

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. П. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостоптехиздат, 1948.
2. Ким В. Ю. К задаче определения функции давления при упругом режиме. Изв. КФАН СССР, 1959, № 13.
3. Ким В. Ю. К задаче неустановившейся фильтрации жидкости в пласте переменной мощности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностр., 1959, № 1.
4. Нумеров С. Н. О неустановившейся фильтрации в полосообразном пласте к прямолинейной цепочке скважин. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 1.

ПРИТОК К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ДРЕНЕ И НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ
В ПОЛОСООБРАЗНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ. РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНЫХ
БЕЗВОДНЫХ ДЕБИТОВ

Ю. И. Стклянин, А. П. Телков

(Москва)

Рассматривается решение задачи о притоке к точечному стоку, горизонтальной дрене и скважине в полосообразном анизотропном пласте конечных размеров; изложен метод определения предельных безводных дебитов.

§ 1. Потенциал точечного стока и несовершенной скважины. Рассмотрим приток к точечному стоку с координатами (l, ζ) , расположенному несимметрично в полосообразном горизонтальном пласте с подошвенной водой (фиг. 1). Введем обозначения: H — нефтеносная или газоносная мощность пласта, L — рассматриваемая ширина участка залежи, k и k_z — горизонтальная и вертикальная проницаемости, μ — вязкость вытесняемой жидкости, q — мощность точечного стока; ось x направим по кровле пласта, ось z — вниз. Требуется найти распределение давления p (потенциал Φ) в пласте. За исходное примем уравнение

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = q \delta(z - \zeta) \delta(x - l) \quad (1.1)$$

где $\delta(z - \zeta)$ и $\delta(x - l)$ — функции Дирака [1]. Введем потенциал Φ и характеристику анизотропии κ , согласно работы [2]. Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = q \delta(z - \zeta) \delta(x - l) \quad \left(\Phi = \frac{k}{\mu} p, \quad \kappa = \sqrt{\frac{k}{k_z}} \right) \quad (1.2)$$

Будем считать кровлю и подошву непроницаемой:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, z = H \quad (1.3)$$

На контуре питания для простоты принимаем

$$\Phi = 0 \quad \text{при } x = 0, x = L \quad (1.4)$$

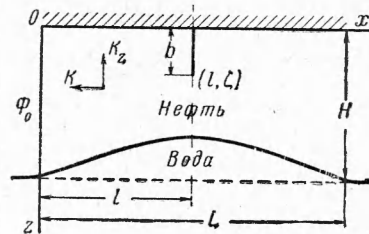
Используя последовательно косинус- и синус-преобразование Фурье с конечными пределами [1], применяя дважды формулу обращения ([1], стр. 93—94, 591) и учитывая (1.3) и (1.4), получим решение уравнения (1.2):

$$\Phi_{z > \zeta} = - \frac{2q\kappa}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{ch}[m\pi\kappa(H-z)/L] \text{ch}(m\pi\kappa\zeta/L)}{m \text{sh}(m\pi\kappa H/L)} \sin \frac{m\pi l}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1.5)$$

$$\Phi_{z < \zeta} = - \frac{2q\kappa}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{ch}[m\pi\kappa(H-\zeta)/L] \text{ch}(m\pi\kappa z/L)}{m \text{sh} m\pi(\kappa H/L)} \sin \frac{m\pi l}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1.6)$$

Формулы (1.5) и (1.6) дают распределение потенциала, вызванного точечным стоком или источником в анизотропном полосообразном пласте. Их можно использовать при экспериментировании на щелевом лотке и для горизонтальной дрены.

