

2. Прокофьев В. А. Влияние излучения на распространение малых возмущений в вязкой и теплопроводной жидкости (гидродинамическая теория). Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7, стр. 94—102.
3. Прокофьев В. А. Поглощение и дисперсия вынужденных волн очень малой и очень большой частоты под влиянием радиационного переноса тепла. Изв. АН ОТН, 1958, № 12, стр. 15—23.
4. Прокофьев В. А. Учет излучения в гидродинамической теории распространения плоских вынужденных волн бесконечно малой амплитуды. Вестн. Москв. ун-та. Сер. матем. механ., астрон., физики, химии, 1957, № 6, стр. 7—16.
5. Прокофьев В. А. Бесконечно малые вынужденные волны в излучающей баротропной среде. Сб. «Вопросы механики» (под ред. Сретенского Л. Н.). Изд. МГУ, 1961, вып. 193, стр. 93—130.
6. Прокофьев В. А. Скорость слабых волн в излучающем газе. ПМТФ, 1963, № 3, стр. 11—19.
7. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1948, стр. 47.
8. Прокофьев В. А. Теория распространения термических радиационных волн малой амплитуды, основанная на газодинамических уравнениях Эйлера с учетом теплообмена излучением. Вестн. Москв. ун-та, 1964, № 5, стр. 55—66.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ЭЛЕКТРОДУГОВОМ ПОДОГРЕВЕ ГАЗА

И. И. Суксов

(Новосибирск)

Известны различные подходы к решению уравнения энергии и расчету на этой основе характеристик электродугового подогрева газов для цилиндрической дуги [1—3]. Метод, изложенный в [3], позволяет получать численно точные результаты путем последовательных приближений.

В настоящей работе предлагается иной подход к решению упомянутой задачи, при котором функция теплопроводности становится независимой переменной, а текущий радиус — искомой функцией. На основе указанного с использованием аппроксимации полиномом второй степени получено приближенное решение в конечной форме. На примерах расчета для воздуха и аргона показано, что это решение приемлемо для инженерных расчетов.

1. Для случая электродугового подогрева газа в цилиндрической трубке круглого поперечного сечения, когда энтальпия h и удельный расход ρv_z не зависят от продольной координаты z , уравнение энергии записывается в виде

$$r \frac{\partial s}{\partial r} = - \frac{r}{E^2} \int_0^r \sigma r' dr', \quad s = \int_0^T \lambda dT \quad (1.1)$$

где λ — коэффициент теплопроводности; остальные обозначения — обычные. В проводящей области ($s_d^0 \leq s^0 \leq 1$) уравнение (1.1) представляется в форме

$$A\eta^2 = - t \int_1^{s^0} \sigma^0 t ds^0 \quad (1.2)$$

$$\eta = \frac{r}{r_w}, \quad \sigma^0 = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad s^0 = \frac{s}{s_0}, \quad A = \frac{s_0}{\sigma_0 (Er_w)^2}, \quad t = \eta \frac{d\eta}{ds^0} \quad (1.3)$$

Значения нижних индексов: w — стенка, 0 — ось трубки.

В непроводящей области ($s_w^0 \leq s^0 \leq s_d^0$) уравнение (1.1) принимает вид

$$\eta ds^0 / d\eta = - 1 / B \quad (1.4)$$

и представляется в форме

$$B\eta^2 = -t$$

$$B = \frac{2\pi s_0}{EI}, \quad I = 2\pi E \int_0^{r_d} \sigma r dr = \frac{2\pi s_0}{AE} \int_1^{s_d^\circ} \sigma^\circ t ds^\circ \quad (1.5)$$

Последнее равенство преобразуется к виду

$$\int_1^{s_d^\circ} \sigma^\circ t ds^\circ = \frac{A}{B} \quad (1.6)$$

Здесь I — полный ток, индекс d обозначает границу проводящей области. Зависимость $\sigma^\circ = \sigma^\circ(s^\circ)$ предполагается заранее известной.

Интегрируя последнее выражение (1.3) при условии $\eta(1) = 0$, получаем

$$\eta^2 = 2 \int_1^{s^\circ} t ds^\circ \quad (1.7)$$

Величину t аппроксимируем в проводящей области полиномом второй степени

$$t = a_0 + a_1 s^\circ + a_2 s^{\circ 2} \quad (1.8)$$

Для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2 воспользуемся граничными значениями t и значением dt/ds° на оси трубки. Тем самым на оси удовлетворяются уравнение (1.2) и результат его дифференцирования, а в проводящей области — интегральное соотношение энергии.

