ПМТФ, № 5, 1968

О ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ ПЛОТНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

В. Н. Данилов

(Москва)

Выводятся приближенные уравнения для узкого (параксиального) электронного пучка с пространственной осью, обобщающие известные [1] на случай существенного поля заряда пучка. Выделяется класс пучков, для которых задача сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Известно параксиальное приближение для узкого пучка электронных траекторий в заданном поле с характерным размером неоднородности $L_* \gg a_*$, где a_* — характерная ширина пучка. В уравнения [1] можно включить и поле пространственного пучка, если плотность пучка ρ неоднородна на длинах L_*. Учет собственного поля пучка в [1] фактически не проводился. Здесь описывается попытка устранить этот пробел, что частично сделано для осесимметричного пучка с прямолинейной осью [2].

1. Закон плоских сечений. Будет удобна форма уравнений моноэнергетического пучка, в которой используются переменные Клебша ξ, ζ, χ для представления поля скорости электронов v_α

$$g^{\alpha\beta} v_\beta \xi_{,\alpha} = g^{\alpha\beta} v_\beta \zeta_{,\alpha} = (\rho g g^{\alpha\beta} v_\beta)_{,\alpha} = 0, \quad v_\alpha \equiv A_\alpha + \xi \zeta_{,\alpha} + \chi_{,\alpha} \tag{1.1}$$

Здесь q^α — криволинейные координаты с метрическим тензором $g^{\alpha\beta}$, индекс после запятой означает производную по соответствующей координате, по дважды встречающимся индексам ведется суммирование от 1 до 3; A_α — ковариантные компоненты потенциала магнитного поля H_α. Остальные уравнения стационарного нерелятивистского пучка имеют вид

$$g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = 2\varphi, \quad (g g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha})_{,\beta} = \rho, \quad g^{-2} \equiv \det|g^{\alpha\beta}| \tag{1.2}$$

Здесь φ — потенциал электрического поля, физические константы ($e > 0$ — заряд, m — масса электрона, c — скорость света) опущены, что соответствует замене обозначений

$$e\,(mc)^{-1} A_\alpha \to A_\alpha, \quad e\,(mc)^{-1} H_\alpha \to H_\alpha, \quad (e\,/\,m)\varphi \to \varphi, \quad 4\pi\,(e\,/\,m)\rho \to \rho$$

Пусть $l \equiv q^1$ продольная и $s \equiv q^2$, $q \equiv q^3$ — поперечные координаты относительно осевой линии $\mathbf{R}\,(l)$ узкого пучка связаны с декартовыми $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{s}s + \mathbf{q}q, \quad \mathbf{s} \equiv \mathbf{l}'\,/\,k, \quad \mathbf{l} \equiv \mathbf{R}', \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{l} \times \mathbf{s}, \quad \mathbf{R}' \equiv d\mathbf{R}\,/\,dl \tag{1.3}$$

Здесь l — длина дуги оси, а орты $\mathbf{l}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{q}$ образуют сопровождающий трехгранник (фиг. 1). Используя формулы Френе [3]

$$\mathbf{s}' = -k\mathbf{l} + \varkappa\mathbf{q}, \quad \mathbf{q}' = -\varkappa\mathbf{s}, \quad k \equiv |\mathbf{l}'|, \quad \varkappa k^2 \equiv (\mathbf{l} \times \mathbf{l}')\,\mathbf{l}'' \tag{1.4}$$

Здесь k — кривизна, $\varkappa$ — кручение оси, нетрудно получить

$$d\mathbf{r}^2 = \sigma^2 dl^2 + ds^2 + dq^2 - 2\varkappa q\,dl\,ds + 2\varkappa s\,dl\,dq \tag{1.5}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \sigma^2 & -\varkappa q & \varkappa s \\ -\varkappa q & 1 & 0 \\ \varkappa s & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g^2} \begin{vmatrix} 1 & \varkappa q & -\varkappa s \\ \varkappa q & \sigma^2 - \varkappa^2 s^2 & -\varkappa^2 sq \\ -\varkappa s & -\varkappa^2 sq & \sigma^2 - \varkappa^2 q^2 \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

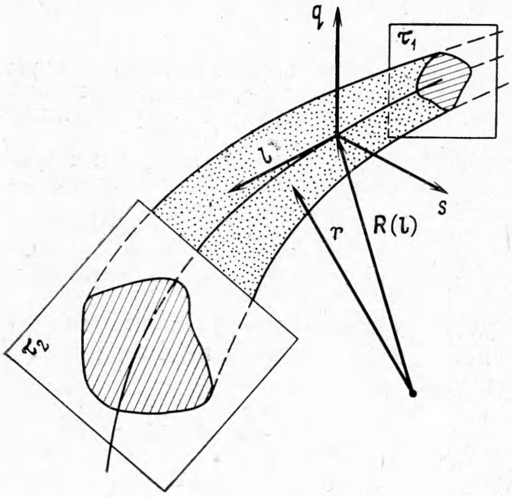
В соотношениях (1.6)

$$g^2 \equiv \det |g_{\alpha\beta}| = (1 - ks)^2, \quad \sigma^2 \equiv (1 - ks)^2 + \varkappa^2 (s^2 + q^2)$$

