

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
К РЕШЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ
ПО РАСПРОСТРАНЕНИЮ УПРУГИХ ВОЛН**

И. Ф. Сабозан, Р. А. Чередниченко

(Москва)

Излагается разностная схема решения динамических осесимметричных задач теории упругости, построенная на основе метода пространственных характеристик. Обсуждается возможность решения задачи Коши и задачи с учетом краевых условий для сплошного или полого кругового цилиндра. Указанным методом предлагается решать линейные задачи.

Приводится пример расчета параметров напряженно-деформированного состояния полубесконечного цилиндра, точкам торца которого в начальный момент времени сообщается осевая скорость. Расчеты параметров поля производились на машине БЭСМ-6.

В работе [1] методом конечных разностей решается осесимметричная задача об упругом столкновении двух круглых пластинок, изготовленных из одного и того же материала, на начальном этапе соударения. Система динамических уравнений, записанная в перемещениях, интегрируется до момента времени, за которое продольная волна проходит расстояние, меньшее десятой части диаметра пластинки.

Задача соударения двух упругих цилиндров аналитическим путем на основе использования интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по координате исследовалась авторами работы [2]. Обращение полученных изображений выполнялось при больших значениях параметров интегральных преобразований, что соответствует построению асимптотического решения, справедливого для малых интервалов времени после момента удара. Численный анализ полученных результатов отсутствует.

Д. С. Батлером в работе [3] предложена численная схема решения гиперболической системы уравнений, зависящих от трех переменных.

Применительно к плоской двумерной задаче динамической теории упругости разностная схема метода пространственных характеристик для решения задачи Коши предложена в работе [4].

Динамика упруго-пластических волн для секториального кольца на основе метода конечных разностей рассматривалась автором работы [5]. Приводятся распределения компонентов напряженного расстояния по радиальной и угловой координате.

На основе метода пространственных характеристик в работе [6] исследуется плоская двумерная задача о распространении и дифракции упругих волн в полуполосе конечной ширины. В виде графиков приводятся результаты расчетов кинематических и динамических характеристик упругого поля.

Ниже приводится общая схема метода пространственных характеристик применительно к осесимметричным задачам линейной динамической теории упругости.

1. Метод решения. В системе цилиндрических координат r, z, θ уравнения движения в пространственном осесимметричном случае в общеприня-

тых обозначениях записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

К уравнениям (1.1) следует присоединить соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \theta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \theta + 2\mu \frac{u_r}{r}, \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которых $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ означают составляющие вектора упругого смещения вдоль осей r и z соответственно, λ и μ — параметры Ляме.

Систему (1.1), (1.2) преобразуем теперь таким образом, чтобы функции, входящие в преобразованную систему, имели непосредственный физический смысл. Этого можно достигнуть путем дифференцирования закона Гука по времени, последующего сложения и вычитания выражений для напряжений σ_{rr} и σ_{zz} .

Действуя указанным способом и вводя затем независимые переменные и функции согласно соотношениям

$$\begin{aligned} r^\circ &= \frac{r}{h}, \quad z^\circ = \frac{z}{h}, \quad t^\circ = \frac{at}{h}, \quad \rho = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{zz}}{2\rho a^2} \\ q &= \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{zz}}{2\rho a^2}, \quad \tau = \frac{\tau_{rz}}{\rho a^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho a^2}, \quad u^\circ(r^\circ, z^\circ, t^\circ) = a^{-1} \frac{\partial u_r}{\partial t} \\ v^\circ(r^\circ, z^\circ, t^\circ) &= a^{-1} \frac{\partial u_z}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \\ \gamma &= \frac{a}{b} > 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

системы (1.1), (1.2) перепишем в следующей эквивалентной форме (индекс внизу означает частное дифференцирование):

$$\begin{aligned} u_t - p_r - q_r - \tau_z &= (p + q - \sigma)/r \\ v_t - p_z + q_z - \tau_r &= \frac{\tau}{r} \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} p_t - u_r - v_z &= (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} u/r \\ \gamma^2 q_t - u_r + v_z &= 0 \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} \sigma_t - u_r - v_z &= \gamma^2 (\gamma^2 - 2)^{-1} u/r \\ \gamma^2 \tau_t - u_z - v_r &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Таким образом, получим систему шести уравнений первого порядка относительно шести искомых функций u, v, p, q, σ, τ с переменными коэффициентами; здесь и в дальнейшем градус у независимых и зависимых переменных ради простоты опущен. Система (1.4) зависит от одного материального параметра γ .