На основании (1.2) и (1.7)

$$t = -2A \int_1^{s^\circ} t ds^\circ \left(\int_1^{s^\circ} \sigma^\circ t ds^\circ \right)^{-1}$$

Отсюда, раскрывая неопределенность, находим $t(1) = -2A$. На основании (1.5) находим $t(s_d^\circ) = -B\eta_d^2$. Дважды дифференцируя (1.2) по s° и используя (1.3), получим

$$dt/ds^\circ|_{s^\circ=1} = A\alpha, \quad \alpha = d\sigma^\circ/ds^\circ|_{s^\circ=1}$$

Исходя из (1.8) и полученных граничных значений, находим

$$a_0 = m_0 A - n_0 B \eta_d^2, \quad a_1 = -m_1 A + 2n_0 B \eta_d^2, \quad a_2 = m_2 A - n_0 B \eta_d^2$$

причем

$$m_0 = \frac{2s_d^\circ(2-s_d^\circ)}{(1-s_d^\circ)^2} + \frac{\alpha s_d^\circ}{1-s_d^\circ}, \quad m_1 = \frac{4}{(1-s_d^\circ)^2} + \frac{\alpha(1+s_d^\circ)}{1-s_d^\circ}$$

$$m_2 = \frac{2}{(1-s_d^\circ)^2} + \frac{\alpha}{1-s_d^\circ}, \quad n_0 = \frac{1}{(1-s_d^\circ)^2}$$

С учетом (1.8) получаем

$$\int_1^{s^\circ} \sigma^\circ t ds^\circ = -a_0 J_0 - a_1 J_1 - a_2 J_2, \quad J_0 = \int_{s^\circ}^1 \sigma^\circ ds^\circ, \quad J_1 = \int_{s^\circ}^1 \sigma^\circ s^\circ ds^\circ$$

$$I_2 = \int_1^{s^\circ} \sigma^\circ s^{\circ 2} ds^\circ, \quad \int_1^{s^\circ} t ds^\circ = -a_0(1-s^\circ) - \frac{a_1(1-s^{\circ 2})}{2} - \frac{a_2(1-s^{\circ 3})}{3}$$

Уравнение (1.6) принимает вид

$$(1-s_d^\circ)^2(1-BF)A - (J_{0d} + J_{2d} - 2J_{1d})B^2\eta_d^2 = 0$$

$$F = -m_0 J_{0d} + m_1 J_{1d} - m_2 J_{2d} \quad (1.9)$$

Здесь I_{0d}, I_{1d}, I_{2d} — соответственно значения I_0, I_1, I_2 при $s^\circ = s_d^\circ$.

При $s^\circ = s_d^\circ$ уравнение (1.7) дает

$$A = \frac{[3 - 2(1 - s_d^\circ)B] \eta_d^2}{(1 - s_d^\circ)[8 + \alpha(1 - s_d^\circ)]} \quad (1.10)$$

Интегрирование уравнения (1.4) при условии $s^\circ(1) = s_w^\circ$ приводит к соотношению

$$\eta = \exp[-B(s^\circ - s_w^\circ)] \quad (1.11)$$

Отсюда при $s^\circ = s_d^\circ$ получается уравнение

$$\eta_d = \exp[-B(s_d^\circ - s_w^\circ)] \quad (1.12)$$

Система уравнений (1.9), (1.10), (1.12) позволяет определить величины B , η_d и A в зависимости от T_0 .

Из выражений (1.9), (1.10) следует квадратное уравнение относительно B

$$\begin{aligned} b_0 B^2 - b_1 B + 3(1 - s_d^\circ) &= 0 \\ b_0 &= 2[12 + \alpha(2 - s_d^\circ - s_d^{\circ 2})]J_{1d} - [4(2 + 2s_d^\circ - s_d^{\circ 2}) + \\ &+ \alpha(1 - s_d^\circ)(1 + 2s_d^\circ)]J_{0d} - 3[4 + \alpha(1 - s_d^\circ)]J_{2d} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= (1 - s_d^\circ)[2(1 - s_d^\circ) + 3F] = 2(1 - s_d^\circ)^2 + \frac{3}{1 - s_d^\circ} \{ [4 + \alpha(1 - s_d^{\circ 2})]J_{1d} - \\ &- s_d^\circ [2(2 - s_d^\circ + \alpha(1 - s_d^\circ))]J_{0d} - [2 + \alpha(1 - s_d^\circ)]J_{2d} \} \end{aligned}$$

Очевидно,

$$J_{0d} + J_{2d} - 2J_{1d} = \int_{s_d^\circ}^1 (1 - s^\circ)^2 \sigma^\circ ds^\circ > 0 \quad (1.14)$$

