

## К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ГИДРОТЕРМАЛЬНЫХ ПЛАСТАХ

Изучение процессов тепломассопереноса в гидротермальных пластах представляет несомненный интерес для проектирования систем извлечения геотермальной энергии — альтернативного энергетического ресурса, а также для углубления понимания динамики тепловых процессов в литосфере Земли. Гидротермальные системы представляют собой природные пласты, насыщенные горячей водой, паром или пароводяной смесью. Изменение внешних условий (например, изменение теплового потока Земли или вскрытие пласта скважиной) приводит к фильтрационному течению воды (пара), сопровождающемуся фазовыми переходами вода — пар и изменениями температуры, давления и фазового состава пласта. Математическое описание строится на основе законов сохранения массы, энергии и закона Дарси для двухфазной неизоэнтальпической фильтрации. Для замыкания модели используется фазовая диаграмма для воды. Известные модели тепломассопереноса в гидротермальных пластах [1—4] сформулированы в терминах давления и энтальпии. При этом водонасыщенность в случае пароводяной смеси вычисляется по значениям плотностей воды и пара, энтальпий воды, пара и пароводяной смеси. Использование энтальпии в качестве искомого функции предполагает замыкание системы уравнений сохранения  $p$ — $h$ -диаграммой фазового состояния воды. Фактически такая модель — реализация известного энтальпийного подхода к описанию фазовых переходов [5], она явно не содержит движущихся границ раздела фаз — поверхностей сильного разрыва функции водонасыщенности. Однако изложенный выше подход имеет некоторые недостатки. Так, требуется выставлять граничные условия в терминах энтальпии, что затруднительно в случае граничных условий первого и третьего рода. Кроме того, неопределенным остается поле температур, знание которого необходимо для понимания процессов, происходящих в пласте.

В настоящей работе предложена математическая модель процессов тепломассопереноса с фазовыми переходами в гидротермальных пластах, сформулированная в терминах температуры, давления и насыщенности и допускающая наличие движущихся поверхностей фазового перехода, являющихся сильными разрывами функции насыщенности. Решение строится в рамках обобщенного решения задачи Стефана [6] во многом аналогично решениям задач о промерзании и протаивании грунтов [7, 8] и разложении газовых гидратов в природных пластах [9].

**Математическая формулировка задачи.** Под гидротермальной системой будем понимать пористую среду, насыщенную либо водой, либо паром, либо их смесью. Процессы тепломассопереноса и фазовых переходов рассмотрим в рамках следующего приближения: скелет пористой среды несжимаем и неподвижен, пар является совершенным газом, капиллярные эффекты пренебрежимо малы, локальные температуры и давления компонентов среды совпадают, вязкости считаются функциями температуры.

Основные уравнения включают законы сохранения масс воды и пара

$$m \frac{\partial}{\partial t} S \rho_v + \operatorname{div} \rho_v \mathbf{v}_v = M, \quad m \frac{\partial}{\partial t} (1 - S) \rho_n + \operatorname{div} \rho_n \mathbf{v}_n = -M;$$

уравнения закона Дарси

$$\mathbf{v}_v = - \frac{k}{\mu_v(T)} f_v(S) \operatorname{grad} p, \quad \mathbf{v}_n = - \frac{k}{\mu_n(T)} f_n(S) \operatorname{grad} p;$$

состояния воды и пара

$$\rho_v = \rho_{v0} [1 + \alpha(p - p_0) - \beta(T - T_0)], \quad p = \rho_n R T;$$

кривой раздела фаз на  $p$  —  $T$ -диаграмме [10]

$$(1) \quad \lg p = A + B/T;$$

энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e)_{\text{эф}} + \operatorname{div} (\rho_v h_v \mathbf{v}_v + \rho_n h_n \mathbf{v}_n) = \operatorname{div} (\lambda_{\text{эф}} \operatorname{grad} T)$$

$$(\lambda_{\text{эф}} = m S \lambda_v + m(1 - S) \lambda_n + (1 - m) \lambda_c,$$

$$(\rho e)_{\text{эф}} = m S \rho_v e_v + m(1 - S) \rho_n e_n + (1 - m) \rho_c e_c).$$

Здесь  $T$  — температура;  $p$  — давление;  $S$  — водонасыщенность;  $h$  — энтальпия;  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{v}$  — скорость фильтрации;  $M$  — интенсив-

ность фазового перехода;  $k$  — проницаемость;  $f$  — фазовая проницаемость;  $\mu$  — вязкость;  $\alpha$  — коэффициент сжимаемости;  $\hat{\rho}$  — коэффициент теплового расширения;  $e$  — внутренняя энергия;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $m$  — пористость; индексы: в — вода, п — пар, с — скелет пористой среды, эф — эффективное значение.