Чтобы система (1.4) приобрела симметричный вид, сделаем следующее преобразование. Вместо пятого уравнения будем пользоваться разностью между уравнением пятым и третьим. Из указанной разности определим u/r и подставим в третье уравнение. В итоге получаем систему, матрицы

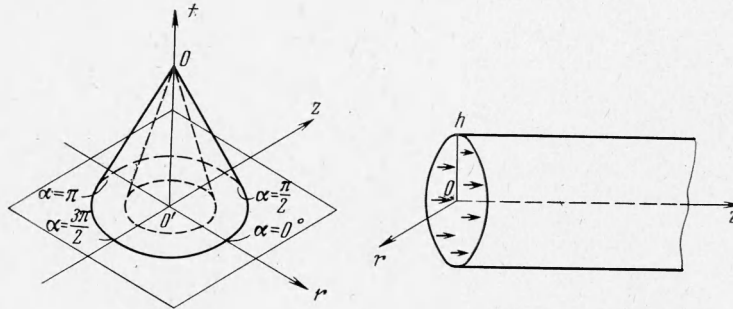
по t, r, z которой симметричны

$$\begin{aligned} u_t - p_r - q_r - \tau_z &= r^{-1}(p + q - \sigma) \\ v_t - p_z + q_z - \tau_r &= r^{-1}\tau \\ \gamma^1(3\gamma^2 - 4)^{-1}p_t + \gamma^2(2 - \gamma^2)(3\gamma^2 - 4)^{-1}\sigma_t - u_r - v_z &= 0 \\ \gamma^2q_t - u_r + v_z &= 0 \\ \gamma^2(2 - \gamma^2)(3\gamma^2 - 4)^{-1}p_t + \gamma^2(\gamma^2 - 1)(3\gamma^2 - 4)^{-1}\sigma_t &= r^{-1}u \\ \gamma^2\tau_t - u_z - v_r &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поверхность $\Phi(r, z, t) = \text{const}$ будет характеристической для системы (1.5), если удовлетворяется следующее дифференциальное уравнение

$$[\Phi_t^2 - \Phi_r^2 - \Phi_z^2][\Phi_t^2 - (\Phi_r^2 + \Phi_z^2)\gamma^{-2}]\Phi_t^2\gamma^2(\gamma^2 - 2)^{-1} = 0 \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) дает два семейства круговых конусов, тангенсы углов полураствора которых с осью t составляют соответственно 1 и $1/\gamma$. Равенство $\Phi_t = 0$ дает ось конусов [4]. Геометрия конусов показана на фиг. 1, а.



Фиг. 1

При помощи стандартной процедуры получаем два соотношения на наружном и внутреннем конусах соответственно

$$\begin{aligned} \cos \alpha du + \sin \alpha dv + dp + \cos 2\alpha dq + \sin 2\alpha d\tau &= -S_1(\alpha) dt \\ -\sin \alpha du + \cos \alpha dv - \gamma \sin 2\alpha dq + \gamma \cos 2\alpha d\tau &= -S_2(\alpha) dt \quad (1.7) \\ S_1(\alpha) &= (2\gamma^{-2} - 1) \sin^2 \alpha u_r + (2^{-1} - \gamma^{-2}) \sin 2\alpha u_z + (2^{-1} - \gamma^{-2}) \times \\ &\times \sin 2\alpha v_r + (2\gamma^{-2} - 1) \cos^2 \alpha v_z - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha q_r + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha q_z + \\ &+ \sin \alpha \cos 2\alpha \tau_r - \cos \alpha \cos 2\alpha \tau_z - \cos \alpha (p + q - \sigma) r^{-1} - \\ &- \sin \alpha \tau r^{-1} - (1 - 2\gamma^{-2}) ur^{-1} \quad (1.8) \\ S_2(\alpha) &= 2^{-1}\gamma^{-1} \sin 2\alpha u_r - \gamma^{-1} \cos^2 \alpha u_z + \gamma^{-1} \sin^2 \alpha v_r - 2^{-1}\gamma^{-1} \times \\ &\times \sin 2\alpha v_z + \sin \alpha p_r - \cos \alpha p_z - \cos 2\alpha \sin \alpha q_r + \cos 2\alpha \cos \alpha q_z - \\ &- 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \tau_r + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \tau_z + \sin \alpha (p + q - \sigma) r^{-1} - \cos \alpha \tau r^{-1} \end{aligned}$$

