

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А. Свободно-конвективный теплообмен: Справ. — Минск: Наука и техника, 1982.
2. Колмаков А. П., Юрьев Ю. С. Применение метода пористого тела для расчета поля скоростей и температур в активной зоне. — Обнинск, 1971. — (Препр./ФЭИ; № 249).
3. Боришанский В. М., Готовский М. А., Мизонов Н. В., Фирсова Э. В. Метод гомотенного потока и его применение для расчета гидродинамики и теплопередачи в пучках стержней // Теплообмен и гидродинамика однофазного потока в пучках стержней. — Л.: Энергия, 1979.
4. Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Ушаков П. А. и др. Гидродинамика и теплообмен в атомных энергетических установках. — М.: Атомиздат, 1975.
5. Субботин В. И., Кащеев В. М., Номофилов Ю. С., Юрьев Ю. С. Решение задач реакторной теплофизики на ЭВМ. — М.: Атомиздат, 1979.
6. Вдовец П. В., Гривнин А. П., Готовский М. А. и др. Теплообмен при естественной конвекции в горизонтально расположенных пучках тепловыделяющих стержней // Теплофизика высоких температур. — 1986. — Т. 24, № 4.
7. Кейхани, Куляцкий, Христensen. Экспериментальное исследование свободной конвекции в вертикальной сборке стержней (общая корреляция для числа Нуссельта) // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теплопередача. — 1985. — Т. 107, № 3.
8. Davis L. P., Perona J. J. Development of free convection axial flow through a tube bundle // Intern. J. Heat Mass Transfer. — 1973. — V. 16, N 7.
9. Okada T., Efthimiadis A., Iannello V., Todreas N. Mixed convection pressure drop in vertical ROD bundles // Proc. 3rd Intern. Topical Meeting on React. Thermal Hydraulic, New Port, 1985. — V. 2, sess. 13—21.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.
11. Китаев Б. И., Ярошенко Ю. Г., Суханов Е. Л. и др. Теплотехника доменного процесса. — М.: Металлургия, 1978.
12. Weber J. E. The boundary layer regime for convection in a vertical porous layer // Intern. J. Heat Mass Transfer. — 1975. — V. 18, N 4.
13. Lundgren T. S. Slow flow through stationary random beds and suspension of spheres // J. Fluid Mech. — 1972. — V. 51, pt 2.
14. Somerton C. W., Catton J. On the thermal instability of superposed porous and fluid layers // Trans. ASME: J. Heat Transfer. — 1982. — V. 104, N 1.
15. Бекерман, Рамадьяни, Висканта. Свободно-конвективное течение и теплообмен между жидким и пористым слоями внутри прямоугольной полости // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теплопередача. — 1988. — № 1.
16. Хапфель Д., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976.
17. Drummond J. E., Tahir M. I. Laminar viscous flow through regular arrays of parallel solid cylinders // Intern. J. Multiphase Flow. — 1984. — V. 10, N 5.
18. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. — М.: Физматгиз, 1962.
19. Мартыненко О. Г., Галич Н. Е., Соковишин Ю. А. и др. Свободная конвекция от объемных и локализованных источников тепла. — Минск, 1988. — (Препр./АН БССР, Ин-т тепло- и массообмена; № 4).
20. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984.

• Днепропетровск

Поступила 14/IV 1989 г.

УДК 539.3

Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ДИСКРЕТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$(1) \quad F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

где x_i ($i = \overline{1, n}$) — аргументы и p — параметр решения. К подобным системам сводятся многие нелинейные задачи механики. Простейшая из них — задача об осесимметричном выпучивании изотропной круговой пластины, нагруженной равномерно распределенными по контуру ра-

диальными усилиями N_0 и поперечной нагрузкой q :

$$(2) \quad r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) \right] + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r N_r \frac{dw}{dr} \right) = q \quad (0 \leq r \leq R),$$

$$dw/dr = Q_r = u_r = 0 \text{ при } r = 0, w = M_r = 0, N_r = -N_0 \text{ при } r = R.$$

Здесь u_r и w — радиальное перемещение и прогиб; N_r , M_r и Q_r — радиальные удельные усилия, изгибающий момент и перерезывающая сила; E и D — модуль Юнга и цилиндрическая жесткость пластины; R и h — радиус и толщина пластины.