После тождественных преобразований с учетом известного соотношения

$$dh = CdT + \frac{dp}{\rho} (1 - \beta T) \quad \left( \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$$

исходная система уравнений сводится к системе трех уравнений относительно  $T$ ,  $p$  и  $S$ .

**Условия на движущихся границах фазовых переходов.** Предположим, что заданы такие начальные и граничные условия, которые, согласно фазовой диаграмме, расположены по разные стороны кривой равновесия. В этом случае области с различным фазовым составом должны быть разделены поверхностями фазового перехода, на которых допускается сильный разрыв функции водонасыщенности. Условия на поверхностях фазового перехода следуют из законов сохранения массы и энергии на скачках [11]

$$[\rho(V_n - u_n)]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad [\rho h(V_n - u_n) - Q_n]_{\pm}^{\pm} = 0,$$

где  $V$  — скорость скачка;  $u$  — скорость среды;  $Q$  — кондуктивный тепловой поток; индекс  $n$  — проекция на нормаль.

Рассмотрим следующие типы скачков:

1) граница раздела областей пара (—) и пароводяной смеси (+)

$$(2) \quad \rho_{\text{п}} \frac{k}{\mu_{\text{п}}} \text{grad } p_{-} - k \left( \rho_{\text{п}} \frac{f_{\text{п}}}{\mu_{\text{п}}} + \rho_{\text{в}} \frac{f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} \right) \text{grad } p_{+} = m S_{+} (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}}) V_n;$$

$$(3) \quad \lambda_{+} \text{grad } T_{+} - \lambda_{-} \text{grad } T_{-} - kq \frac{\rho_{\text{в}} f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} \text{grad } p_{+} = m S_{+} q \rho_{\text{в}} V_n$$

( $q = h_{\text{п}} - h_{\text{в}}$  — теплота фазового перехода);

2) граница раздела областей пароводяной смеси (—) и воды (+)

$$- \rho_{\text{в}} \frac{k}{\mu_{\text{в}}} \text{grad } p_{+} + k \left( \rho_{\text{п}} \frac{f_{\text{п}}}{\mu_{\text{п}}} + \rho_{\text{в}} \frac{f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} \right) \text{grad } p_{-} = m (1 - S_{-}) (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}}) V_n,$$

$$\lambda_{+} \text{grad } T_{+} - \lambda_{-} \text{grad } T_{-} - kq \frac{\rho_{\text{п}} f_{\text{п}}}{\mu_{\text{п}}} \text{grad } p_{-} = m (1 - S_{-}) q \rho_{\text{п}} V_n;$$

3) граница раздела областей пара (—) и воды (+)

$$\left( \rho_{\text{п}} \frac{k}{\mu_{\text{п}}} \text{grad } p_{-} - \rho_{\text{в}} \frac{k}{\mu_{\text{в}}} \right) \text{grad } p_{+} = m (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}}) V_n,$$

$$\lambda_{+} \text{grad } T_{+} - \lambda_{-} \text{grad } T_{-} - kq \frac{\rho_{\text{п}}}{\mu_{\text{п}}} \text{grad } p_{-} = m q \rho_{\text{в}} V_n.$$

Кроме того, для всех типов скачков выполняются условия непрерывности температуры и давления и фазового перехода (1).

Заметим, что в области пароводяной смеси имеется функциональная связь между давлением и температурой (уравнение фазового равновесия (1)). Это позволяет проанализировать граничные условия для первого и второго типов скачков. Так, условие теплового баланса для скачка первого типа может быть записано в виде

$$(4) \quad \left( \lambda_{+} - kq f_{\text{в}} \frac{\rho_{\text{в}} p B_{*}}{\mu_{\text{в}} T^2} \right) \text{grad } T_{+} - \lambda_{-} \text{grad } T_{-} = m S_{+} q \rho_{\text{в}} V_n \quad (B_{*} = -2,3 B).$$

Подставив характерные значения параметров, получаем, что круглая скобка в (4) обращается в нуль при проницаемостях  $k \cong 10^{-18} \text{ м}^2$ , а при

больших проницаемостях она отрицательна. Поскольку рассматривается процесс извлечения теплоносителя из пласта, то  $\text{grad } T_+ > 0$  и  $\text{grad } T_- > 0$ . Но тогда при  $k > 10^{-18} \text{ м}^2$  правая часть должна быть отрицательной, что означает невозможность удовлетворения граничных условий на поверхности фазового перехода и, следовательно, отсутствие такой поверхности. Таким образом, только при очень низких проницаемостях возможны решения с движущимися скачками насыщенности, а в широком диапазоне параметров они не существуют. Аналогичные рассуждения справедливы и для других типов скачков.