В уравнениях (1.6) и (1.8) через α обозначен произвольный параметр ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$).

Покажем, как можно решить задачу Коши для системы (1.5), т. е. как можно определить все шесть функций в точке O , зная их в произвольной точке плоскости $t = 0$ (плоскость значений начальных данных). Проинтегрируем уравнения (1.7) и (1.8) вдоль произвольной образующей (бихарактеристики) каждого конуса от точки O до пересечения с плоскостью rz (положение образующей на круговых конусах фиксируется заданием

параметра α , например $\alpha = \alpha_i$)

$$\delta u \cos \alpha_i + \delta v \sin \alpha_i + \delta p + \delta q \cos 2\alpha_i + \delta \tau \sin 2\alpha_i = -\frac{1}{2} k [S_1(\alpha_i)_i + S_1(\alpha_i)_O] - W_1(\alpha_i) + O(k^3) \quad (1.9)$$

$$-\delta u \sin \alpha_i + \delta v \cos \alpha_i - \delta q \gamma \sin 2\alpha_i + \delta \tau \gamma \cos 2\alpha_i = -\frac{1}{2} k [S_2(\alpha_i)_i + S_2(\alpha_i)_O] - W_2(\alpha_i) + O(k^3) \quad (1.10)$$

где для краткости введены обозначения

$$W_1(\alpha_i) = (u' - u_i) \cos \alpha_i + (v' - v_i) \sin \alpha_i + (p' - p_i) + (q' - q_i) \times \\ \times \cos 2\alpha_i + (\tau' - \tau_i) \sin 2\alpha_i$$

$$W_2(\alpha_i) = -(u' - u_i) \sin \alpha_i + (v' - v_i) \cos \alpha_i - \gamma (q' - q_i) \sin 2\alpha_i + \\ + (\tau' - \tau_i) \gamma \cos 2\alpha_i.$$

В формулах (1.9) и (1.10) через k обозначен шаг по времени $k = \Delta t = OO'$; нижний индекс i означает, что соответствующая функция вычисляется в точке, где бихарактеристика $\alpha = \alpha_i$ внутреннего и наружного конуса пересекает плоскость начальных данных $t = 0$; индекс O — значение функции в точке O , штрих означает, что функция вычисляется в точке O' , δu — приращение $u_O - u'$ и т. д.

Исходную систему уравнений (1.5) проинтегрируем вдоль оси конуса. Тогда получим, используя, например, первое уравнение

$$\delta u = \frac{1}{2} k [(p_r + q_r + \tau_z + r^{-1}(p + q - \sigma))_O + \\ + (p_r + q_r + \tau_z + r^{-1}(p + q - \sigma))'] + O(k^3) \quad (1.11)$$

и пять аналогичных уравнений.

Значения α_i в формулах (1.9) и (1.10) ради удобства выбираем равными $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, фиксируя тем самым четыре бихарактеристики на внутреннем и наружном конусах. Вследствие чего получаем систему восьми линейных алгебраических уравнений, добавляя к которой шесть соотношений типа (1.11), получаем систему четырнадцати уравнений. Из этой системы следует исключить производные шести функций в точке O , где эти производные неизвестны.