Функция

$$f(s^\circ) = m_0 - ms^\circ - m_2 s^{\circ 2}$$

принимает на концах промежутка $(s_d^\circ, 1)$ значения $f(s_d^\circ) = 0$, $f(1) = -2$ и имеет в этом промежутке единственный экстремум

$$f\left(\frac{m_1}{2m_2}\right) = \frac{4m_0 m_2 - m_1^2}{4m_2} = -\frac{[4 + \alpha(1 - s_d^\circ)]^2}{4[2 + \alpha(1 - s_d^\circ)]} < 0$$

Следовательно, в указанном промежутке $f(s^\circ) \leq 0$ и

$$F = - \int_{s_d^\circ}^1 \sigma^\circ f(s^\circ) ds^\circ > 0 \quad (1.15)$$

поэтому $b_1 > 0$.

Так как $A > 0$, то из уравнения (1.9) с учетом (1.14), (1.15) следует

$$B < \frac{1}{F}, \quad B = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 12(1 - s_d^\circ)b_0}}{2b_0} \quad (1.16)$$

Здесь B определено из квадратного уравнения (1.13), причем берется корень, удовлетворяющий условию (1.16).

Затем определяются по (1.12), (1.10) величины η_d и A . Характеристики EI , Er_w , I/r_w выражаются через A и B

$$EJ = \frac{2\pi s_0}{B}, \quad Er_w = \left(\frac{s_0}{A\sigma_0}\right)^{1/2}, \quad \frac{J}{r_w} = \frac{2\pi \sqrt{A\sigma_0 s_0}}{B}$$

Энтальпийная характеристика $h^\circ = h^\circ(\eta)$, $h^\circ = h/h_0$, $p = \text{const}$ определяется на основании (1.7), (1.8), (1.11) при помощи зависимости $h = h(s, p)$, которая считается заранее известной.

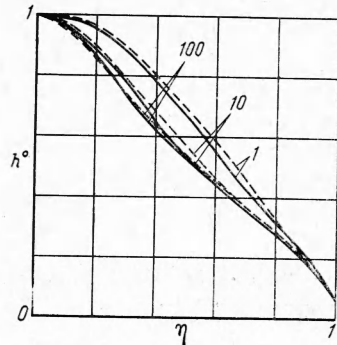
2. Проводились расчеты для воздуха и аргона.

Для воздуха расчеты были выполнены при $T_0 = 6000^\circ \text{K}$, $T_d = 4000^\circ \text{K}$, $T_w = 780^\circ \text{K}$ и давлениях $p = (1-100) 1.01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$, причем использовалась зависимость $\sigma = \sigma(T, p)$ из работы [4] и зависимость $\lambda = \lambda(T, p)$ по данным Р. М. Севостьянова и М. Д. Здункевича¹.

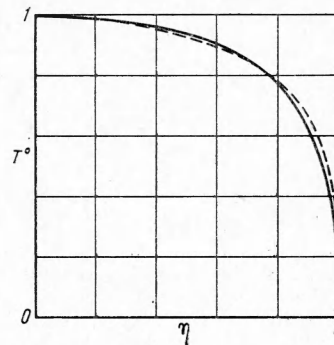
Таблица 1

p^*	1	2	5	10	20	50	100
S_0	2554	2275	2032	1893	1787	1674	1598
σ_0	120.2	103.5	85.11	73.28	57.54	46.77	36.73
S_d°	0.356	0.38	0.3925	0.3930	0.3890	0.3827	0.381
S_w°	0.0094	0.0105	0.0118	0.0127	0.0134	0.0143	0.0150
α	1.902	2.160	2.586	2.841	3.16	3.62	4.057
I_{0d}	0.2796	0.2556	0.2244	0.2052	0.1942	0.1842	0.1779
I_{1d}	0.2262	0.2098	0.1881	0.174	0.1656	0.1575	0.1533
I_{2d}	0.188	0.177	0.1612	0.1507	0.144	0.1375	0.133
B	1.314	1.401	1.532	1.619	1.68	1.74	1.77
A	0.0886	0.0775	0.0611	0.0511	0.0454	0.038	0.0341
Er_w	15.5	16.8	19.8	22.4	25.5	31.0	35.7
I/r_w	789	605	422	327	258	196	158
$10^{-3} EI$	12.22	10.20	8.33	7.34	6.73	6.22	5.67
η_d	0.634	0.596	0.558	0.540	0.532	0.526	0.523
Er_w	15.9	17.6	20.3	22.9	25.7	29.9	33.5
I/r_w	732	538	380	298	243	190	165
$10^{-3} EI$	11.62	9.30	7.71	6.90	6.30	5.78	5.55
η_d	0.618	0.567	0.533	0.518	0.510	0.511	0.517

Данные для расчета и полученные значения B , A , η_d , Er_w , I/r_w , EI при различных значениях $p^* = 10^{-5} \cdot p/1,01325$ приведены в табл. 1; в последних четырех строках таблицы даны для сравнения значения η_d , Er_w , I/r_w , EI , полученные численно



Фиг. 1



Фиг. 2

методом последовательных приближений на основе уравнения (1.1), приведенного к интегральной форме. Использованный при этом численный метод решения, аналогичный известному методу [3,6], дополнен определением радиуса проводящей области. В качестве исходного приближения применялась аппроксимация зависимости $\sigma^\circ = \sigma^\circ(\eta)$ полиномом четвертой степени.

