УДК 533.6.011

ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ НА ПРЕДЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

А. Л. Брежнев

(*Саратов*)

В плоских соплах Лаваля возможны три асимптотических типа течений в окрестности центра [1]. Этот вывод был получен с использованием теоремы Брио и Буке [2] относительно поведения вблизи особой точки (образа предельной характеристики) общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения, к которому сводится изучение автомодельных трансзвуковых течений. Оказалось, что при некоторых значениях показателя автомодельности любая интегральная кривая может быть аналитически продолжена через эту особую точку, являющуюся узлом в задаче о сопловых течениях.

При рассмотрении течений в соплах с круглым поперечным сечением также полезно рассмотреть те показатели, о которых идет речь в теореме. Известно [3], что в этом случае реализуется вторая возможность альтернативы: ни одна из интегральных кривых, проходящих через узел, кроме изолированного уса, не дает аналитического продолжения. Это относится также и к усу общего направления. Другими словами, ус общего направления дает возможность аналитического продолжения при любом показателе автомодельности, за исключением тех, о которых говорится в теореме.

В [4] выполнено численное построение второго асимптотического типа течения в окрестности центра осесимметричного сопла с использованием уса общего направления. Однако в результате расчетов получился показатель $n^* = 2{,}36532$ (xr^{-n} — инвариант автомодельного решения), что близко к $n_1 = 2{,}36589$ — одному из тех, которые обсуждаются в теореме.

Заметим, что совпадение $n^* = n_1$ означает невозможность второго асимптотического типа течения в окрестности центра осесимметричного сопла. Кроме того, при n, близких к n_1, примененная в [4] методика отхода от особой точки с помощью степенного ряда является некорректной, поскольку все коэффициенты ряда, начиная с некоторого, стремятся к бесконечности при $n \to n_1$. По-видимому, в осесимметричных соплах Лаваля реализуются лишь течения со слабыми разрывами на приходящих предельных характеристиках, если показатель автомодельности n изменяется в интервале $2 < n < \infty$.

Ниже рассмотрены показатели n_1, n_2, n_3, к которым сводится теорема в случае осесимметричных сопел. Вдоль приходящей характеристики в центр сопла распространяется логарифмический разрыв в производных компонент скорости по координатам (при $n = n_1$ разрыв в третьих, при $n = n_2$ — в четвертых, при $n = n_3$ — в пятых производных). После отражения особенности от центра сопла в случае $n = n_1$ возникает слабый разрыв на уходящей предельной характеристике, в случае $n = n_2$ — предельная линия, не устранимая скачком уплотнения, в случае $n = n_3$ — ударная волна.

1. Осесимметричные течения газа в околозвуковом приближении описываются уравнением Кармана

$$-\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + (1/r)\varphi_r = 0, \tag{1.1}$$

где x, r — цилиндрические координаты; φ — потенциал возмущений однородного звукового потока. Для исследования течений в соплах Лаваля с круглым поперечным сечением рассмотрим задачу Коши: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее на оси симметрии $r = 0$ условиям

$$\varphi_x = -A_1|x|^k \ (x < 0);\ \varphi_x = A_2x^k \ (x > 0),\ A_1 > 0,\ A_2 > 0. \tag{1.2}$$

Если в потоке возникает ударная волна, то решение должно удовлетворять дополнительным условиям на фронте волны

$$\varphi_1 = \varphi_2,\ 2[dx(r)/dr]^2 = \varphi_{x1} + \varphi_{x2},$$

где индексы относятся к параметрам газа по разные стороны фронта; $x = x(r)$ — уравнение скачка.

Задача Коши (1.1), (1.2) при $1 < k < 2$ исследовалась в [4]. Ниже будет рассмотрено соответствующее решение при

$$
\begin{aligned}
&k = k_1 = (7 + 2\cdot 21^{1/2})/14 = 1{,}15465,\\
(1.3)\qquad &k = k_2 = (26 + 25\cdot 2^{1/2})/41 = 1{,}49647,\\
&k = k_3 = (7 + 91^{1/2})3/28 = 1{,}77208,
\end{aligned}
$$

когда на предельной характеристике C_0^-, приходящей в центр сопла, возникает логарифмическая особенность в высших производных составляющих скорости по координатам.

2. Задача Коши (1.1), (1.2) обладает автомодельным решением

$$\varphi = r^{3n-2}q(\zeta),\ \zeta = xr^{-n},\ n = 2/(2-k),$$

причем уравнение ударного фронта имеет вид $\zeta = \mathrm{const}$.