Разностную схему, пригодную для использования ЭВМ, можно получить следующим образом. Соотношения, полученные для наружного конуса на основе равенства (1.9) на четырех бихарактеристиках $\alpha_i = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, обозначим цифрами 1, 2, 3, 4 соответственно. Соотношения, полученные для внутреннего конуса на основе равенства (1.10) при тех же значениях α_i , обозначим цифрами 5, 6, 7, 8. Вычитая из соотношения 8 соотношение 6, получаем

$$2\delta u = -\frac{1}{2} k S_2\left(\frac{3\pi}{2}\right)_i - W_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} k S_2\left(\frac{\pi}{2}\right)_i + W_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2} k [2(p_r + q_r + r^{-1}(p + q - \sigma))]_O \quad (1.12)$$

Путем вычитания из соотношения 1 соотношения 3 получаем

$$2\delta u = -\frac{k}{2} S_1(0)_i - W_1(0) + \frac{k}{2} S_1(\pi) + W_1(\pi) + \\ + \frac{k}{2} \{2[\tau_z + r^{-1}(p + q - \sigma)]\}_O \quad (1.13)$$

Из соотношений (1.12) и (1.13) получаем производные $\frac{1}{2} k (p_r + q_r)_O$ и $\frac{1}{2} k (\tau_z)_O$ в точке O , что дает возможность исключить их в правой части уравнения (1.11). Аналогично исключаются производные из других пяти

уравнений типа (1.11), в результате получаем разностную систему уравнений для определения шести искомых функций u, v, p, q, σ, τ в точке O

$$\begin{aligned} \delta u - \frac{k}{2r} \delta p + \frac{k}{2r} \delta \sigma - \frac{k}{2r} \delta q &= \frac{a_1 - a_3}{2} - \frac{b_2 - b_4}{2} - \frac{1}{2} k (p_r + q_r + \tau_z)' \\ \delta v - \frac{k}{2r} \delta \tau &= \frac{a_2 - a_4}{2} + \frac{b_1 - b_3}{2} - \frac{1}{2} k (p_z - q_z + \tau_r)' \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p - (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} \frac{k}{2r} \delta u &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} - \quad (1.14) \\ &\quad - (\gamma^2 - 2) \gamma^{-2} \frac{k}{2} (u_r + v_z)' + (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} \gamma^{-2} \frac{k}{r} u^r \\ \gamma^2 \delta q &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4}{2} + (\gamma^2 - 2) \gamma^{-2} \frac{k}{2} (u_r - v_z)' \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta \sigma + \gamma^2 (2 - \gamma^2) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta p - \frac{k}{2r} \delta u &= k r^{-1} u' \\ \gamma \delta \tau &= \frac{b_1 - b_2 + b_3 - b_4}{2} - \frac{1}{2} k \gamma^{-1} (u_z + v_r)' \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{1}{2} k S_1(\alpha_i)_i - W_1(\alpha_i), & b_i &= -\frac{1}{2} k S_2(\alpha_i)_i - W_2(\alpha_i) \\ \alpha_i &= (i - 1) \pi / 2, & i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Система шести уравнений (1.14) позволяет выразить шесть функций в точке O через начальные значения этих функций и производных, заданных в точке O' плоскости начальных данных и в восьми соседних точках названной плоскости. Перемещая точку O' в плоскости $t = 0$, можно получить значения функций в плоскости, параллельной плоскости $t = 0$ и образованной вершинами круговых характеристических конусов. Эта плоскость отстоит от плоскости начальных данных на расстоянии $k = \Delta t$. Действуя дальше аналогичным образом и выбирая $\Delta t, \Delta r, \Delta z$ достаточно малым, можно получить все шесть функций осесимметричной задачи линейной динамической теории упругости для всех r, z, t .

Отметим в заключение этого пункта, что система (1.14) распадается на связанную систему относительно пяти приращений для функций u, p, v, q, τ , отличающуюся от случая плоской задачи членами порядка k/r . Приращение же для σ является линейной комбинацией приращений для p и u .