Далее нужно условиться, что в (1.1), (1.2), (1.6) расставлен указатель малости ε в тех местах, где малый параметр ε_* появляется в результате перехода к безразмерным величинам

$$s / a_*, \; q / a_*, \; l / L_*, \; \varkappa L_*, \; k L_*, \; \varepsilon_* \equiv a_* / L_*$$

т. е. перед k, $\varkappa$ и производными по l. Тем самым будет выделен случай узкого пучка вблизи относительно гладкой оси. Так, например, уравнения для A_α в нерелятивистском пучке выписываются в виде (1.7)



Фиг. 1

$$A_{q,s} - A_{s,q} = gH^l$$

$$A_{l,q} - \varepsilon A_{q,l} = gH^s$$

$$\varepsilon A_{s,l} - A_{l,s} = gH^q$$

$$H_{q,s} = H_{s,q}, \quad H_{l,q} = \varepsilon H_{q,l},$$

$$H_{l,s} = \varepsilon H_{s,l}, \quad H_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} H^\beta$$

Отсюда следует параксиальное приближение для A_α

$$A_l = \Omega_s q - \Omega_q s + \qquad (1.8)$$

$$+ \varepsilon^1/_2 (k\Omega_q + 2\varkappa\Omega_l) s^2$$

$$A_s = -{}^1/_2\Omega_l q, \quad A_q = {}^1/_2\Omega_l s$$

Здесь Ω_l, Ω_s, Ω_q есть значения H_l, H_s, H_q на оси. Продольную скорость v_l в сравнении с поперечными v_s, v_q и потенциал φ в сравнении с v_s^2, v_q^2 в параксиальном пучке нужно представить в виде

$$v_l = \varepsilon^{-1} v(l) + A_l + \varepsilon P_l, \quad \varphi = \varepsilon^{-2} U + \varepsilon^{-1} (E_s s + E_q q) + \Phi \qquad (1.9)$$

Учитывая сказанное, из (1.1), (1.2), (1.6), (1.8), (1.9) нетрудно получить

$$2U = v^2, \quad E_s = kv^2 - v\Omega_q, \quad E_q = v\Omega_s \qquad (1.10)$$

$$\xi_{,\tau} + u_s \xi_{,s} + u_q \xi_{,q} = \zeta_{,\tau} + u_s \zeta_{,s} + u_q \zeta_{,q} = 0, \quad \xi_{,\tau} \equiv (\partial\xi/\partial l) v$$

$$(\rho v)_{,\tau} + (u_s \rho v)_{,s} + (u_q \rho v)_{,q} = 0, \quad u_{s(q)} \equiv B_{s(q)} + \xi \zeta_{,s(q)} + \chi_{,s(q)} \qquad (1.11)$$

$$u_s^2 + u_q^2 + 2 (\xi \zeta_{,\tau} + \chi_{,\tau}) = 2\psi, \quad \psi_{,ss} + \psi_{,qq} = \rho - n, \quad dl \equiv v d\tau$$

$$B_s \equiv -{}^1/_2 \Omega q, \quad B_q \equiv {}^1/_2 \Omega s, \quad \Omega \equiv \Omega_l - 2\varkappa v, \quad 2\Phi \equiv 2\psi + v^2 (3k^2 s^2 -$$

$$- \varkappa^2 s^2 - \varkappa^2 q^2) + (\Omega_s q - \Omega_q s)^2 + vs (4k\Omega_s q - 3\Omega_q ks + 2\Omega_l \varkappa s)$$

$$n \equiv 2 (k^2 - \varkappa^2) v^2 + \Omega_s^2 + \Omega_q^2 + 2v (\varkappa\Omega_l - k\Omega_q) + U'' \qquad (1.12)$$

Здесь (1.10) соответствуют нулевому и первому приближению по ε, а (1.11) — второму. Если принять, что U — потенциал, а E_s, E_q — напряженности поля на оси, то (1.10) будут точными уравнениями для траектории электрона в поле пучка. Более прозрачно смысл уравнений (1.11) проявляется в переменных Лагранжа τ, ξ, η, где ξ, η — координаты электрона в начальном сечении $\tau = 0$

$$s,_{\tau\tau} = e_s - \Omega q,_{\tau}, \quad q,_{\tau\tau} = e_q + \Omega s,_{\tau}, \quad \Omega \equiv \Omega_l - 2\varkappa v \tag{1.13}$$

$$v\rho = j\,(\xi, \eta)\,|s,_{\xi} q,_{\eta} - s,_{\eta} q,_{\xi}|^{-1}, \quad s = s\,(\tau, \xi, \eta), \quad q = q\,(\tau, \xi, \eta) \tag{1.14}$$

$$e_{s,s} + e_{q,q} = \rho - n, \quad e_{q,s} - e_{s,q} = \dot\Omega, \; \dot\Omega \equiv d\Omega\,/\,d\tau \tag{1.15}$$

Здесь j — плотность тока в начальном сечении, точка означает производную по τ, а штрих — производную по l. Эти уравнения эквивалентны уравнениям нестационарного плоского (s, q) электронного облака на фоне переменного во «времени» τ «пространственного заряда» $n\,(\tau)$ в однородном «магнитном поле» Ω с одним отличием: уравнению неразрывности удовлетворяет плотность, умноженная на функцию времени (ρv — продольная компонента плотности тока пучка). Таким образом, получается обобщение известного закона плоских сечений [4] на случай криволинейного движения с переменной осевой скоростью. Как и должно быть, «нестационарность» магнитного поля приводит к появлению вихря $\dot\Omega$ в напряженности электрического поля e_s, e_q.