Получим потенциал для несовершенной скважины в том же пласте. При этом скважину будем рассматривать как линию стоков (фиг.1), расположенных вдоль



Фиг. 1

прямой $x = l$ от $z = 0$ до $z = b$ постоянной мощности q . Тогда потенциал линии стогов будет

$$\Phi = \int_0^b \varphi(x, z, \xi) d\xi \quad (1.7)$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в уравнение (1.7), интегрируя и делая некоторые преобразования, получим

$$\Phi_{z>b} = -\frac{2qL}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\pi x (H-z)/L \operatorname{sh} m\pi b/L}{m^2 \operatorname{sh} m\pi H/L} \sin \frac{m\pi l}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1.8)$$

$$\Phi_{z<b} = \frac{2qL}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\pi x z/L \operatorname{sh} m\pi (H-b)/L}{m^2 \operatorname{sh} m\pi H/L} \sin \frac{m\pi l}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} +$$

$$+ \begin{cases} -2q \frac{L-l}{L^2} x & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ -2q \frac{l}{L^2} (L-x) & \text{при } l \leq x \leq L \end{cases} \quad (1.9)$$

Если $b = H$, то из (1.9) получаем выражение для потенциала совершенной скважины (второе слагаемое уравнения (1.9)).

§ 2. Исследование полученных решений. Ряды (1.5) и (1.6) сходятся медленно, однако для них можно получить приближенные выражения, с достаточной степенью точности более удобные для вычислений.

Запишем ряд (1.5) в развернутом виде

$$\varphi_{z>\xi} = -\frac{2q\kappa}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m} \exp\left(-m\pi\kappa \frac{z-\xi}{L}\right) \left[1 + \exp\left(-2m\pi\kappa \frac{H-z}{L}\right)\right] \left[1 + \exp\left(-2m\pi\kappa \frac{\xi}{L}\right)\right] \left[\cos m\pi \frac{l-x}{L} - \cos \frac{m\pi}{L} (l+x)\right] \exp\left(-m\pi\kappa \frac{Hn}{L}\right) \quad (2.1)$$

где

$$\frac{1}{1 + e^{-2m\pi\kappa H/L}} = \sum_{n=0}^N \exp\left(-2n \frac{m\pi\kappa H}{L}\right) + R_N \quad (2.2)$$

$$R_N = \frac{e^{-2(N+1)m\pi\kappa H/L}}{1 - e^{-2m\pi\kappa H/L}} \quad \text{—остаточный член ряда} \quad (2.3)$$

Воспользовавшись методом суммирования рядов [4], найдем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-kb} \cos kd = \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln [\operatorname{ch} b - \cos d]$$

Аналогично производя суммирование по m в (2.1), после некоторых преобразований при $x = l = L/2$ получим окончательно

$$\varphi = q\kappa F(\xi, \rho, h) \quad (2.4)$$

где

$$F(\xi, \rho, h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left\{ \operatorname{th} \frac{\pi}{2\rho} (\xi - h + 2n) \operatorname{th} \frac{\pi}{2\rho} (\xi + h + 2n) \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{th} \frac{\pi}{2\rho} (2 + h - \xi + 2n) \operatorname{th} \frac{\pi}{2\rho} (2 - \xi - h + 2n) \right\} \quad (2.5)$$

$$\xi = \frac{z}{H}, \quad \rho = \frac{L}{2\kappa H}, \quad h = \frac{b}{H} \quad (2.6)$$

Аналогичные преобразования можно сделать и для ряда (1.6). Сделаем оценку ряда (2.5). Если в (2.2) удержать N первых членов, то погрешность составит не больше чем

$$\Delta = \frac{R_N}{1 - e^{-2m\pi\kappa H/L}} 100\% = e^{-2(N+1)m\pi\kappa H/L} 100\% \quad (2.7)$$

Из (2.7) видно, что если в (2.1) вместо суммирования по n от 0 до ∞ взять N первых членов, то наибольшая ошибка получается при $m = 1$. С возрастанием m погрешность уменьшается, поэтому погрешность всей суммы меньше погрешности первого

члена. При $m = 1$ из (2.7) имеем

$$\Delta = e^{-2(N+1)\pi\kappa H/L} 100\% \quad (2.8)$$

Значения Δ для различных N и $\kappa H/L$ приведены в табл. 1. Заметим, что если в двойном ряде (2.1) оставим N первых членов по n , то полученный ряд, очевидно, будет удовлетворять граничным условиям (1.3), (1.4) и уравнению (1.2), если вместо q взять некоторое q' , которое является новой мощностью точечного стока, зависящей от соотношения $\kappa H/L$. Таким образом, отбрасывание членов в ряде по n (с номера N и до ∞) приводит к погрешности в вычислении дебита, которую можно оценить по таблице.

