

чений (1.8) получим условия (2.9) и

$$(2.10) \quad \frac{1}{E_4} > \frac{\nu_{41}^2}{E_1} + \frac{(\nu_{32}/E_2 - \nu_{41}\nu_{21}/E_1)^2}{1/E_2 - \nu_{21}^2/E_1} + \\ + \frac{\left[\frac{\nu_{43}}{E_3} - \frac{\nu_{41}\nu_{31}}{E_1} - \frac{(\nu_{42}/E_2 - \nu_{41}\nu_{21}/E_1)(\nu_{32}/E_2 - \nu_{31}\nu_{21}/E_1)}{1/E_2 - \nu_{21}^2/E_1} \right]^2}{\frac{1}{E_3} - \frac{\nu_{31}^2}{E_1} - \frac{(\nu_{32}/E_2 - \nu_{31}\nu_{21}/E_1)^2}{1/E_2 - \nu_{21}^2/E_1}}$$

Для материалов *триклинной сингонии* матрицы a_{ij} , A_{ij} имеют общий вид и следует использовать формулы для общего случая анизотропии (1.3)—(1.7), (1.10)—(1.15). Условия $d_5 > 0$, $d_6 > 0$, учитывая технические обозначения (1.8), можно переписать аналогично неравенствам (2.9), (2.10), но из-за громоздкости формул не будем их выписывать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Остросаблин Н. И. О наименьших границах констант упругости и приведении удельной энергии деформации к каноническому виду // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 2.
2. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах.— Л.: Машиностроение, 1986.
3. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость.— М.: Наука, 1988.
4. Остросаблин Н. И. Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отделение, Ин-т гидродинамики.— 1986.— Вып. 75.
5. Грах И. И., Сидорин Я. С. Об ограничениях на упругие коэффициенты анизотропных твердых тел // Механика полимеров.— 1974.— № 1.
6. Абрамчук С. С., Булдаков В. П. Допустимые значения коэффициентов Пуассона анизотропных материалов // Механика композит. материалов.— 1979.— № 2.
7. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах.— М.: Наука, 1965.

г. Новосибирск

Поступила 12/VII 1990 г.,

в окончательном варианте — 23/XI 1990 г.

УДК 539.3

Х. И. Альтенбах, А. А. Золочевский

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ — СЖАТИЮ

В настоящее время в механике твердого тела сформировался новый самостоятельный раздел — теория ползучести сред, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию [1—15]. Ее интенсивное развитие связано с большими инженерными приложениями, поскольку легкие сплавы, серые чугуны, полимерные, керамические, композитные и другие материалы, ползучесть которых зависит от вида нагружения, нашли широкое применение в различных областях техники. С другой стороны, в литературе [16—26] значительное внимание уделяется механике поврежденных сред. Большинство из существующих в этой области подходов представляют собой развитие и обобщение концепции Работнова [27] о параметре поврежденности материала.

Очевидно, что деформирование и накопление поврежденности протекают в условиях ползучести параллельно друг другу и оказывают взаимное влияние. Для описания этих явлений весьма удобно использовать уравнения состояния в энергетической форме, позволяющие совместить расчет на ползучесть с отысканием времени разрушения конструкции. При этом в уравнениях необходимо отразить влияние вида нагружения на ползучесть и длительную прочность.

1. Для построения связи между компонентами симметричных тензоров скоростей деформаций ползучести $\dot{\epsilon}$ и напряжений σ (тензоров второго ранга) в анизотропных средах воспользуемся существованием потенциала

$$(1.1) \quad F = \sigma_{\epsilon}^2.$$

Тогда

$$(1.2) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}.$$

Здесь σ_e — эквивалентное напряжение ($\sigma_e \geq 0$); λ — скалярный множитель, подлежащий определению; точка обозначает производную по времени t ; деформации считаются малыми.