2. Удар по торцу полубесконечного цилиндра. Предположим, что полубесконечный круговой упругий цилиндр радиуса h (материал однороден и изотропен) в момент времени $t = 0$ подвергается известному воздействию в точках торца (фиг. 1, б). Задача состоит в определении параметров напряженно-деформированного состояния в области $0 \leq r \leq h, z \geq 0$ при $t > 0$ в предположении, что скорость продольной волны равна a , скорость поперечной волны равняется b , плотность материала ρ .

В безразмерном виде краевая задача сводится к интегрированию в области $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z < \infty, t > 0$ системы уравнений (1.5) при нулевых начальных

$$u = v = p = q = \sigma = \tau = u_t = v_t = p_t = q_t = \sigma_t = \tau_t = 0 \quad \text{при } t \leq 0 \quad (2.1)$$

и следующих граничных условиях:

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad 0 \leq z < \infty, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$v = v_0(t), \quad u = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

где $v_0(t)$ — произвольная заданная функция. В начальный момент в цилиндре был покой, боковая поверхность свободна от напряжений, на торце

задается вектор скорости частиц (но могут задаваться и другие условия). Поставленную задачу решаем численным методом, сущность которого изложена в п. 1.

Система (1.14) позволяет рассчитать произвольную внутреннюю точку цилиндра. Для точек границы она не может быть непосредственно использована ввиду того, что некоторые бихарактеристики проходят вне рассматриваемой области и пересекают плоскость начальных данных $t = 0$ в точках, в которых решение не определено. Для торцового участка $z = 0$, $0 \leq r \leq 1$ входящие в систему (1.14) члены a_4, b_4 определяются через точки, которые находятся левее плоскости $z = 0$. Исключая $a_4 b_4$ из соотношений (1.14), получаем систему четырех уравнений относительно шести приращений, но если к ней прибавить граничные условия (2.3), то система оказывается замкнутой и позволяет получить решение для произвольной точки торца, кроме угловой.

Интегрирование исходной системы уравнений проводилось с точностью до $O(k^3)$. Если систему (1.14) расписать подробно, то можно получить выражения следующих типов:

$$\begin{aligned} f(r + ck, z) - f(r - ck, z) & \quad (2.4) \\ f(r + ck, z) + f(r - ck, z) - 2f(r, z) & \\ k [f_r(r, z + ck) - f_r(r, z - ck)] & \\ k [f_r(r, z + ck) + f_r(r, z - ck) - 2f_r(r, z)] & \end{aligned}$$

где $c = 1, 1/\gamma$ для внешнего и внутреннего конусов. Разложение функции f в ряд Тейлора в окрестности точки (r, z) показывает, что выражения (2.4) отличаются соответственно от следующих величин членами порядка $O(k^3)$

$$2ckf_r(r, z), \quad (ck)^2 f_{rr}(r, z), \quad 2ck^2 f_{rz}(r, z), \quad 0 \quad (2.5)$$

Необходимая точность будет достигнута, если разностная аппроксимация первой и второй частных производных в точке (r, z) имеет точность $O(k^2)$ и $O(k)$. Для внутренних точек области удобно использовать центрированные разности, для границы — аппроксимацию вперед и назад. После всех преобразований, обеспечивающих точность порядка $O(k^3)$, систему (1.14) удобно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \delta u - \frac{k}{2r} \delta p + \frac{k}{2r} \delta \sigma - \frac{k}{2r} \delta q &= \frac{k^2}{2} (1 - \gamma^{-2}) v_{rz} + \frac{k^2}{2} (u_{rr} + \gamma^{-2} u_{zz}) + \\ &+ \frac{k^2}{2r} (1 - 2\gamma^{-2}) u_r + k \left(\frac{p + q - \sigma}{r} \right)' + k (p_r + q_r + \tau_z) \\ \delta v - \frac{k}{2r} \delta \tau &= \frac{k^2}{2} (1 - \gamma^{-2}) u_{rz} + \frac{k^2}{2} (v_{zz} + \gamma^{-2} v_{rr}) + \frac{k^2}{2r} (1 - 2\gamma^{-2}) u_z + \\ &+ \frac{k}{r} \tau' + k (p_z - q_z + \tau_r) \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p - (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} \frac{k}{2r} \delta u &= \\ &= \frac{k^2}{2} (2\tau_{rz} + p_{zz} + p_{rr} + q_{rr} - q_{zz}) + \\ &+ k (u_r + v_z) + k (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} \frac{u'}{r} + \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r) + \frac{k^2}{2r} \tau_z \\ \gamma^2 \delta q &= \frac{k^2}{2} (p_{rr} + q_{rr} - p_{zz} + q_{zz}) + k (u_r - v_z) + \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r) - \frac{k^2}{2r} \tau_z \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta \sigma + \gamma^2 (2 - \gamma^2) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta p - \frac{k}{2r} \delta u &= \frac{k}{r} u' \\ \gamma^2 \delta \tau &= \frac{k^2}{2} (2p_{rz} + \tau_{rr} + \tau_{zz}) + k (u_z + v_r) + \frac{k^2}{2r} (\tau_r + p_z + q_z - \sigma_z) \end{aligned}$$