$\kappa H/L$	1	2	10
$N = 0$	0.19	4.3	55
$N = 1$	$0.4 \cdot 10^{-3}$	0.19	28
$N = 2$	$0.19^3 \cdot 10^{-4}$	$0.75 \cdot 10^{-2}$	15
$N = 3$	—	—	8.1

Таким образом, для практических расчетов в ряде достаточно удержать 1—2 члена.

§ 3. Расчет предельных безводных дебитов в пластах с подошвенной водой. Покажем применение формулы (2.4) для расчета конусов на щелевом лотке или в горизонтальной скважине (фиг. 1). (Аналогично используются и формулы (1.8) и (1.9) для вертикальных скважин.)

Согласно [2] вдоль границы раздела двух жидкостей потенциал изменяется по линейному закону

$$\varphi = -\frac{k\Delta\gamma H}{\mu} (1 - \xi) \quad (3.1)$$

Решая совместно (2.1) и (3.1) при $\xi = \xi_0$, находим

$$q = -\frac{k\Delta\gamma H}{\mu\kappa} \frac{1 - \xi_0}{F(\xi_0, \rho, h)} \quad (3.2)$$

Отсюда безразмерный предельный дебит на единицу мощности, соответствующий точке касания ξ_0 кривой (2.5) и прямой (3.1), выразится как

$$q_0 = \frac{q}{k\Delta\gamma H / \mu\kappa} = -\frac{1 - \xi_0}{F(\xi_0, \rho, h)} \quad (3.3)$$

Пусть $\rho = 1.9$, $h = 0.55$. По формуле (2.5) с помощью таблиц [3] для различных значений ξ строим кривую и графически (фиг. 2) находим: $\xi_0 = 0.62$, $F(\xi_0) = 0.90$.

По формуле (3.3) определяем безразмерный дебит, который оказывается равным $q_0 = 0.422$.

Зная параметры пласта k , $\Delta\gamma$, H и μ , нетрудно определить и предельный дебит q по (3.3). Производя аналогичные вычисления, можно построить кривые зависимости $q_0 = q_0(h)$ для различных ρ , что значительно облегчит расчет предельных безводных дебитов для рассматриваемых случаев. Заметим, что при $\kappa = 1$ все выведенные формулы дают решение для однородного пласта. Выведем уравнение границы раздела для установившегося движения

$$P_H = p(y, x) + \gamma_H(H - y), \quad P_B = \gamma_H H - \gamma_B y \quad (3.4)$$

Так как на границе раздела давление в нефти P_H и давление в воде P_B равны, то из системы (3.4) имеем

$$\varphi(y, x) = -k\Delta\gamma \frac{y}{\mu} \quad \text{или} \quad \varphi(z, x) = -\frac{k\Delta\gamma}{\mu} (H - z) \quad (3.5)$$

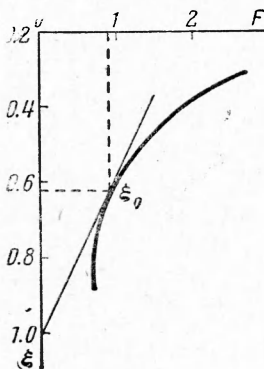
Для скважины $\varphi(z, x) = \Phi(z, x)$ по формуле (1.8), для стока $\varphi(z, x)$ принимаем по формуле (2.4).

Авторы выражают глубокую признательность И. А. Чарному за совместное обсуждение статьи.

Поступила 3 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИИЛ, 1955.
2. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики, Гос. НТИ, 1956.
3. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Гос. изд. физико-матем. литературы, 1959.
4. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехиздат, 1956 (перевод с англ).



Фиг. 2