Следует отметить, что к уравнениям (1.11) приводятся: 1) уравнения немоноэнергетического пучка с энергией электронов $\mathscr{E}\,(\xi)$, 2) уравнения нестационарного (t) пучка, если принять, что параметры пучка в (1.11) допускают произвольную зависимость от $t - \tau$, т. е. нестационарные возмущения в узком пучке распространяются в виде волн, бегущих вдоль пучка со скоростью v.

Исходные уравнения для релятивистского пучка отличаются только видом (1.2)

$$g^{\alpha\beta}\, v_\alpha v_\beta = 2\varphi + (\varphi\,/\,c)^2, \quad (g g^{\alpha\beta}\, \varphi_{,\alpha})_{,\beta} = \rho\,(1 + \varphi c^{-2}) \tag{1.16}$$

если считать $v_\alpha\,/c$ 4-скоростью, а ρ — скалярной плотностью заряда. Пусть v_l порядка c, тогда представляя v_l и φ в виде (1.9) с точностью до ε^2, нетрудно получить те же уравнения (1.11) и

$$2U + (U\,/\,c)^2 = v^2, \quad \gamma E_s = kv^2 - v\Omega_q, \quad \gamma E_q = v\Omega_s, \quad \gamma \equiv 1 + Uc^{-2} \tag{1.17}$$

Отличие состоит в выражениях для A_l, Φ и n

$$2\gamma\Phi \equiv 2\psi + 2vA - (E_s s + E_q q)^2 c^{-2} + v^2\,(3k^2 s^2 - \varkappa^2 s^2 - \varkappa^2 q^2) + (\Omega_s q - \Omega_q s)^2 +$$
$$+ vs\,(4k\Omega_s q - 3ks\Omega_q + 2\varkappa\Omega_l s), \qquad A,_{ss} + A,_{qq} = \rho v c^{-2} \tag{1.18}$$

$$n \equiv 2\,(k^2 - \varkappa^2)\,v^2 + 2\,(\varkappa\Omega_l - k\Omega_q)\,v + \gamma U'' + \Omega_s^2 + \Omega_q^2 - (E_s^2 + E_q^2)\,c^{-2}$$

Здесь εA есть добавка к A_l в (1.8), учитывающая собственное (пинчующее) магнитное поле пучка. Таким образом, закон плоских сечений в виде (1.13)—(1.15) справедлив и для слабо-релятивистского пучка.

2. Вырожденные решения. Примем в рамках обратной задачи, как это сделано в [5] для случая $v = \mathrm{const}$ и прямолинейной оси, однородную деформацию пучка в плоском сечении

$$s = \alpha\xi + \beta\eta, \quad q = \mu\xi + \nu\eta, \quad D\,(\tau) \equiv \alpha\nu - \beta\mu \tag{2.1}$$

В этом случае ось строго совпадает с траекторией электрона. Подстановка (2.1) в (1.13) — (1.15) дает

$$De_s = [\ddot\alpha\nu - \ddot\beta\mu + \Omega\,(\dot\mu\nu - \dot\nu\mu)]s + [\ddot\beta\alpha - \ddot\alpha\beta + \Omega\,(\dot\nu\alpha - \dot\mu\beta)]q$$

$$De_q = [\ddot\mu\nu - \ddot\nu\mu + \Omega\,(\dot\beta\mu - \dot\alpha\nu)]\,s + [\ddot\nu\alpha - \ddot\mu\beta + \Omega\,(\dot\alpha\beta - \dot\beta\alpha)]q \tag{2.2}$$

$$\dot\mu\nu - \dot\nu\mu + \dot\alpha\beta - \dot\beta\alpha = \Omega D - \omega_*, \quad \omega_* = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

$$\ddot D - 2\,(\dot\alpha\dot\nu - \dot\beta\dot\mu) + (n + \Omega^2)\,D - \Omega\omega_* = j_*\,/\,v, \quad \rho = j_*\,(vD)^{-1} \tag{2.4}$$

Такой же результат получается, если искать решение исходных уравнений в виде рядов Тейлора по степеням s, q. Поэтому (2.1) — (2.4) описывают узкую трубку траекторий, вырезанную из широкого пучка с размером неоднородности L_*. Уравнения (2.3), (2.4) оставляют произвольными пять функций τ из семи: α, β, μ, ν, v, k, $\varkappa$, предоставляя достаточно гибкую основу для формирования узких пучков с нужными параметрами. Для пяти простейших типов двухпараметрической деформации с матрицами

$$M_1 = \begin{vmatrix} D & 0 \\ \mu & 1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} D & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} \delta\cos\theta & -\delta\sin\theta \\ \delta\sin\theta & \delta\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} D\cos\theta & -\sin\theta \\ D\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad M_5 = \begin{vmatrix} D\cos\theta & -D\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad M \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