Поставим задачу построения траектории нагружения механического объекта, поведение которого определяется системой (1):

$$x_i = x_i(p) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Для решения данной задачи удобно использовать метод непрерывного продолжения по параметру. Он позволяет строить траекторию нагружения во всех регулярных в смысле Пуанкаре точках, включая предельные точки траектории. Идея этого метода заложена в [1], а ее детальную проработку с учетом идеи равноправия переменных решения можно найти в [2]. Однако метод имеет недостаток: в процессе численного построения траектории нагружения в решении накапливается неустранимая погрешность. Поэтому через несколько шагов по методу непрерывного продолжения необходимо уточнять его решение с помощью алгоритмов, в основе которых лежат приемы метода дискретного продолжения по параметру, также реализующие идею равноправия параметров [2]. Это позволяет уточнять решение в регулярных и предельных точках траектории нагружения. Не останавливаясь на обзоре методов непрерывного и дискретного продолжения (его можно найти в [2, с. 12—23, 176—196]), рассмотрим три варианта уточнения. Первый из них известен и является основой двух других, алгоритмы которых нигде не опубликованы.

Будем считать параметр p такой же переменной, как x_i ($i = \overline{1, n}$): $x_{n+1} = p$, и пусть методом непрерывного продолжения получено решение x_i ($i = \overline{1, n+1}$), которое надо уточнить. Согласно методу Ньютона, запишем в этой точке траектории нагружения алгебраическую систему относительно невязок уравнений (1)

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{n+1} F_{i,j} \Delta x_j = -F_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad F_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad x_j = x_j + \Delta x_j$$

$$(j = \overline{1, n+1}).$$

Это система из n линейных уравнений относительно $n+1$ неизвестных Δx_j . Она должна быть доопределена так, чтобы Δx_j ($j = \overline{1, n+1}$) определялись в любой регулярной точке траектории с максимально возможной обусловленностью. В [2] для этого предлагается следующее.

В процессе применения метода непрерывного продолжения в каждой точке траектории нагружения может быть определен единичный вектор, являющийся касательным в данной точке к траектории нагружения:

$$\Phi = (\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n+1})^T, \quad \dot{x}_i = \varphi_i \quad (i = \overline{1, n+1}).$$

Здесь \dot{x}_i ($i = \overline{1, n+1}$) — производная переменной x_i по длине дуги λ траектории нагружения. Поэтому можно показать (см. [2]), что если искать приращение Δx_j ($j = \overline{1, n+1}$) в направлении, перпендикулярном вектору Φ , то процесс нахождения этих приращений будет иметь наилучшую обусловленность в каждой регулярной точке траектории нагруже-

ния, равную максимальной обусловленности одной из матриц:

$$J_k = \begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,k-1} & F_{1,k+1} & \dots & F_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,k-1} & F_{n,k+1} & \dots & F_{n,n+1} \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, n+1}).$$

Подобный процесс приводит к следующей системе для нахождения приращений:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} & F_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} & F_{n,n+1} \\ \Phi_1 & \dots & \Phi_n & \Phi_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_n \\ \Delta x_{n+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При больших n на каждой итерации он требует времени, пропорционального $2n^3$, если для решения системы (4) использовать метод ортогонализации (как предлагается в [2]), или $2n^3/3$, если использовать методы типа метода Гаусса. Объем памяти в обоих случаях пропорционален n^2 .

Второй вариант уточнения параметров траектории нагружения следует применять в том случае, когда матрица-якобиан системы (1) симметрична:

$$J_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} \end{pmatrix}, \quad F_{i,j} = F_{j,i} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Он заключается в дополнении системы (3) уравнением $F_{1,n+1}\Delta x_1 + \dots + F_{n,n+1}\Delta x_n + \varepsilon\Delta x_{n+1} = 0$. Уравнение означает, что направление, в котором ищутся приращения Δx_i ($i = \overline{1, n+1}$), перпендикулярно вектору $\Phi^* = (F_{1,n+1} \dots F_{n,n+1} \varepsilon)^T$ (ε — неопределенный параметр, будет найден ниже). Получающаяся система уравнений для определения Δx_i ($i = \overline{1, n+1}$) имеет симметричную матрицу

$$\begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} & F_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} & F_{n,n+1} \\ F_{1,n+1} & \dots & F_{n,n+1} & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_n \\ \Delta x_{n+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

обусловленность которой тем хуже, чем больше угол между векторами Φ и Φ^* . Поэтому ε следует искать так, чтобы угол между векторами Φ и Φ^* был наименьшим. Из этого условия запишем

$$\alpha = \alpha_{\min} \quad \text{при} \quad \varepsilon = \Phi_{n+1} \sum_{i=1}^n F_{i,n+1}^2 / \sum_{i=1}^n F_{i,n+1} \Phi_i.$$

Описанный вариант уточнения требует для симметричных матриц J_{n+1} памяти, пропорциональной $(n^2 + n)/2$, а время реализации одной итерации при использовании метода Гаусса пропорционально $n^3/3$.