Произвольная точка торца $z = 0$, $0 \leq r < 1$, кроме угловой, рассчитывается на основе системы уравнений

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\frac{k}{2r} \right)^2 (3\gamma^2 - 4) \gamma^{-2} (\gamma^2 - 1)^{-1} \right] \delta u - \frac{k}{2r} (\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p - \frac{k}{2r} \delta q + \\ & + \gamma \delta \tau + \left(\frac{k}{2r} \right)^2 2 (3\gamma^2 - 4) (\gamma^2 - 1)^{-1} \gamma^{-2} u' = \frac{k^2}{2} (1 - \gamma^{-2}) v_{rz} + \\ & + \frac{k^2}{2} (u_{rr} + 2\gamma^{-1} p_{rz} + \gamma^{-1} \tau_{rr}) + k (p_r + q_r + \tau_z) + k \gamma^{-1} (v_r + u_z) + \\ & + \frac{k^2}{2r} (1 - 2\gamma^{-2}) u_r + \gamma^{-1} (\tau_r + p_z + q_z - \sigma_z) + \frac{k}{r} (p + q - \sigma)' \\ \delta v - (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} \frac{k}{2r} \delta u + \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p - \frac{k}{2r} \delta \tau = \frac{k^2}{2} (1 - \gamma^{-2}) u_{rz} + \\ & + \frac{k^2}{2} (2\tau_{rz} + p_{rr} + q_{rr} + \gamma^{-2} v_{rr}) + k (p_z - q_z + \tau_r) + k (u_r + v_z) + \\ & + \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r + \tau_z) + \frac{k^2}{2r} (1 - 2\gamma^{-2}) u_z + \frac{k}{r} \tau' + \frac{k}{r} (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} u' \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p - (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} \frac{k}{2r} \delta u + \gamma^2 \delta q = k^2 (\tau_{rz} + p_{rr} + q_{rr}) + \\ & + \frac{k}{r} (p_r + q_r + \sigma_r) + \frac{k}{r} (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} u' + 2ku_r \\ - \frac{k}{2r} \delta u + \gamma^2 (2 - \gamma^2) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta p + \gamma^2 (\gamma^2 - 1) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta \sigma = \frac{k}{r} u' \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить разрешающую систему уравнений для расчета точек свободной поверхности $r = 1$, $0 \leq z < \infty$. Она получается исключением из системы (1.14) значений a_1 , b_1 и добавлением граничных условий при $r = 1$, $z > 0$.

Для угловой точки $r = 1$, $z = 0$ система (1.14) разрешается таким образом, чтобы исключить a_1, b_1, a_4, b_4 (так как соответствующие конусы проходят вне рассматриваемой области), с добавлением условий на боковой поверхности $r = 1$ и на торце $z = 0$.