уравнения (2.3), (2.4) принимают соответственно вид

$$\dot{\mu} = \Omega D - \omega_*, (M_1), \quad \dot{D}\beta - \dot{\beta}D = \Omega D - \omega_*, \quad (M_2) \tag{2.6}$$

$$\ddot{D} + (n + \Omega^2) D = \Omega\omega_* + j_* / v, \quad (M_1, M_2) \tag{2.7}$$

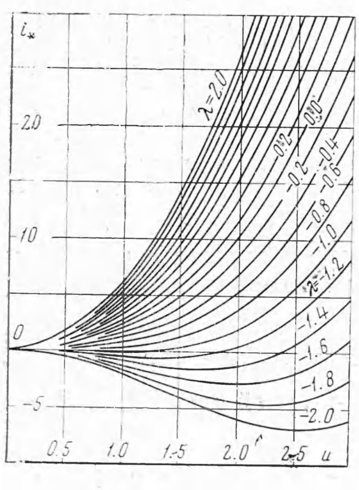
$$2\dot{\theta} = \Omega - \omega_* / D, (M_3, M_4), \quad \dot{\theta}(1 + D^2) = D\Omega - \omega_*, \quad (M_5) \tag{2.8}$$

$$2\ddot{\delta} + {}^1/_2\Omega^2\delta - {}^1/_2\,\omega_*^2\delta^{-3} + n\delta = j_* / \delta v, \quad (M_3) \tag{2.9}$$

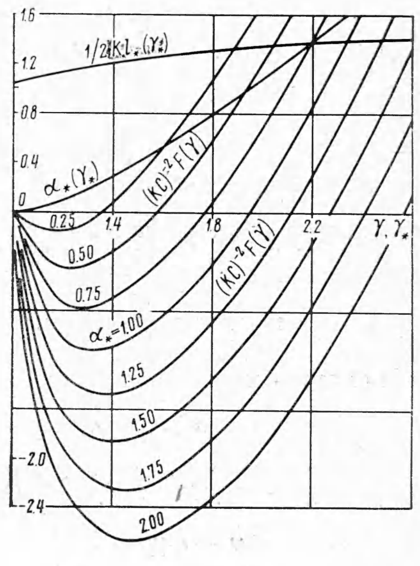
$$\ddot{D} + {}^1/_2\Omega^2 D - {}^1/_2\omega_*^2 / D + nD = j_* / v, \quad (M_4) \tag{2.10}$$

$$\ddot{D} - 2D\,(1 + D^2)^{-2}(D\Omega - \omega_*)^2 + (n + \Omega^2) D = \Omega\omega_* + j_* / v, \quad (M_5) \tag{2.11}$$

Уравнения (2.7) и (2.9) отличаются от уравнений плоскосимметричного и осесимметричного пучка [2] определением функций Ω, n, что позволяет описывать пучки с криволинейной осью с релятивистскими скоростями и с весьма произвольной формой в сечении.



Фиг. 2



Фиг. 3

Ниже рассматривается несколько решений (2.6) — (2.11) для пучка с винтовой осью в винтовом магнитном поле на круглом цилиндре, так что k, $\varkappa$, Ω_l, Ω_s, Ω_q принимаются постоянными.

2.1 Для пучка постоянного сечения ($D = 1$ в M_3) из (2.9) и (1.12), (1.18) следуют уравнения в нерелятивистском и релятивистском случаях соответственно, определяющие скорость $v\,(l)$

$$^1/_2\dot{v} = C_* - F, \quad 2F \equiv \Omega_*{}^2 v^2 + k^2 v^4 - {}^4/_3 k\,\Omega_q v^3 - 2j_* v \tag{2.12}$$

$$c^2\,(\gamma')^2 = C_* - F \equiv C_* + (j_* / c)\ 2\operatorname{arc\,tg} v / c - (kv^2 / c\gamma)^2 -$$
$$- (\Omega_l{}^2 - \omega_*{}^2) \ln \gamma + (\Omega_s{}^2 + \Omega_q{}^2)\,\gamma^{-2} + 2\,\Omega_q k\,(c \operatorname{arc\,tg} v / c - v\gamma^{-2})$$
$$\Omega_*{}^2 \equiv {}^1/_2\,(\Omega_l{}^2 - \omega_*{}^2) + \Omega_s{}^2 + \Omega_q{}^2, \quad c\,(\gamma^2 - 1)^{1/2} \equiv v \tag{2.13}$$

Как видно из (2.14), скорость ограничена значением, определяемым уравнением $F = C_*$. В случае $C_* = 0$ получается периодическое решение с амплитудой v_* (фиг. 2)

$$v_* \equiv (\Omega_* / k)\,u, \quad u^3 + u + 2\,\lambda\,u^2 = i_*, \quad i_* \equiv 2j_* k\ \Omega^{-3}, \quad \lambda \equiv -{}^2/_3\Omega_q / \Omega_*$$

В частности, периодическое решение

$$v = (2j_* k^{-2})^{1/2}\,(\sin{}^3/_2\ kl)^{2/3}, \quad \Omega_s = \Omega_q = 0, \qquad \Omega_l = \omega_* \tag{2.14}$$