Третий вариант уточнения решения основан на том, что новое приближение системы (3) ищется в направлении, определяемом градиентами функций F_i ($i = \overline{1, n}$):

$$\Delta X = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta x_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n t_j \text{grad } F_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n+1} t_j F_{j,i} \mathbf{e}_i$$

(t_j ($j = \overline{1, n}$) — параметры, задающие направление уточнения решения). Отсюда

$$(5) \quad \Delta x_i = \sum_{j=1}^n t_j F_{j,i}.$$

Подставив (5) в (3), имеем систему уравнений относительно t_j ($j = \overline{1, n}$):

(6)

$$\mathbf{HT} = -\mathbf{F},$$

где

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^* \mathbf{J}^{*T}; \quad \mathbf{T} = (t_1 t_2 \dots t_n)^T; \quad \mathbf{F} = (F_1 F_2 \dots F_n)^T;$$

$$\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} & F_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} & F_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

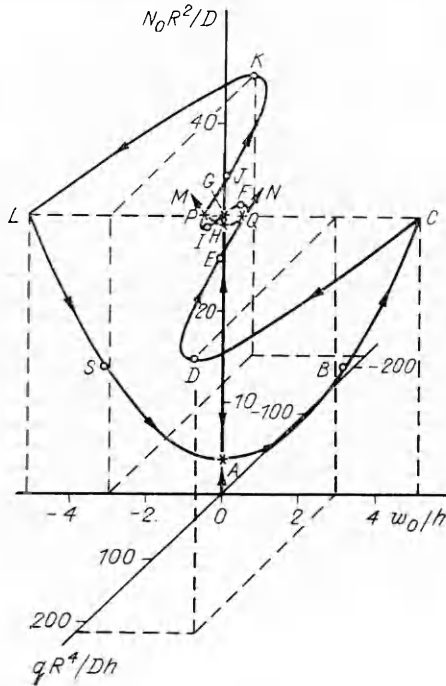
Решая (6), найдем t_j ($j = \overline{1, n}$), на основе которых из (5) получим Δx_i ($i = \overline{1, n+1}$).

Матрица \mathbf{H} всегда симметрична и имеет порядок n . Поэтому для решения (6) требуются память объемом $(n^2 + n)/2$ и время, пропорциональное $n^3/3$, в случае применения метода Гаусса. Однако здесь необходимо учитывать память для запоминания матрицы \mathbf{J}^* и время на формирование матрицы \mathbf{H} . С учетом этого общее время, необходимое на реализацию одной итерации, будет пропорционально $4n^3/3$, а память — n^2 (если матрица \mathbf{J}_{n+1} первоначально была симметрична). Если \mathbf{J}_{n+1} была несимметрична, то время для реализации одной итерации останется прежним, но необходимый объем памяти увеличится до $(3n^2 + n)/2$.

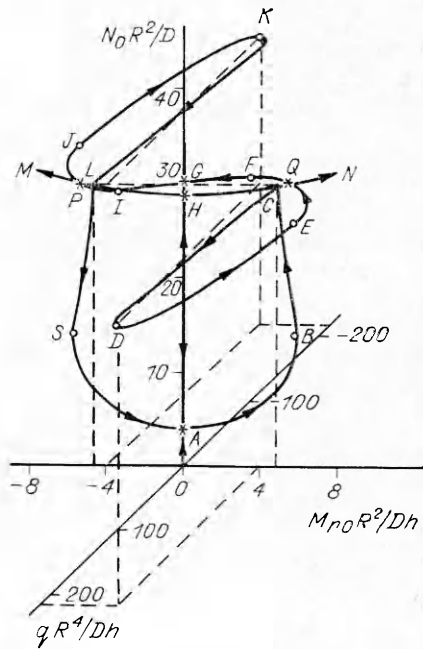
Процесс итераций, осуществляемый с помощью (6), имеет максимально возможную обусловленность на любом шаге в окрестности регулярной или предельной точки траектории нагружения, поскольку матрица \mathbf{H} не вырождается в них. Ее определитель

$$\det(\mathbf{H}) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n+1} [\det(\mathbf{J}_k)]^2,$$