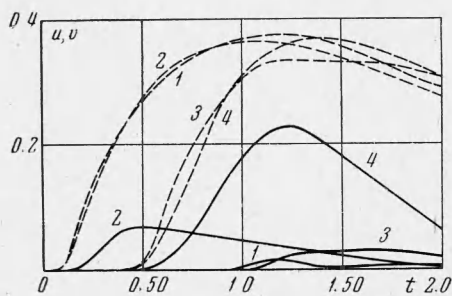
В результате получаем систему двух уравнений

$$\begin{aligned} - \frac{k}{2r} \delta u + \gamma^2 (2 - \gamma^2) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta p + \gamma^2 (\gamma^2 - 1) (3\gamma^2 - 4)^{-1} \delta \sigma = \frac{k}{r} u' \\ \left[1 + (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} \frac{k}{2r} \right] \delta u - \delta v - \left[\frac{k}{2r} + \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} \right] \delta p - \frac{k}{2r} \delta q + \\ + \frac{k}{2r} \delta \sigma + \left(\gamma + \frac{k}{2r} \right) \delta \tau = - \frac{k^2}{2} (1 - \gamma^{-2}) (u_{rz} - v_{rz}) - \frac{k^2}{2} (2\tau_{rz} - 2\gamma^{-1} p_{rz}) + \\ + \frac{k^2}{2r} (1 - 2\gamma^{-2}) (u_r - u_z) + k (p_r + q_r + \tau_z) - k (p_z - q_z + \tau_r) + \\ + k \gamma^{-1} (u_z + v_r) - k (u_r + v_z) + \frac{k}{r} (p + q - \sigma)' - \frac{k}{r} (\gamma^2 - 2) (\gamma^2 - 1)^{-1} u' - \\ - \frac{k}{r} \tau' - \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r - \gamma^{-1} p_z - \gamma^{-1} q_z + \gamma^{-1} \sigma_z) - \frac{k^2}{2r} (\tau_z - \gamma^{-1} \tau_r) \end{aligned}$$

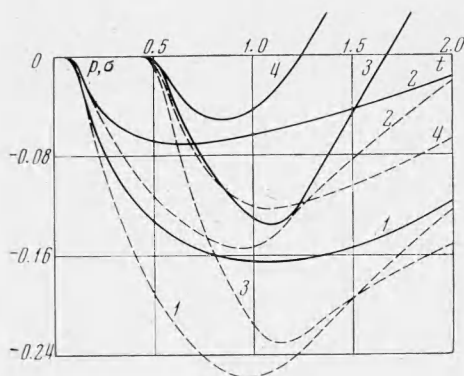
к которой следует присоединить граничные условия при $r = 1$ и $z = 0$. В итоге получается система шести уравнений для определения шести приращений в угловой точке.

Методика расчета для полого цилиндра требует формулирования уравнений еще для одной угловой точки со свободной внутренней поверхностью, что делается аналогично изложенному выше. Система уравнений в этом случае не содержит особенности при $r \rightarrow 0$.

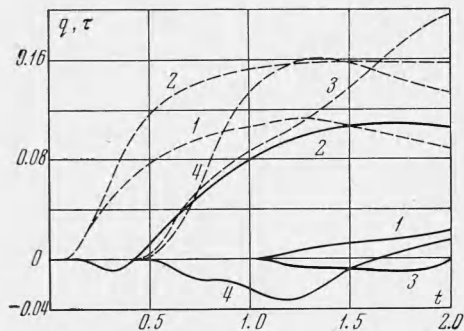
В случае сплошного цилиндра уравнения (1.5) содержат члены с множителем $1/r$, но при $r = 0$ в этих членах числитель также равен нулю,



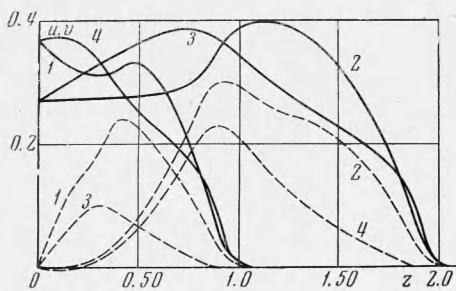
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

как нечетная функция r для u и τ и из условия $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ для $p + q = \sigma$, т. е. эти члены дают неопределенность типа $0/0$. Предел такой неопределенности по правилу Лопиталя стремится к нулю, поскольку производная по r функций p, q, σ обращается в нуль при $r \rightarrow 0$ в силу того, что каждая из них является четной функцией r и имеет непрерывную производную по r в окрестности точки $r = 0$.