**Результаты численных расчетов.** Сформулированные выше система уравнений и условия на скачках допускают в одномерном случае автомодельные решения, отвечающие постоянным значениям начальных и граничных условий на неподвижной поверхности (стенке скважины) для  $T$ ,  $p$  и  $S$ . При этом исходные начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных сводятся к краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение последних определяется численно методом параллельной пристрелки [12].

Рассмотрим в одномерной постановке процесс разработки гидротермальной залежи, в которой изначально пар сосуществует с водой в состоянии термодинамического равновесия. Извлечение теплоносителя из пласта предполагает понижение давления на скважине. При этом естественно ожидать, что извлекаемым теплоносителем в зависимости от режима добычи и параметров пласта могут быть как пар, так и пароводяная смесь. Предположим, что имеет место добыча пара. Тогда в пласте должна существовать граница раздела областей пара и пароводяной смеси  $X(t)$ , на которой выполняются условия (2), (3)

$$\rho_{\text{п}} \frac{k}{\mu_{\text{п}}} \frac{\partial p}{\partial x_-} - k \left( \rho_{\text{п}} \frac{f_{\text{п}}}{\mu_{\text{п}}} + \rho_{\text{в}} \frac{f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} \right) \frac{\partial p}{\partial x_+} = m S_+ (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}}) \frac{dX}{dt},$$

$$\lambda_+ \frac{\partial T}{\partial x_+} - \lambda_- \frac{\partial T}{\partial x_-} - kq \frac{\rho_{\text{в}} f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} \frac{\partial p}{\partial x_+} = m S_+ q \rho_{\text{в}} \frac{dX}{dt}$$

$$(\lambda_+ = m S_+ \lambda_{\text{в}} + m(1 - S_+) \lambda_{\text{п}} + (1 - m) \lambda_{\text{с}}, \quad \lambda_- = m \lambda_{\text{п}} + (1 - m) \lambda_{\text{с}}),$$

а также условия непрерывности температуры и давления и фазового перехода

$$T_- = T_+ = T_*, \quad p_- = p_+ = p_*, \quad \lg p_* = A + B/T_*.$$

Функция водонасыщенности  $S$  здесь терпит разрыв от искомой величины  $S_+$  до  $S_- = 0$ . На неподвижной стенке заданы температура и давление  $x = 0$ :  $T = T^0$ ,  $p = p^0$ . Начальные условия имеют вид  $t = 0$ :  $T = T_0$ ,  $p = p_0$ ,  $S = S_0$ ,  $\lg p_0 = A + B/T_0$ .

Поскольку начальное состояние есть состояние термодинамического равновесия, то уравнения в зоне пароводяной смеси должны допускать изменение фазового состава вследствие фазовых переходов вода — пар. Как показывает анализ процессов фазовых переходов в подобных системах [7—9], фронтные модели, не учитывающие объемных фазовых переходов, оказываются термодинамически противоречивыми.

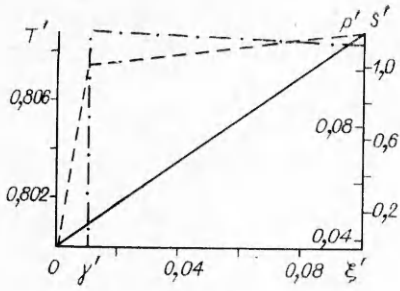
Уравнения в зоне пароводяной смеси запишем как

$$(5) \quad \left(1 - \frac{p}{\rho_{\text{в}0} RT}\right) \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\alpha S + \frac{1-S}{\rho_{\text{в}0} RT}\right) \frac{\partial p}{\partial t} - \left(\beta S + \frac{(1-S)p}{\rho_{\text{в}0} RT^2}\right) \frac{\partial T}{\partial t} -$$

