РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СТЕРЖНЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. И. Долбин (Москва)

Рассматривается задача о распространении гармонических волн в идеально проводящем сплошном упругом цилиндрическом стержне, находящемся внутри идеально проводящей цилиндрической трубы. В пространстве между трубой и стержнем имеется постоянное однородное продольное магнитное поле. Получено дисперсионное уравнение. Рассмотрен случай изгибных колебаний.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим идеально проводящий сплошной стержень радиуса a, находящийся в идеально проводящей цилиндрической трубе с внутренним радиусом b. В пространстве между трубой и стержнем имеется однородное постоянное магнитное поле с напряженностью H. Таким образом, в цилиндрической системе координат r, φ, z поле $\mathbf{H}$ имеет вид $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$. Внутри стержня поля нет. Тогда на поверхность стержня магнитное поле оказывает давление

$$p = {}^1/_8 H^2 / \pi \tag{1.1}$$

Следовательно, в равновесном состоянии из уравнений равновесия вытекает, что

$$\sigma_{rr}{}^\circ = \sigma_{\varphi\varphi}{}^\circ = -{}^1/_8\, H^2 / \pi \tag{1.2}$$

Рассмотрим распространение гармонических волн в стержне таких, что смещения точек стержня вследствие колебаний описываются вектором

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(r)\, e^{i(\omega t + \nu\varphi + kz)}$$

$$\mathbf{u} = \{u_r, u_\varphi, u_z\}, \qquad \mathbf{U}(r) = \{U(r), V(r), W(r)\} \tag{1.3}$$

Таким образом, полный вектор смещения будет $\mathbf{u}' = \mathbf{u}^\circ + \mathbf{u}$. Значком $^\circ$ обозначены равновесные значения величин, штрихом — их возмущенные значения, без значка — их малые изменения, вызванные возмущением.

Уравнениям движения удовлетворяют следующие выражения для амплитуд вектора смещения [1]:

$$U(r) = A\frac{dJ_\nu(\alpha r)}{dr} + Bk\frac{dJ_\nu(\beta r)}{dr} + C\nu\frac{J_\nu(\beta r)}{r}$$

$$V(r) = Ai\nu\frac{J_\nu(\alpha r)}{r} + Bik\nu\frac{J_\nu(\beta r)}{r} + Ci\frac{dJ_\nu(\beta r)}{dr} \tag{1.4}$$

$$W(r) = AikJ_\nu(\alpha r) - Bi\beta^2 J_\nu(\beta r), \qquad \alpha^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} - k^2, \qquad \beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} - k^2$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные. Так как первоначально внутри стержня поля не было и стержень — идеально проводящий, то и внутри деформированного стержня поля не будет.

Представим возмущенное магнитное поле вне стержня таким образом: $\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{h}$, где $\mathbf{h}$ — малое возмущение поля вследствие колебаний стержня. Так как в пространстве между стержнем и трубой $\operatorname{div}\mathbf{H}' = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H}' = 0$, то можно взять $\mathbf{h} = -\nabla\Psi$. Функцию Ψ, которая удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Psi = 0$, будем искать в виде

$$\Psi = \psi(r)\, e^{i(\omega t + \nu\varphi + kz)}$$

В результате получим

$$\Psi(r) = FiI_\nu(kr) + GiK_\nu(kr) \tag{1.5}$$

Здесь F, G — произвольные константы, $I_\nu(kr)$ $K_\nu(kr)$ — модифицированные функции Бесселя.