Функция $q(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(2.1)\qquad (n^2\zeta^2 - q')q'' - n\zeta(5n-4)q' + (3n-2)^2 q = 0.$$

Для построения потока во входной части сопла между полуосью $x < 0$ и характеристикой C_0^- необходимо использовать интегральную кривую уравнения (2.1) (обозначим ее S), которая в окрестности точки $\zeta = -\infty$ описывается разложением [3]

$$(2.2)\qquad q = \sum_{i=0}^{\infty} d_i |\zeta|^{(3n-2-2i)/n},\quad d_0 = nA_1/(3n-2),$$

$$d_i = (-2n + 1 + i)/(4n^3 i^2) \sum_{j=0}^{\infty} (3n - 2 - 2j)(3n - 2i + 2j)\, d_j d_{i-1-j}.$$

Разложение (2.2) определяет кривую S от точки $\zeta = -\infty$ до некоторой особой точки ζ_c, соответствующей предельной характеристике. Точка ζ_c определяется равенствами

$$n^2\zeta_c^2 - q'(\zeta_c) = 0,\quad n\zeta_c(5n-4)\,q'(\zeta_c) = (3n-2)\,q(\zeta_c)$$

и при $1 < k < 2$ $(2 < n < \infty)$ является узлом.

Общий интеграл уравнения (2.1) в окрестности ζ_c запишем в виде

$$(2.3)\qquad q = \sum_{i=0}^{E} a_i\zeta_c^{3-i}\Delta^i + a_\mu\zeta_c^{3-\mu}\Delta^\mu + \ldots,\ \Delta = \zeta - \zeta_c,$$

$$\mu = (14n-8)/(7n-4-R),\quad R = (25n^2 - 56n + 32)^{1/2},$$

где μ — показатель степени первого члена нерегулярной части; E — наибольшее целое число, не превосходящее μ; a_μ — произвольная постоянная; коэффициенты $a_i (0 \leqslant i \leqslant E)$ имеют вид $(\mu \neq 4,\ 5,\ 6)$

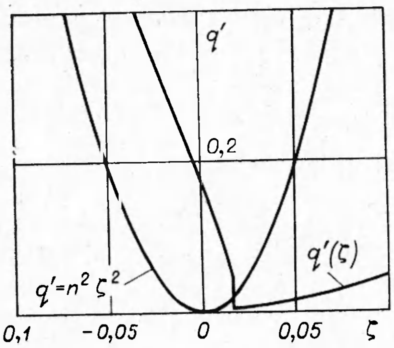
$$(2.4)\qquad a_0 = n^3(5n-4)(3n-2)^{-2},\quad a_1 = n^2,\quad a_2 = (4 - 3n + R)\,n/4,$$

$$a_i = A_i/B_i,\quad A_i = -a_{i-1}[n(i-4)+2]^2 + (i/2)\sum_{j=3}^{i-1} j(i+2-j)\,a_j a_{i+2-j},$$

$$B_i = (ni/2)(7n-4-R)(i-\mu),\ 3 \leqslant i \leqslant E.$$

Если k принимает значения (1.3), то величины n, μ соответственно равны

$$
\begin{aligned}
n &= n_1 = (21 + 2\cdot 21^{1/2})/51,\quad \mu = 4,\\
n &= n_2 = (56 + 25\cdot 2^{1/2})/23,\quad \mu = 5,\\
n &= n_3 = (35 + 3\cdot 91^{1/2})4/29,\quad \mu = 6.
\end{aligned}
$$



Тогда коэффициенты a_4, a_5, a_6 соответственно обращаются в бесконечность, поэтому в разложение (2.3) должны быть включены логарифмические члены

$$q = \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i \zeta_c^{3-i}\Delta^i + \sum_{i=0}^{1}(b_{\mu+i}\ln|\Delta| + a_{\mu+i}) \times$$

$$\times\ \zeta_c^{3-\mu-i}\Delta^{\mu+i} + O\left[\Delta^{\mu+2}(\ln|\Delta|)^2\right], \tag{2.5}$$

$$\mu = 4,\ 5,\ 6,$$

где $a_i (0 \leqslant i \leqslant \mu - 1)$ определяются формулами (2.4); a_μ — произвольная постоянная; остальные коэффициенты имеют вид

$$b_\mu = A_\mu/(7n^2 - 4n),\ b_{\mu+1} = \{-b_\mu(n\mu - 3n + 2)^2 + 3\mu(\mu + 1)a_3 b_\mu\}/B_{\mu+1},\ a_{\mu+1} = \{A_{\mu+1} - b_\mu[4n + 2n^2(\mu - 3) - 3(2\mu + 1)a_3] - nb_{\mu+1}(14n - 8 - R)\}/B_{\mu+1}.$$

При $\zeta \to \zeta_c - 0$ кривая S описывается разложением (2.5), где a_μ — конкретное число, заранее не известное ($\mu = 4,\ 5,\ 6$). Для определения этого числа уравнение (2.1) было проинтегрировано от точки $\zeta = -\infty$ с начальными данными (2.2) до точки $\zeta = \zeta_c$. Расчеты, проведенные на ЭВМ М220М, показывают, что кривой S отвечают значения

$$\mu = 4,\ a_\mu = 2{,}73;\ \mu = 5,\ a_\mu = -0{,}0298; \tag{2.6}$$
$$\mu = 6,\ a_\mu = -0{,}00811.$$

3. При $\zeta > \zeta_c$ обозначим через S интегральную кривую уравнения (2.1), которая при $\zeta \to \zeta_c + 0$ определяется разложением (2.5) со значением коэффициента a_μ, даваемым в (2.6). Для продолжения течения за характеристику C_0^- будем использовать кривую S.