удовлетворяет условиям на катоде в плоскости $l = 0$. Зависимость скорости от длины дуги (2.14) такая же, как в точном решении для электростатического течения по кругу [6]. Однако приближенное решение (2.14) применимо и для течения вдоль винтовой силовой линии магнитного поля. Решение для релятивистского пучка в условиях (2.14) имеет период l_* и амплитуду γ_* (фиг. 3)

$$\frac{1}{2} kl_* = \int\limits_1^{\gamma_*} \frac{d\gamma}{\sqrt{\alpha_* 2\operatorname{arc\,tg} v / c - v^4 c^{-4} \gamma^{-2}}}, \quad \alpha_* \equiv \frac{j_*}{k^2 c^3}$$
$$(\gamma_* - 1 / \gamma_*)^2 = \alpha_* \{4 \operatorname{arc\,tg} [\gamma_* + (\gamma_*{}^2 - 1)^{1/2}] - \pi\} \tag{2.15}$$

Для пучка постоянной ширины вдоль s ($D = 1$ в M_1) из (2.7), (1.12) следует уравнение для v:

$$^1/_2\,(v')^2 = C_* + j_* v - (\Omega_l{}^2 + \Omega_s{}^2 + \Omega_q{}^2 - \Omega_l \omega_*)^1/_2\ v^2 + {}^2/_3 v^3\,(\varkappa\Omega_l +$$
$$+ k\,\Omega_q - \varkappa\omega_*) - {}^1/_2\,(k^2 + \varkappa^2)\ v^4 \tag{2.16}$$

которое имеет тот же вид, что и (2.12), но содержит зависимость от кручения оси. Аналогичный результат получается и в релятивистском случае.

2.2 Для пучка с постоянной скоростью из (2.7), (2.9)—(2.11) получаются, вообще говоря, периодические решения

$$D = (\Omega\omega_* + j_* / v)\ \omega_1{}^{-2} + A_* \sin \omega_1\tau + B_* \cos \omega_1\tau, \quad \omega_1{}^2 \equiv n + \Omega^2, \quad M_1,\ M_2$$
$$\dot{\delta}^2 + {}^1/_2\,(n + {}^1/_2\Omega^2)\ \delta^2 + {}^1/_4\omega_*{}^2\delta^{-2} = C_* + j_* / v \ln \delta, \quad M_3 \tag{2.17}$$
$$\dot{D}^2 = C_* + [2j_* / vD + \omega_*{}^2 \ln D - (n + {}^1/_2\Omega^2)\ D^2], \quad M_4 \tag{2.18}$$
$$\dot{D}^2 = C_* + 2\,(\Omega\omega_* + j_* / v)\ D - (n + \Omega^2)\ D^2 + 2\,(\Omega^2 - \omega_*{}^2 +$$
$$+ 2\Omega\omega_*\,D)\ (1 + D^2)^{-1} + 2\Omega^2 \ln (1 + D^2) - 4\Omega\,\omega_* \operatorname{arc\,tg} D, \quad M_5 \tag{2.19}$$

Уравнение (2.17) совпадает по форме с уравнением для пульсаций границы осесимметричного пучка с прямолинейной осью в однородном магнитном поле [7].

Параметры периодических решений (2.17) вычислены в [7]. Структура уравнений (2.18), (2.19) в качественном отношении аналогична (2.17).

2.3 Периодические решения можно построить также для пучка с постоянной плотностью ρ_*

$$v = v_* / D, \qquad \rho_* \equiv j_* / v_*, \quad D = b^2 + (b^4 - a^2)^{1/2} \sin \omega\tau \tag{2.20}$$

Решение (2.20) получается для нерелятивистского пучка из (1.12), (2.7), (2.9), (2.10), если при деформациях M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно положить

$$\varkappa v_* \omega_* + (k^2 + \varkappa^2)\ v_*{}^2 = a^2\omega^2, \quad {}^1/_2\Omega_l \omega_* + v_*\,(\varkappa\Omega_l + k\Omega_q) = 2b^2\omega^2,$$
$$\Omega_l{}^2 + \Omega_s{}^2 + \Omega_q{}^2 - \rho_* = \omega^2, \quad M_1, \quad M_2, \tag{2.21}$$

$$k^2 v^2{}_* - {}^1/_4\omega^2{}_* = a^2\omega^2, \quad v_* k\Omega_q = 2b^2\omega^2, \quad {}^1/_2\Omega_l{}^2 + \Omega_s{}^2 + \Omega^2{}_q - \rho_* = \omega^2, \ M_4$$

В случае M_3 коэффициенты отличаются от коэффициентов M_4 множителем $^4/_3$ в левых частях. В случае M_5 из (1.12), (2.11) получается уравнение

$$\dot{D}^2 = -\omega^2 (a^2 - 2b^2 D + D^2) + 2D^2 (1 + D^2)^{-2} (D\Omega_l - \omega_* - 2\varkappa v_*)^2$$

которое также описывает периодическое изменение D. Здесь ω, a, b согласно (2.21).

