интерес представляют пары точек 4, 8 и 1, 6, в которых групповая скорость равна  $u_1$  (в выбранной системе координат — нулю) и  $u_2$  соответственно. Интересно отметить определенную симметрию в расположении восьми отмеченных точек. Если исключить из рассмотрения точки, отвечающие указанным особенностям в групповой скорости, то эта симметрия нарушается.

Чтобы судить о том, какие именно стационарные волны возбуждаются в системе заданным возмущением, нужно построить в области  $(\omega, k)$  характеристику этого возмущения. При поступательном движении цилиндра уравнение характеристики есть  $\omega_* = U_0 k$ . Точка ее пересечения с дисперсионной кривой на рис. 4 определяет длину, частоту, фазовую и групповую скорости возбуждаемых цилиндром волн первой медленной моды. На рис. 4 проведены три линии  $\omega_*(k)$ , соответствующие иллюстрациям на рис. 3.

Линия 08 проходит точно через особую точку 8 дисперсионной кривой, и наблюдается интенсивный процесс потери устойчивости, иллюстрируемый рис. 3, б. Линия 02 пересекает дисперсионную кривую на участке между особыми точками 1 и 4 вблизи точки 1. В этом случае тоже имеет место неустойчивость, иллюстрируемая рис. 3, в. Линия 09 пересекает дисперсионную кривую вне интервалов, в которых  $c$  или  $c_*$  лежат между  $u_1$  и  $u_2$ , и генерируемые цилиндром волны устойчивы даже при больших  $\beta$  (рис. 3, а).

Таким образом, в сдвиговом потоке волны от цилиндра могут обрушиваться даже в том случае, когда основное течение устойчиво по линейной теории. При этом предрасположенность к обрушению определяется не только крутизной волн, но и тем, в какой области параметров, определяемых дисперсионным соотношением, происходит их возбуждение. В дополнение к известной информации об особенностях поведения волн в области, где их фазовая скорость лежит между скоростями верхнего и нижнего слоев, обращается внимание на повышенную неустойчивость волновых возмущений, вносимых цилиндром в условиях, когда их групповая скорость лежит между скоростями верхнего и нижнего слоев.

Автор благодарит А. В. Гусева и Е. Ф. Ведерникова за основной вклад в реализацию программы опытов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.— М.: Мир, 1977.
2. Thorpe S. A. On the shape and breaking of finite amplitude internal gravity waves in a shear flow // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 85, pt 1.
3. Ahmed R., Banerjee S. Finite amplitude waves in stratified two-phase flow: transition to slug flow // AIChE J. — 1985.— V. 31, N 9.
4. Кооп С. С., МсГее В. Measurements of internal gravity waves in a continuously stratified flow // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 172.— P. 453.
5. Деркач М. И., Стененко А. Г. Устойчивость сдвиговых течений в верхнем слое океана при наличии волн отрицательной энергии // Мор. гидрофиз. журн.— 1987.— № 1.
6. Andow T., Hanawa K., Toba Y. Experimental study of internal waves in a stratified shear flow // J. Oceanogr. Soc. Japan.— 1981.— V. 37.— P. 179.
7. Букреев В. И. Волны на границе раздела двух жидкостей разной плотности, генерируемые движением кругового цилиндра и симметричного крыла // ПМТФ.— 1980.— № 1.
8. Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В. Генерация внутренних волн при совместном поступательном и колебательном движении цилиндра в двухслойной жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 3.

Поступила 9/VI 1987 г.

УДК 532.593

### АДАПТАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Боровиков, М. Я. Кельберт

(Москва)

1. Рассмотрим линеаризованную систему уравнений гидродинамики стратифицированной жидкости:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \rho_0 u_t + p_x &= 0, \quad p_t - \rho_0 g w + \rho_0 c^2 (u_x + v_y + w_z) = 0, \\ \rho_0 v_t + p_y &= 0, \quad \rho_0 w_t + p_z + g\rho = 0, \\ \rho_t + w d\rho_0/dz + \rho_0 (u_x + v_y + w_z) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты скорости;  $p$  — давление;  $\rho_0 = \rho_0(z)$  — невозмущенная плотность;  $\rho$  — возмущение плотности;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $c$  — скорость звука.

При формальном предельном переходе  $c \rightarrow \infty$  (1.1) преобразуется в систему уравнений внутренних волн:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \rho_0 u_t + p_x &= 0, \quad \rho_0 v_t + p_y = 0, \\ \rho_0 w_t + p_z + g\rho &= 0, \quad u_x + v_y + w_z = 0, \quad \rho_t + w d\rho_0/dz = 0. \end{aligned}$$

Начальные данные  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\rho}$  для (1.2) нельзя задавать произвольно. Кроме условия несжимаемости

$$(1.3a) \quad \tilde{Q} = \tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z = 0$$

они должны удовлетворять уравнению

$$(1.3b) \quad \Delta \tilde{p} + g \tilde{\rho}_z - \rho_0^{-1} d\rho_0/dz (\tilde{p}_z + g \tilde{\rho}) = 0.$$

Поэтому задача Коши для (1.2) требует «согласованных» начальных данных, удовлетворяющих условиям (1.3). В то же время для исходной системы (1.1) начальные данные можно задавать произвольно. Тогда при  $c \gg 1$ , когда решение системы (1.1) близко к решению предельной системы (1.2), а начальные данные  $u^c, v^c, w^c, p^c, \rho^c$  произвольны и не удовлетворяют условиям (1.3), должен происходить процесс «адаптации» начальных данных к этим условиям. Естественно предположить, что этот переходный процесс заключается в излучении звуковых волн, происходит на временах  $\tau = L/c$  ( $L$  — характерный размер задачи) и приводит к согласованным начальным условиям  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\rho}$ , для которых поле ско-