Сравнение распределений $h^\circ = h^\circ(\eta, p)$, найденных по известным $s^\circ = s^\circ(\eta, p)$ при помощи таблиц [5], приведено на фиг. 1. Здесь и на фиг. 2 штриховые линии соответствуют предлагаемому приближенному методу.

¹ Здесь и дальше используется Международная система единиц (СИ).

Таблица 2

$10^{-3} T_0$	9	10	11	12	13	14
S_0	1135	1750	2722	4180	6140	8615
σ_0	2754	3548	4416	5369	6166	7080
S_d°	0.157	0.1018	0.0655	0.0426	0.029	0.0207
S_w°	0.002	0.0013	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003
α	0.7337	0.5992	0.5524	0.4474	0.3875	0.4202
J_{0d}	0.5205	0.5752	0.6198	0.6563	0.684	0.6934
J_{1d}	0.3565	0.3777	0.3935	0.4056	0.4143	0.4151
J_{2d}	0.2668	0.2777	0.2844	0.2906	0.2952	0.298
B	0.7979	0.7324	0.6872	0.6590	0.6391	0.6292
A	0.1778	0.1896	0.1972	0.2037	0.2086	0.2091
Er_w	1.52	1.61	1.77	1.97	2.18	2.41
$10^{-3} J / r_w$	5.87	9.31	14.08	20.27	27.63	35.66
$10^{-3} EI$	8.94	15.01	24.89	39.85	60.36	86.03
η_d	0.884	0.929	0.956	0.972	0.982	0.987
Er_w	1.72	1.76	1.86	2.03	2.23	2.46
$10^{-3} I / r_w$	5.50	9.02	13.65	19.72	27.54	36.31
$10^{-3} EI$	9.45	15.88	25.39	40.03	61.41	89.32

Для аргона расчеты проводились при $p = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$, $T_0 = 9000 - 14000^\circ \text{К}$, $T_w = 1000^\circ \text{К}$, $T_d = 5500^\circ \text{К}$.

В табл. 2 приведены данные для расчетов и полученные результаты; для сравнения в четырех последних строках таблицы приведены также значения Er_w , I / r_w , EI по результатам работы [6] с использованием дополнительных данных о зависимости величины I / r_w от T_0 при отсутствии излучения.

Расхождение в значениях η_d , Er_w , I / r_w , EI для воздуха не превышает соответственно 5.1; 6.7; 12.4 и 9.7%. Для аргона расхождение в значениях Er_w , I / r_w , EI не превышает соответственно 11.6, 6.8 и 5.4%.

На фиг. 2 проведено сопоставление результатов расчета безразмерного распределения температуры $T^\circ = T / T_0$ по данному приближенному методу и работе [6].

Поступила 10 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Maesker H. Über die Charakteristiken zylindrischer Bogen. Z. Phys., 1959, В. 157, Н. 1. (русск. перев.: Сб. «Движущаяся плазма», Изд. иностр. лит., 1961).
2. Goldenberg H. Approximate solution of nonlinear differential equation giving the temperature distribution on the positive column of static arc. Brit. J. Appl. Phys., 1959, Vol. 10, № 1.
3. Schmitz G., Patt H. J., Uhlenbusch J. Eigenschaften und Parameterabhängigkeit der Temperaturverteilung und der Charakteristik eines Zylindersymmetrisch Stickstoff — bogens. Z. Phys., 1963, В. 173, Н. 5.
4. Viegas J. R., Peng T. C. Electrical conductivity of ionized air in thermodynamic equilibrium. ARS Journ., 1961 vol. 31, № 5.
5. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Плешанов А. С., Самуйлов Е. В., Рождественский И. Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000° К и давлений от 0.0001 до 100 атм). ВЦ АН СССР, 1962.
6. Ветлущий В. Н., Онуфриев А. Т., Севастьяненко В. Г. Расчет электрической дуги в аргоне, стабилизированной стенками, с учетом переноса энергии излучением. ПМТФ, 1965, № 4.