Из физических соображений следует, что на оси $r = 0$ система уравнений для плоской задачи и система уравнений для осесимметричной задачи должны давать одинаковое решение. Можно показать, что предел функций u_r, τ_r при $r \rightarrow 0$ также равен нулю, тем самым предполагается, что неопределенность в уравнениях (1.5) носит чисто математический характер.

Приведем пример расчета. Изложенным методом интегрировалась система уравнений (1.5) при условиях (2.1) — (2.3) для следующих значений исходных данных:

$$\gamma = 1.87, v_0(t) = te^{-t} \text{ при } t \geq 0, \\ \Delta r = \Delta z = 0.025, \Delta t = 0.0125,$$

$$\Delta t / \Delta r = 0.5$$

Результаты некоторых расчетов представлены графиками на фиг. 2—5. Изменение скоростей частиц u (сплошные кривые) и v (пунктирные кривые) во времени в четырех фиксированных точках с координатами $(r = 0.1, z = 0.1)$, $(r = 0.9, z = 0.1)$, $(r = 0.1, z = 0.5)$, $(r = 0.9, z = 0.5)$ показано на фиг. 2 (кривые 1, 2, 3, 4 соответственно). Нижний индекс означает координату r , верхний — координату z . Значения поперечной скорости u в точках 2 и 4 на порядок больше аналогичных значений в точках 1 и 3, что объясняется близостью последних точек к оси, где движение квазиодномерно. Поперечные и продольные скорости в точке 4 одного порядка.

Напряжения p (пунктирные кривые) и σ (сплошные кривые) в тех же точках представлены на фиг. 3, из которой видно, что p и σ в точках 1 и 3 примерно в 2 раза больше напряжений в точках 2 и 4. Изменение напря-

жений q (пунктирные кривые) и τ (сплошные кривые) во времени в фиксированных точках показано на фиг. 4. Влияние дифрагированных волн наглядно видно из кривой для τ в точке 4, влияние дифракции в точке 3 незначительно из-за интерференции волн.

На фиг. 5 даны профили скоростей u (пунктирные кривые), v (сплошные кривые) для значений r и t , равных (1.0, 1.0), (1.0, 2.0), (0.8, 1.0) и (0.8, 2.0) соответственно (кривые 1, 2, 3, 4 на фигуре).

Величины скоростей в упомянутых сечениях сравнимы между собой и характер их изменения в значительной степени определяется граничными условиями на торце с учетом явления дифракции.

Сравнение результатов данных расчетов с аналогичными результатами для плоской задачи (полуполоса с заданными скоростями точек на торце) [6] показывает качественное совпадение основных параметров напряженно-деформированного состояния полубесконечного кругового цилиндра и полуполосы.

Поступила 19 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. H a n a g u d S., R o s s B., S i d h u G. Elastic-plastic impact of plates. Israel J. Technol., 1969, vol. 7, No. 1, 2.
2. S p i l l e r s W. R., C a l l e g a r i A. Impact of two elastic cylinders: short-time solution. Internat. J. Mech. Sci., 1969, vol. 11, No. 10.
3. B u t l e r D. S. The numerical solution of hiperbolic systems of partial differential equations in three independent variables. Proc. Roy. Soc., London, 1960, vol. A 255, No. 1281, pp. 232—252.
4. К л и ф т о н Р. Дж. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости. Сб. перев. «Механика», 1968, № 1.
5. В а с и л ь к о в с к и й С. Н. Численный расчет дифракции упругих и пластических волн напряжений. В сб. «Тр. конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности», Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1969.
6. С а б о д а ш П. Ф., Ч е р е д н и ч е н к о Р. А. Численное решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом пространственных характеристик. Аннот. докл. V Всес. симпозиума по дифракции и распространению волн. Л., Изд-во ЛГУ, 1970.