2.4 Решения п. 2.1 можно использовать для построения электронной пушки с криволинейным пучком, а решения п. п. 2.2, 2.3 для построения канала, фокусирующего протяженный периодический пучок, если определить потенциал φ вне пучка, где φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varepsilon^2 [r^2 / g (\varphi,_l - \varkappa\varphi,_\theta)],_l + (g\varphi,_r),_r + [^1/g (\sigma^2\varphi,_\theta - \varepsilon^2\varkappa r^2 \varphi,_l],_\theta = 0 \tag{2.22}$$
$$s \equiv r\cos\theta, \quad q \equiv r \sin\theta \quad g \equiv r (1 - \varepsilon k r \cos\theta), \quad \sigma^2 \equiv g^2 r^{-2} + \varepsilon^2\varkappa^2 r^2$$

Здесь l, r, θ — квазицилиндрические координаты.

Представляя потенциал вне пучка в виде (1.9), (1.12)

$$\varphi = \varepsilon^{-2} U + \varepsilon^{-1} r (E_s \cos\theta + E_q \sin\theta) + r^2 (F_0 + F_c \cos 2\theta + F_s \sin 2\theta) + \psi$$
$$F_0 \equiv {}^1/_4 (3k^2v^2 + \Omega_q{}^2 + \Omega_s{}^2 - 3\Omega_q kv + 2\Omega_l \varkappa v - 2\varkappa^2 v^2)$$
$$F_c \equiv {}^1/_4 (3k^2v^2 + \Omega_q{}^2 - \Omega_s{}^2 - 3\Omega_q kv + 2\Omega_l \varkappa v), \quad F_s \equiv k\Omega_s v - {}^1/_2\Omega_s \Omega_q \tag{2.23}$$

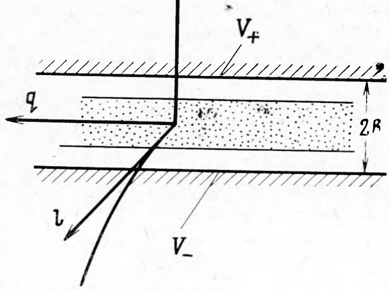
нетрудно получить из (2.22) приближенное уравнение

$$\begin{aligned}(r\psi,_r),_r + r^{-1}\psi,_{\theta\theta} = \varepsilon k\, [(\cos\theta\psi,_\theta),_\theta + \cos\theta\, (r^2\psi,_r),_r] - \\ - \varepsilon^2 r [\psi,_{ll} - (\varkappa\psi,_\theta),_l - \varkappa\psi,_l + \varkappa^2\psi,_{\theta\theta}] - nr - \varepsilon r^2 (n_1 \cos\theta + \\ + n_2 \sin\theta) - \varepsilon^2 r^3 (n_3 \cos 2\theta + n_4 \sin 2\theta + n_5)\end{aligned} \tag{2.24}$$
$$n_1 \equiv (kU')' + E_s'' - (\varkappa E_q)' - \varkappa^2 E_s - \varkappa E'_q - k (6F_0 + 2F_c)$$
$$n_2 \equiv k\varkappa U' + E_q'' + (\varkappa E_s)' - \varkappa^2 E_q + \varkappa E_s' - 2kF_s$$
$$\begin{aligned}n_3 \equiv {}^1/_2 (k^2U')' + {}^1/_2 (kE_s')' - {}^1/_2 (\varkappa kE_q)' - k\varkappa^2 E_s - \\ - \varkappa kE_q' + F_c'' - 2 (\varkappa F_s)' - 2\varkappa F_s' - 4\varkappa^2 F_c\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}n_4 = \varkappa k^2 U' + {}^1/_2 (kE_q')' + {}^1/_2 (k\varkappa E_s)' - k\varkappa^2 E_q + k\varkappa E_s' + \\ + F_s'' + 2 (\varkappa F_c)' + 2\varkappa F_c' - 4\varkappa^2 F_s\end{aligned}$$
$$n_5 \equiv {}^1/_2 (k^2U')' + {}^1/_2 (kE_s')' - {}^1/_2 (\varkappa kE_q)' + F_0''$$

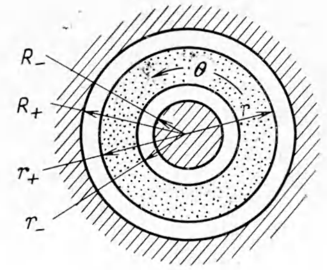
где опущены члены порядка ε^3. Решение уравнения (2.24), удовлетворяющее граничным условиям на поверхности $r = f$ круглого пучка с деформацией M_3, имеет вид

$$\begin{aligned}\psi = W + B \ln r - {}^1/_4 nr^2 - \varepsilon {}^1/_4 \{{}^1/_2 (r^3 - 2f^2 r + f^4 / r) (n_0 \cos\theta + \\ + n_2 \sin\theta) - (2r \ln r / f - r + f^2 / r) kB \cos\theta\} - \\ - \varepsilon^2\, {}^1/_4 \{{}^1/_4 (r^4 - f^4 - 4f^4 \ln r / f) (n_5 + {}^1/_4 n'' + {}^9/_8 k^2 n + \\ + {}^3/_4 kn_1) - (r^2 - f^2 - 2f^2 \ln r / f) (W'' - {}^1/_2 k^2 B \ln f - \\ - B'' - {}^1/_4 f^2 kn_0) + [(r^2 - f^2) \ln r - 2f^2 \ln (r / f) \ln f] ({}^1/_2 k^2 B - \\ - B'') - {}^1/_6 (2r^4 - 3f^2r^2 + f^2 r^{-2}) [(n_3 + {}^5/_8 kn_0) \cos 2\theta + (n_4 + \\ + {}^5/_8 kn_2) \sin 2\theta] - {}^1/_8 kf^2 (1 - {}^1/_2 r^2 f^{-2} - {}^1/_2 f^2 r^{-2}) [(f^2 n_0 + 2kB) \cos 2\theta + f^2 n_2 \sin 2\theta]\}\end{aligned} \tag{2.25}$$
$$n_0 \equiv n_1 + {}^3/_2 kn, \quad B \equiv {}^1/_2 r_*{}^2 j_* / v, \quad W \equiv {}^1/_2 B (1 - \ln f^2), \quad f \equiv r_*\delta$$