До предельной характеристики C_0^- во всех трех случаях (1.3) поток разгоняется, переходя через скорость звука, затем притормаживается, оставаясь сверхзвуковым. За предельной характеристикой поведение потоков различное.

При $k = 1{,}15465$ поток сначала продолжает тормозиться, а затем ускоряется, причем $A_2 = 0{,}532A_1$. Поведение функции $q'(\zeta)$, характеризующей изменение продольной компоненты скорости вдоль прямой $r = \text{const}$, близко к изображенному на фиг. 43 работы [3]. При расчетах полагалось $A_1 = 2{,}15465$.

При $k = 1{,}49647$ в течении возникает предельная линия, которую невозможно устранить введением скачка уплотнения. При $k = 1{,}77208$ в центре сопла зарождается ударная волна, сносимая затем вниз по потоку. Заметим, что $A_2 = 0{,}0867A_1$. График функции q' изображен на фигуре. В расчетах полагалось $A_1 = 8{,}31623$. Уравнение скачка $\zeta = 0{,}0177$.

Если продолжить поток за предельную характеристику C_0^-, используя произвольную интегральную кривую, отличную от S, то во всех трех случаях (1.3) можно получить как непрерывные течения, так и с ударными волнами, существование которых было указано в [4].

Автор выражает благодарность И. А. Чернову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С.** Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лаваля.— ДАН СССР, 1964, т. 154, № 2.
2. **Гурса Э.** Курс математического анализа. Т. 2. ГТТИ, 1933.

3. **Рыжов О. С.** Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М., изд. ВЦ АН СССР, 1965.
4. **Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С.** О переходе через скорость звука в соплах Лаваля с круглым поперечным сечением.— ДАН СССР, 1964, т. 158, № 3.

УДК 532.526

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГАЗОВОЙ ЗАВЕСЫ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ НА НЕРАСЧЕТНЫХ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ

Э. П. Волчков, В. К. Козьменко, В. П. Лебедев

(*Новосибирск*)

Известно, что в сверхзвуковой части сопла Лаваля на режимах перерасширения процессы теплопередачи имеют особенности, вызванные взаимодействием скачков уплотнения с пограничным слоем [1]. В этих условиях при организации защиты стенок с помощью газовой завесы от воздействия высокотемпературного потока необходимо учитывать как тепловые параметры, так и динамические характеристики режима течения. Опытные данные на плоской пластине [2] показывают, что падающие извне скачки существенно снижают эффективность завесного охлаждения.

В данной работе приводятся экспериментальные данные по эффективности газовой завесы в сверхзвуковых конических соплах, работающих на режимах перерасширения. Завеса образуется вдувом воздуха через кольцевую щель, расположенную на входе в сопло. Экспериментальные результаты сравниваются с опытными данными, полученными в этих же соплах при расчетных режимах течения.

Описание экспериментальной установки, измерительной аппаратуры и методов измерений приведено в работе [3]. Рабочие участки — сменные сверхзвуковые конические сопла — выполнены из текстолита. В опытах использовались сопла 30 —6° ($\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 6°$— полууглы дозвуковой и сверхзвуковой конических частей соответственно) и 30 — 15°. Сопла имели одинаковые диаметры входа ($D_+ = 80$ мм) и критического сечения ($D_* = 20$ мм). Контур сопла во входной части и в области горла выполнен в виде дуг окружностей с радиусами, составляющими 0,7 и 1,5 от радиусов соответствующих поперечных сечений. Диаметр на выходе для сопла 30—6° равен 50 мм, а для сопла 30 — 15°— 90 мм.

Для измерения температуры стенки вдоль одной образующей сопла заподлицо с внутренней поверхностью установлены нихром-константановые термопары, изготовленные из проволоки диаметром 0,2 мм. В тех же сечениях, где расположены термопары, на различных образующих сопла, просверлены отверстия диаметром 0,4 мм для измерения статического давления.

В проведенных экспериментах воздух основного потока имел температуру торможения в форкамере $T_0 \approx 300$ К, близкую к температуре окружающей среды. Вдуваемый воздух нагревался в среднем до $T_s \approx 360$ К. Скорость основного потока на входе в сопло равна 14—15 м/с. Параметр вдува $m = \rho_s w_s / \rho_0 w_0 = 0{,}1—0{,}7$. Здесь ρ_0, w_0 и ρ_s, w_s — плотность и скорость основного и вторичного потоков в сечении среза щели. Опыты проведены при давлении торможения основного потока в форкамере $p_0 =$ $= 2—8$ кг/см^2. При этом режимы перерасширения наблюдались в сопле 30 —6° при $p_0 < 5$ кг/см^2, а в сопле 30 —15°— во всем исследованном диапазоне давлений.

Известно, что на режимах перерасширения в сверхзвуковой части сопла образуются скачки уплотнения. При малых перепадах давления