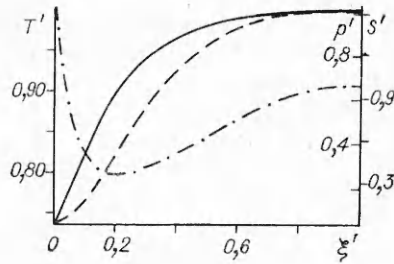
$$- \frac{k}{m} \left(\frac{\alpha f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} + \frac{f_{\text{п}}}{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{в}0} RT}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \frac{k}{m} \left(\frac{\beta f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} + \frac{f_{\text{п}} p}{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{в}0} RT^2} +$$

$$+ \frac{f_{\text{п}} p}{\mu_{\text{п}}^2 \rho_{\text{в}0} RT} \frac{d\mu_{\text{п}}}{dT} + \frac{f_{\text{в}}}{\mu_{\text{п}}^2} \frac{d\mu_{\text{в}}}{dT}\right) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{k}{m} \left(\frac{1}{\mu_{\text{п}}} \frac{df_{\text{в}}}{dS} + \frac{p}{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{в}0} RT} \frac{df_{\text{п}}}{dS}\right) \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} =$$

$$= \frac{k}{m} \left(\frac{f_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} + \frac{f_{\text{п}} p}{\mu_{\text{п}} \rho_{\text{в}0} RT}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2};$$



Р и с. 1



Р и с. 2

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \left( \frac{(\rho C)_{\text{эф}}}{m} - (1-S) \frac{\bar{p}\bar{q}}{RT^2} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \left( S(1-\beta T) + \frac{q(1-S)}{RT} - 1 \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \\
 & - \frac{pq}{RT} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{k}{m} \left( \frac{f_B}{\mu_B} (1-\beta T) + \frac{f_{II}}{\mu_{II}} \frac{q}{RT} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + \frac{k}{m} \left( \frac{f_{II} p}{\mu_{II} RT} (q/T - C_p) - \rho_{B0} C_B f_B / \mu_B \right) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_B \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \\
 & - \frac{qpk}{mRT\mu_{II}} \frac{df_{II}}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{kqf_{II} p}{mR\mu_{II} T} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\lambda_{\text{эф}}}{m} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2};
 \end{aligned}$$

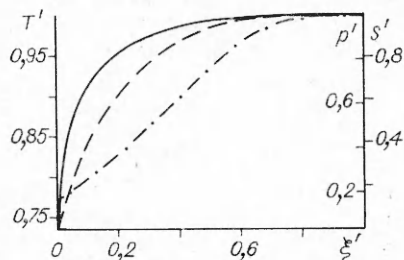
$$(7) \quad \lg p = A + B/T.$$

Здесь эффективная теплоемкость  $(\rho C)_{\text{эф}} = mS\rho_B C_B + m(1-S)\rho_{II} C_p + (1-m)\rho_C C_c$ . Уравнения в зоне пара вытекают из (5) и (6), если положить  $S = 0$ .

Сформулированная задача при постоянных  $T_0, p_0, S_0, T^0$  и  $p^0$  имеет автомодельное решение вида  $T = T(\xi), p = p(\xi), S = S(\xi), X = \gamma t^{1/2}, \xi = xt^{-1/2}$ , определение которого сводится к численному решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В расчетах использовались аппроксимации эмпирических данных для функций  $f_B(S), f_{II}(S), \mu_B(T), \mu_{II}(T)$  [10, 13] и следующие значения параметров:  $\rho_{B0} = 1000 \text{ кг/м}^3, \rho_C = 2000 \text{ кг/м}^3, \lambda_B = 0,58 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \lambda_C = 2,09 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \lambda_{II} = 0,02 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, C_B = 4,19 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}, C_C = 0,9 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}, C_p = 1,8 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}, \alpha = 0,49 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}, \beta = 0,001 \text{ К}^{-1}, m = 0,25, R = 461 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, q = 1900 \text{ кДж/кг}, \mu_{II0} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}, A = 5,44, B = 2005,1 \text{ К}.$

На рис. 1 приведены результаты расчета при  $T_0 = 500 \text{ К}, S_0 = 0,25, T^0 = 400 \text{ К}, p^0 = 10^5 \text{ Па}, k = 10^{-18} \text{ м}^2$ , представлены зависимости безразмерных температуры  $T' = T/T_0$  (сплошная линия), давления  $p' = p/p_0$  (штриховая) и насыщенности  $S' = S/S_0$  (штрихпунктирная) от безразмерной автомодельной переменной  $\xi' = \xi(kp_0/m\mu_{II0})^{-1/2}$ .