На возмущенной поверхности S' стержня и поверхности трубы вследствие их идеальной проводимости должны выполняться следующие граничные условия: равенство нулю нормальной составляющей [2] магнитного поля $\mathbf{H}'$, а также условия, связывающие напряжения σ_{ij}' внутри стержня с магнитным давлением на его поверхности, равным $p' = {}^1/_8 H'^2 / \pi$; имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{H}'\cdot\mathbf{n}' = 0, \quad {}^1/_8\, H'^2 n_i' / \pi + \sigma_{ij}' n_j' = 0 \ \text{ на } S' \\ H_r' = 0 \quad \text{при } r = b; \qquad i, j = r, \varphi, z \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к возмущенной поверхности стержня, n_i' — ее компоненты. Для нормали $\mathbf{n}'$ может быть использована приближенная формула

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n}^\circ - \nabla u_r,$$

где u_r — функция только координат φ, z на поверхности стержня $S°$. На поверхности $S°$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \nabla [FiI_\nu(kr) + GiK_\nu(kr)]\, e^{i(\omega t+\nu\varphi+kz)}$$

$$\frac{H'^2}{8\pi} = \frac{H^2}{8\pi} + \frac{H}{4\pi} k [FI_\nu(kr) + GK_\nu(kr)]\, e^{i(\omega t+\nu\varphi+kz)} \qquad (r = a) \tag{1.7}$$

Подставляя в (1.6) значения поля (1.7), напряжений σ_{ij}', выраженных через перемещения (1.4), и учитывая (1.2), получим

$$U(r)\, H + FI_\nu'(kr) + GK_\nu'(kr) = 0, \quad \frac{H}{4\pi} k [FI_\nu(kr) + GK_\nu(kr)]\, e^{i(\omega t+\nu\varphi+kz)} + \sigma_{rr} = 0 \tag{1.8}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \qquad {}^1/_8\, H^2 iku_r / \pi - \sigma_{zz} = 0 \qquad (r = a), \qquad FI_\nu'(kb) + GK_\nu'(kb) = 0$$

В (1.8) штрихом обозначены производные по взятым при $r = a$ аргументам функций Бесселя и Макдональда. Используя (1.4), запишем (1.8) в перемещениях

$$b_{i1}\frac{A}{a^2} + b_{i2}\frac{B}{a^3} + b_{i3}\frac{C}{a^2} + b_{i4}\frac{F}{a\sqrt{8\pi E}} + b_{i5}\frac{G}{a\sqrt{8\pi E}} = 0 \tag{1.9}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, \; E \text{ — модуль Юнга})$$

Элементы определителя $|b_{ij}|$ системы (1.9) с неизвестными A / a^2, B / a^3, C / a^2, $F / a\sqrt{8\pi E}$, $G/a\sqrt{8\pi E}$ имеют вид

$$b_{11} = \frac{H}{\sqrt{8\pi E}}\alpha a J_\nu'(\alpha a), \qquad b_{12} = \frac{H}{\sqrt{8\pi E}} ka\beta a J_\nu'(\beta a)$$

$$b_{13} = \frac{H}{\sqrt{8\pi E}}\nu J_\nu(\beta a), \qquad b_{14} = I_\nu'(ka), \qquad b_{15} = K_\nu'(ka)$$

$$b_{21} = \alpha a J_\nu'(\alpha a) + \left[a^2k^2\left(\frac{\rho\omega^2}{Ek}(1+\varepsilon) - 1\right) - \nu^2\right] J_\nu(\alpha a)$$

$$b_{22} = ka\beta a J_\nu'(\beta a) + ka(\beta^2a^2 - \nu^2) J_\nu(\beta a), \qquad b_{23} = \nu\,(J_\nu(\beta a) - \beta a J_\nu'(\beta a)) \tag{1.10}$$

$$b_{24} = -\frac{2H(1+\varepsilon)}{\sqrt{8\pi E}} akI_\nu(ka), \qquad b_{25} = -\frac{2H(1+\varepsilon)}{\sqrt{8\pi E}} akK_\nu(ka)$$

$$b_{31} = \nu\,[\alpha a J_\nu'(\alpha a) - J_\nu(\alpha a)], \qquad b_{32} = \nu ka\,[\beta a J_\nu'(\beta a) - J_\nu(\beta a)]$$

$$b_{33} = (\nu^2 - {}^1/_2\,\beta^2a^2) J_\nu(\beta a) - \beta a J_\nu'(\beta a), \qquad b_{34} = b_{35} = b_{44} = b_{45} = 0$$

$$b_{41} = \left(\frac{H^2}{8\pi E} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) ka\alpha a J_\nu'(\alpha a), \qquad b_{42} = \left(\frac{H^2}{8\pi E} - \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\right)\nu ka J_\nu(\beta a)$$

$$b_{42} = \left(\frac{H^2}{8\pi E}k^2a^2 - \frac{k^2a^2}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\beta^2a^2}{2(1+\varepsilon)}\right)\beta a J_\nu'(\beta a), \qquad b_{51} = b_{52} = b_{53} = 0$$

$$b_{54} = I_\nu'(kb), \qquad b_{55} = K_\nu'(kb)$$

Здесь ε — коэффициент Пуассона.