Решение (2.23), (2.25) имеет точность параксиального приближения $\varepsilon_*{}^3$ в трубке более широкой, чем пучок, в $\varepsilon_*^{-0,4}$ раза, так как в (2.25) учтено дополнительно два члена в разложении по ε.



Фиг. 4



Фиг. 5

3. Пульсации пучка в узкой полости. Рассмотрим пульсации пучка между двумя электродами (фиг. 4) в двух случаях: плоском (l, s) и цилиндрическом (l, r), для которых уравнения (1.13) — (1.15) принимают вид

$$s_{,\tau\tau} + \Omega^2 s + \Omega P = -ns + J/v - Q \equiv \psi_{,s}, \quad \rho v = (s_{,J})^{-1} \tag{3.1}$$

$$r_{,\tau\tau} + {}^1\!/_4\, \Omega^2 r - P^2 r^{-3} = (J/v - Q)(2\pi r)^{-1} - {}^1\!/_2\, nr \equiv \psi_{,r} \tag{3.2}$$

$$r^2 \equiv s^2 + q^2, \quad P = P(J), \quad r = r(\tau, J), \quad 2\pi\rho v r = (r_{,J})^{-1} \tag{3.3}$$

Здесь J — функция тока, P — компонента обобщенного импульса по циклической координате q или же θ. Известно много работ с расчетами симметричных пульсаций границы пучка в рамках уравнений параксиальной оптики [8], которые отличаются от (3.1), (3.2) помимо определения Ω, n отсутствием члена Q. Функция Q появляется из-за несимметрии плоского пучка (3.1) или же из-за наличия центрального электрода (стержня) в осесимметричном случае (фиг. 5) и имеет смысл погонной плотности заряда, наведенной пучком на электродах. При $Q \neq 0$ уравнения (3.1), (3.2) являются интегро-дифференциальными и не допускают вырожденных решений, а плотность ρ существенно неоднородна поперек пучка.

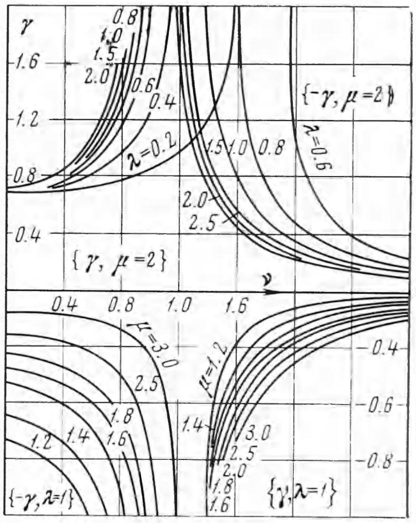
3.1 Пусть два цилиндрических электрода расположены на расстояниях $s = \pm b$, $b \sim a_*$ от плоской осевой кривой ($\varkappa = 0$) и имеют постоянные потенциалы V_+, V_-

$$V_\pm = \varepsilon^{-2} U \pm \varepsilon^{-1} b E_s,$$

$$E_s = kv^2 - \Omega_q v, \quad (v\Omega_s = E_q = 0) \tag{3.4}$$

С точностью параксиального приближения для потенциалов в зазорах между пучком и электродами $\varphi_\pm$ получается (3.5)

$$\varphi_\pm = \varepsilon^{-2} U + \varepsilon^{-1} E_s s + {}^1\!/_2\, k E_s (s^2 - b^2) + B_\pm [s - (\pm b)]$$



Фиг. 6

Сшивание внешнего поля (3.5) с внутренним (1.9), (1.12) на границах пучка $s = s_\pm$ дает

$$B_+ = J_* / v - Q, \quad Q = J_* (2vb)^{-1} (b - \langle s \rangle) = -B_-, \quad \langle s \rangle \equiv 1/J_* \int^* s\, dJ$$

Здесь J_* — полный ток пучка, $\langle s \rangle$ — центр тяжести пучка. Для $\langle s \rangle$ из (3.1) следует:

$$\langle \ddot{s} \rangle + \omega^2 \langle s \rangle = -\Omega \langle P \rangle, \quad \omega^2 \equiv \Omega^2 + n - J_*(2vb)^{-1}$$

Пусть ω, Ω, v — константы. Тогда из (3.1) следует:

$$s = \langle s \rangle + A(J) \cos \omega_2 \tau + B(J) \sin \omega_2 \tau, \quad \omega_2 \equiv (\Omega^2 + n)^{1/2}$$

$$\langle s \rangle = -\Omega \langle P \rangle \omega^{-2} + a_* \sin\omega\tau + b_* \cos\omega\tau$$

Видно, что к симметричным пульсациям с частотой ω_2 добавляется колебание центра пучка со сдвинутой частотой ω. Условие $\omega = 0$ определяет предельный ток пучка $2vb(\Omega^2 + n)$, при превышении которого колебания центра становятся апериодическими.