Результаты численных экспериментов свидетельствуют, что с увеличением проницаемости происходит сужение зоны пара. При некотором значении проницаемости, зависящем от остальных параметров задачи, имеет место вырождение зоны пара. Физически это соответствует выносу из пласта пароводяной смеси. В данном случае математическая модель уже не содержит подвижных скачков насыщенности, фазовый переход реализуется во всем пласте. Соответственно изменяются граничные условия при  $x = 0$ . Здесь достаточно задавать значение давления пароводяной смеси, извлекаемой из пласта. При этом температура смеси определяется из условия термодинамического равновесия, а насыщенность есть результат решения задачи. На рис. 2 и 3 приведены примеры расчетов соответствен-



Р и с. 3

но при  $k = 10^{-16}$  и  $10^{-14} \text{ м}^2$  для  $T_0 = 500 \text{ К}$ ,  $S_0 = 0,5$ ,  $p^0 = 10^5 \text{ Па}$ .

Результаты выполненных в рамках предложенной модели расчетов свидетельствуют, что в диапазоне высоких проницаемостей, представляющем интерес с практической точки зрения, решения с подвижными скачками насыщенности не реализуются. Это означает, что происходит вынос из пласта теплоносителя в том качественном состоянии, в котором он находился изначально. Вид получаемых в процессе решения задачи распределений водонасыщенности во многом определяется особенностями совместной фильтрации воды и пара при различных проницаемостях и свидетельствует о процессах частичной конденсации и парообразования в пласте.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Brownell D. H., Garg S. K., Pritchett J. W. Governing equations of geothermal reservoirs // Water Resour. Res.— 1977.— V. 13, N 6.
2. Faust C. R., Mercer J. W. Geothermal reservoir simulation. 1. Mathematical models for liquid- and vapour-dominated hydrothermal systems // Water Resour. Res.— 1979.— V. 15, N 1.
3. Grant M. A. Geothermal reservoir modelling // Geothermics.— 1983.— V. 12.— P. 251.
4. O'Sullivan M. J. Geothermal reservoir simulation // Intern. J. Energy Res.— 1985.— V. 9.— P. 319.
5. White R. E. An enthalpy formulation of the Stefan problem // SIAM J. Numer. Anal.— 1982.— V. 19, N 6.
6. Мейрманов А. М. Задача Стефана.— Новосибирск: Наука, 1986.
7. Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Явление «перегрева» и образование двухфазной зоны при фазовых переходах в мерзлых грунтах // ДАН СССР.— 1987.— Т. 294, № 5.
8. Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Автомодельное решение задачи о протаивании мерзлого грунта // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 6.
9. Бондарев Э. А., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. К математическому моделированию диссоциации газовых гидратов // ДАН СССР.— 1989.— Т. 308, № 3.
10. Вукалович М. П. Термодинамические свойства водяного пара (таблицы и диаграммы).— М.: Гостехиздат, 1946.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1970.— Т. 1.
12. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач.— М.: Мир, 1982.
13. Grant M. A., Donaldson I. G., Bixley P. F. Geothermal reservoir engineering.— N. Y.: Acad. Press, 1982.

г. Москва

Поступила 18/IV 1990 г.

УДК 536.24:517.9

У. Г. Абдуллаев

### КОНЕЧНАЯ СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Основным законом нестационарной фильтрации в пористой среде является классический закон Дарси, в котором предполагается, что равновесное состояние между градиентом давления и скоростью достигается мгновенно. На самом деле «равновесность» достигается с некоторым запаздыванием, и, чтобы учесть это явление в реологических уравнениях, скорость  $v$  и давление  $p$  заменяются на  $v + \lambda_v dv/dt$ ,  $p + \lambda_p dp/dt$ , где  $\lambda_v > 0$  — время запаздывания скорости,  $\lambda_p > 0$  — время релаксации давления. Физический смысл подобной замены состоит в том, что после мгновенного снятия перепада давления движение не прекращается мгновенно, а убывает во времени как  $\exp(-\lambda_v^{-1}t)$ . Если же мгновенно прекратить движение, то градиент давления затухает во времени как  $\exp(-\lambda_p^{-1}t)$ . Нарушение «равновесного» соответствия между скоростью фильтрации и градиентом давления можно объяснить релаксационными эффектами, которые обусловлены: а) инерцией жидкости и запаздыванием скорости от градиента давления; б) релаксацией давления и запаздыванием градиента давления от скорости; в) сложностью структуры (трещиноватостью, кавернозностью и т. д.) и диссипативными свойствами пористой среды; г) микронеоднородностью составных пористых сред и т. п. [1].