2. Дисперсионное уравнение. Приравнивая нулю определитель системы (1.9) с элементами (1.10), получим дисперсионное уравнение

$$|b_{ij}| = 0 \tag{2.1}$$

Введем обозначения

$$\alpha^2a^2 = x^2(y^2(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1} - 1) = X^2, \qquad h^2 = {}^1/_8 H^2/\pi E$$

$$\beta^2a^2 = x^2(2y^2(1+\varepsilon) - 1) = Y^2, \quad y^2 = \rho\omega^2 / k^2E, \quad x = ka$$

Тогда элементы определителя (2.1) будут иметь вид

$$b_{11} = hXJ_\nu'(X), \qquad b_{12} = hYJ_\nu'(Y), \qquad b_{13} = h\nu J_\nu(Y), \qquad b_{14} = I_\nu'(x), \qquad b_{15} = K_\nu'(x)$$

$$b_{21} = XJ_\nu'(X) + [x^2(y^2(1+\varepsilon) - 1) - \nu^2] J_\nu(X)$$

$$b_{22} = YJ_\nu'(Y) + (Y^2 - \nu^2) J_\nu(Y), \qquad b_{23} = \nu\,[J_\nu(\beta a) - YJ_\nu'(\beta a)] \tag{2.2}$$

$$b_{24} = -2h(1+\varepsilon)\, xI_\nu(x), \qquad b_{25} = -2h(1+\varepsilon)\, xK_\nu(x)$$

$$b_{31} = \nu\,[XJ_\nu'(X) - J_\nu(X)], \qquad b_{33} = (\nu^2 - {}^1/_2\, Y^2) J_\nu(Y) - YJ_\nu'(Y)$$

$$b_{32} = \nu[YJ'_\nu(Y) - J_\nu(Y)], \quad b_{34} = b_{35} = 0, \qquad b_{41} = (h^2 - 1/1+\varepsilon)\, XJ_\nu'(X)$$

$$b_{42}=\left(h^2+y^2-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)YJ_\nu'(Y),\qquad b_{43}=\left(h^2-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}\right)\nu J_\nu(Y),$$
$$b_{44}=b_{45}=0,\ b_{51}=b_{52}=b_{53}=0,\qquad b_{54}=I_\nu'(kb),\qquad b_{55}=K_\nu'(kb)$$

Разлагая определитель (2.1) с элементами (2.2) по элементам последних двух столбцов, можно привести уравнение (2.1) к виду

$$|a_{ij}|\,|c_{ij}|^{-1}+2h^2(1+\varepsilon)x^2\beta_\nu=0\qquad(i,j=1,2,3)\tag{2.3}$$

$$a_{11}=XJ_\nu'(X)+[x^2(y^2(1+\varepsilon)-1)-\nu^2]J_\nu(X)$$
$$a_{12}=YJ_\nu'(Y)+(Y^2-\nu^2)J_\nu(Y),\qquad a_{13}=\nu[J_\nu(Y)-YJ_\nu'(Y)]$$
$$c_{21}=a_{21}=\nu[XJ_\nu'(X)-J_\nu(X)],\qquad c_{31}=a_{31}=(h^2-(1+\varepsilon)^{-1})XJ_\nu'(X)$$
$$c_{22}=a_{22}=\nu[YJ_\nu'(Y)-J_\nu(Y)],\qquad c_{23}=a_{23}=(\nu^2-{}^1/_2Y^2)J_\nu(Y)-YJ_\nu'(Y)\tag{2.4}$$
$$c_{32}=a_{32}=\left(h^2+y^2-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)YJ_\nu'(Y),\qquad c_{33}=a_{33}=\left(h^2-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}\right)\nu J_\nu(Y)$$
$$c_{11}=hXJ_\nu'(X),\qquad c_{12}=hYJ_\nu'(Y),\qquad c_{13}=h\nu J_\nu(Y)$$
$$\beta_\nu=\frac{K_\nu(ka)I_\nu'(kb)-K_\nu'(kb)I_\nu(ka)}{ka[K_\nu'(ka)I_\nu'(kb)-K_\nu'(kb)I_\nu'(ka)]}$$