а матрицы \mathbf{J}_k ($k = \overline{1, n+1}$) одновременно вырождаются только в точке ветвления траектории. Подобная обусловленность процесса позволяет сократить трудоемкость итераций. Не ухудшая серьезно сходимости метода, можно сформировать матрицу \mathbf{H} и обратить ее только на первой итерации и в дальнейшем уточнять решение, пользуясь обращенной матрицей. Тогда для выполнения одной итерации потребуется время порядка $4n^2$, а количество итераций при использовании в качестве начального при-



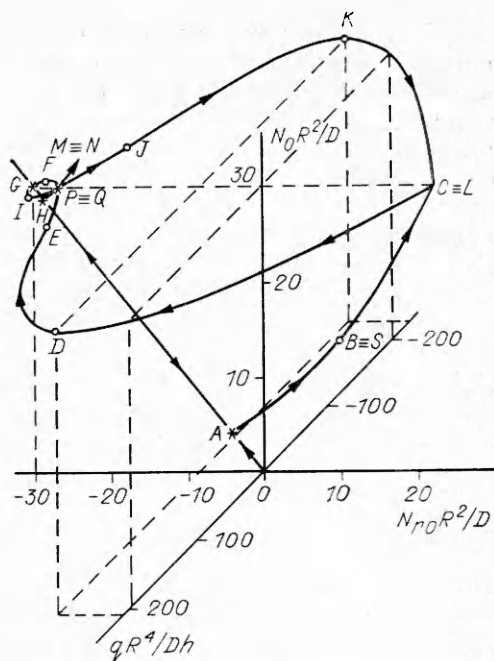
Р и с. 1



Р и с. 2

ближения решения метода непрерывного продолжения, как показывают расчеты, увеличится на одну — две.

Описанные приемы дают возможность существенно повысить точность решения систем нелинейных уравнений методом непрерывного продолжения, уменьшить трудоемкость за счет увеличения шага интегрирования по траектории и повысить его устойчивость в окрестности точек ветвления траектории нагружения. Так, например, при решении осесимметричной задачи о комбинированном нагружении круговой пластины (2), в основе которого лежало точное решение в степенных рядах Уэя [3], применение изложенных приемов позволило обойти все ветви траектории нагружения. Образы этой траектории показаны на рис. 1—3. Здесь w_0 , M_{r0} и N_{r0} — прогиб, изгибающий момент и растягивающее усилие в центре пластины. Первоначально пластина нагружается равномерной контурной нагрузкой N_0 , под действием которой она теряет устойчивость по первой осесимметричной форме (точка A) и выводится по бифуркационной ветви ABC в закритическую область, где для N_0 фиксируется значение $30D/R^2$ (точка C). Затем к пластине с выпуклой стороны прикладывается равномерная поперечная нагрузка q , и она прощелкивает по ветви $CDEQFGIPJKL$ подобно пологому сферическому куполу. При этом на траектории нагружения встречаются предельные точки B, D, E, F, I, J, K, S и точки бифуркации A, H, G, P, Q . Точки P и Q — пересечение траектории нагружения пластины с бифуркационной ветвью, соответствующей второй осесимметричной форме потери устойчивости пластины.



Р и с. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденко Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. матем. журн.— 1953.— Т. 5, № 2.
2. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования.— М.: Наука, 1988.
3. Way S. Bending of circular plates with large deflection // Trans. ASME.— 1934.— V. 56, N 8.

г. Москва

Поступила 16/V 1988 г.,
в окончательном варианте — 6/IV 1989 г.

УДК 539.3

Л. Г. Доборджгинидзе

О СОПРИКАСАНИИ ДВУХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ

Исследована задача о соприкосновении двух близких по форме к полуплоскостям тел S_1 и S_2 из нелинейно-упругого материала гармонического типа [1]. Принимается, что на контактной области трение отсутствует. Получено точное решение задачи.

© 1990 Доборджгинидзе Л. Г.

7*

99