3.2 Для осесимметричного пучка с прямолинейной осью плотность заряда на стержне определяется так:

$$2\gamma Q = -4\pi u + 2\gamma J_* / v - \frac{1}{v}\int^{*} \ln (r / R_-)^2 \, dJ, \quad \gamma \equiv \ln R_+/R_- \tag{3.6}$$

Здесь u — разность потенциалов между электродами, R_+, R_-—радиусы электродов (фиг. 5). Пусть u, v, Ω постоянны, $n = 0$. В таких условиях интегро-дифференциальное уравнение (3.2), (3.6) имеет точность ε_*^2. Решение удается найти для отклонений порядка ε_* от равновесного состояния (3.7)

$$r = R\,(J) + \frac{\varepsilon f\,(\tau)}{R}, \quad 2\pi v\left(\frac{\Omega^2 R^2}{4} - \frac{P^2}{R^2}\right) = J - J_* + \frac{2\pi uv}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\int \ln \frac{R}{R_-}\, dJ$$

$$f_{,\tau\tau} + \omega_0^2 f = (2\pi\gamma v)^{-1} \int^{*} f R^{-2} dJ, \quad \omega_0^2 = {}^1/_2\Omega^2 + 2P^2R^{-4} \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) описывает колебания f с частотой ω_0, на которые накладываются колебания со сдвинутой частотой ω

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\,(c_* \cos \omega\tau + b_* \sin \omega\tau), \quad \int_0^{J_*} \frac{dJ}{R^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)} = 2\pi v\gamma \tag{3.9}$$

Для решения уравнения (3.7), (3.9) в случае $P = P_* = \mathrm{const}$ приводятся графики на фиг. 6, где показаны семейства кривых $\gamma\,(\nu, \mu, \lambda)$ для $\mu = 2$ и $\lambda = 1$

$$\gamma = {}^1/_4\, \nu^2\, (1 - \nu^2)^{-1} \, \{\ln [\mu^4\, (1 - \nu^2)\, \lambda + 1] - \ln [(1 - \nu^2)\, \lambda + 1]\} + \ln \mu$$

$$\mu \equiv r_+ / r_-, \quad \lambda \equiv \Omega^2 r_-^4 / 4P_*, \quad \nu \equiv 2\omega^2\Omega^{-2}$$

Не смотря на вид решения, в задаче остается существенная нелинейность, связанная с зависимостью амплитуд колебаний от J через частоту ω_0 и начальные условия. Эта нелинейность приводит к пересечению электронных траекторий в момент $f_{,J} = 0$, которым определяется граница применимости решения.

Примечание 1. Интересно отметить, что параксиальное уравнение для пучка симметричного относительно прямолинейной оси с существенной нестационарностью осевой скорости и магнитного поля $[v = v\,(t, l),\ \Omega = \Omega\,(t, l)]$ имеет вид (3.2) с заменой J / v на $J / l_{,\lambda}$. При этом

$$n \equiv U_{,ll}, \quad U = U\,(t, l), \quad \lambda_{,t} = -v\lambda_{,l}, \quad 2\pi r\rho = (r_{,J}\, l_{,\lambda})^{-1}$$

В отличие от стационарного пучка параксиальное семейство траекторий здесь существенно зависит от интеграла движения λ электрона с осевой скоростью $v : r = r\,(t, \lambda, J)$. В частности имеют место и вырожденные решения вида (2.1)—(2.4), где α, β, μ, ν зависят уже от t, λ, а точка означает частную производную по t. Попытка построить параксиальное уравнение для нестационарного пучка с криволинейной осью наталкивается на необходимость более общего подхода, учитывающего нестационарность условий на оси и нестационарность самой оси.

Примечание 2. Можно показать, что вырожденные решения удовлетворяют условиям эмиссии с нулевой скоростью и на криволинейных катодах.

Пользуюсь случаем поблагодарить А. Н. Иевлеву за помощь.

Поступила 19 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948, гл. 24.
2. Овчаров В. Т. Уравнения электронной оптики для плоскосимметричных и осесимметричных пучков с большой плотностью тока. Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 8, стр. 1367.
3. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1952.
4. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
5. Левин В. А. Движение заряженного газа, заполняющего полость с сечением в виде произвольного эллипса. ПМТФ, 1967, № 2, стр. 122.
6. Meltzer B. Single Component Stationary Electron Flow under Space-Charge Conditions. J. Electronics, 1956, vol. 2, No. 2, p. 118.
7. Palmer J. L. Laminar Flow in Magnetically-Focused Cylindrical Electron Beams. IRE Trans. Electron Devices, 1959, ED-6, No. 3, p. 262.
8. Пирс Дж. Р. Теория и расчет электронных пучков. М., «Советское радио», 1956