3. Изгибные колебания. Полагая $\nu=1$в (2.3) и (2.4), получим дисперсионное уравнение для изгибных колебаний стержня в продольном магнитном поле внутри трубы, сокращая (2.3) на общий множитель $XJ_1'(X)YJ_1'(Y)J_1(Y)$

$$|b_{ij}|\,|d_{ij}|^{-1}+2h^2(1+\varepsilon)x^2\beta=0\qquad(i,j=1,2,3)\tag{3.1}$$

$$b_{11}=1+[x^2(y^2(1+\varepsilon)-1)-1]\varphi_1(X)$$
$$b_{12}=1+(Y^2-1)\varphi_1(Y),\qquad b_{13}=1-{}^1/\varphi_1(Y)$$
$$b_{21}=d_{21}=1-\varphi_1(X),\qquad b_{22}=d_{22}=1-\varphi_1(Y)$$
$$b_{23}=d_{23}=1-{}^1/_2Y^2-1/\varphi_1(Y),\quad b_{31}=d_{31}=h^2-1/(1+\varepsilon)$$
$$b_{32}=d_{32}=h^2+y^2-1/(1+\varepsilon),\qquad b_{33}=d_{33}=h^2-{}^1/_2(1+\varepsilon)\tag{3.2}$$
$$d_{11}=d_{12}=d_{13}=1,\qquad \varphi_1(\xi)=J_1(\xi)/\xi J_1'(\xi)$$
$$\beta=\frac{K_1(ka)}{kaK_1'(ka)}\frac{[1-K_1'(kb)I_1(ka)/K_1(ka)I_1'(kb)]}{[1-K_1'(kb)I_1'(ka)/K_1'(ka)I_1'(kb)]}$$

Так как $b>a$, то при всех значениях ka и kb коэффициент $\beta<0$.

В случае длинных волн ($x\ll 1$) функция $\varphi_1(\xi)\approx 1+{}^1/_4\xi^2$. Так как

$$\frac{K_1(\xi)}{\xi K_1'(\xi)}=-\left[1+\frac{K_0(\xi)}{K_1'(\xi)}\right]$$

то, заменяя функции Бесселя при малых значениях аргумента выражениями

$$K_0(\xi)\approx-(\ln{}^1/_2\xi+C),\qquad K_1(\xi)\approx 1/\xi,\qquad I_1(\xi)\approx{}^1/_2\xi,$$

получим для β выражение

$$\beta=-\left[1+k^2a^2\left(\ln\frac{ka}{2}+C\right)\right]\frac{1+a^2/b^2}{1-a^2/b^2}\tag{3.3}$$

Здесь $C\approx 0.577$ — постоянная Эйлера. Дисперсионное уравнение (3.1) в случае длинных волн имеет вид

$$\frac{\rho\omega^2}{Ek^2}=\frac{1}{4}a^2k^2+\frac{H^2}{8\pi E}\left\{1+2\left[1+k^2a^2\left(\ln\frac{ka}{2}+C\right)\right]\frac{1+a^2/b^2}{1-a^2/b^2}\right\}\tag{3.4}$$

Так как $\beta<0$, то стержень при изгибных колебаниях в трубе при наличии продольного магнитного поля всегда устойчив.

Поступила 1 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Долбин Н. И. Распространение упругих волн в токопроводящем стержне. ПМТФ, 1962, № 2, стр. 194.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.