Эквивалентное напряжение, устанавливающее эквивалентность одноосного и сложного напряженных состояний, должно быть однородной функцией инвариантов тензоров напряжений и некоторых постоянных. Физическое состояние рассматриваемой анизотропной среды опишем тензорами постоянных \mathbf{b} , ${}^{(4)}\mathbf{a}$ и ${}^{(3)}\mathbf{c}$ соответственно второго, четвертого и шестого рангов. Далее образуем смешанные инварианты тензоров напряжений и постоянных: линейный $\sigma_1 = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, квадратичный $\sigma_0^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot {}^{(4)}\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ и кубичный $\sigma_2^3 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot {}^{(6)}\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ (точки показывают суммирование по повторяющимся в тензорах индексам, принимающим значения 1, 2, 3). Затем запишем выражение для эквивалентного напряжения

$$(1.3) \quad \sigma_e = \sigma_0 + \alpha \sigma_1 + \gamma \sigma_2,$$

где α и γ — числовые коэффициенты, учитывающие удельный вес различных нечетных совместных инвариантов в представлении для σ_e .

Предложенное выражение (1.3) достаточно общее и включает в себя ряд частных случаев. Положив, например, в (1.3) $\alpha = \gamma = 0$, получаем соотношение $\sigma_e = \sigma_0$, используемое для традиционных анизотропных сред [20, 27]. Если в (1.3) принять $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, приходим к выражению для эквивалентного напряжения $\sigma_e = \sigma_0 + \sigma_1$, ранее предложенному в [12].

Далее, выполняя дифференцирование (1.2) с применением (1.1), (1.3), имеем

$$(1.4) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\lambda \sigma_e (\partial \sigma_0 / \partial \boldsymbol{\sigma} + \alpha \partial \sigma_1 / \partial \boldsymbol{\sigma} + \gamma \partial \sigma_2 / \partial \boldsymbol{\sigma}).$$

Учитывая формулы

$$\partial \sigma_0 / \partial \boldsymbol{\sigma} = {}^{(4)}\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} / \sigma_0, \quad \partial \sigma_1 / \partial \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}, \quad \partial \sigma_2 / \partial \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot {}^{(6)}\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} / \sigma_2^2,$$

приходим из (1.4) к уравнениям

$$(1.5) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\lambda \sigma_e \left[{}^{(4)}\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} / \sigma_0 + \alpha \mathbf{b} + \gamma (\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot {}^{(6)}\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} / \sigma_2^2) \right].$$

Затем, умножая правую и левую часть (1.5) на $\boldsymbol{\sigma}$ и выполняя суммирование, получим для удельной мощности рассеяния $W = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ соотношение $W = 2\lambda \sigma_e^2$, т. е. в зависимостях (1.5)

$$(1.6) \quad 2\lambda \sigma_e = W / \sigma_e.$$

За меру интенсивности процесса ползучести примем удельную мощность рассеяния W , а за меру поврежденности материала — удельную энергию рассеяния $\varphi = \int W dt$. Допустим, что независимо от вида напряженного состояния величина рассеянной к моменту разрушения энергии при ползучести $\varphi_* = \text{const}$. Примем следующее уравнение состояния, связывающее при фиксированной температуре процессы ползучести и разрушения:

$$(1.7) \quad W = f(\sigma_e, \varphi).$$

Одной из форм записи (1.7) для неупрочняющихся сред может быть

$$(1.8) \quad W = \frac{v(\sigma_e) \varphi_*^q}{(\varphi_* - \varphi)^c}$$

(q — константа). Заметим, что для упрочняющихся сред возможно обобщение соотношения (1.8) в соответствии с предложениями в [20].

Итак, учитывая (1.6), (1.8), получаем из (1.5) тензорио-нелинейные физические зависимости

$$(1.9) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \chi(\sigma_e) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q [\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} / \sigma_0 + \alpha \mathbf{b} + \gamma (\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot^{(6)} \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} / \sigma_2^2)]$$

и кинетическое уравнение

$$(1.10) \quad d\varphi/dt = v(\sigma_e) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q.$$

Функция $\chi(\sigma_e) = v(\sigma_e)/\sigma_e$ в (1.9) конкретизируется на основе данных базовых экспериментов и может быть задана в простейшем виде как степенная зависимость σ_e^n , закон гиперболического синуса $\text{sh}(\sigma_e/d)$ и, с известными оговорками, как экспоненциальное представление $\exp(\sigma_e/p)$ (n, d, p — постоянные).

Нетрудно установить, что уравнения (1.9) вытекают из достаточно общих зависимостей [27]

$$(1.11) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H} + {}^{(4)}\mathbf{M} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} + {}^{(6)}\mathbf{L} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

В нашем случае тензорные функции \mathbf{H} , ${}^{(4)}\mathbf{M}$ и ${}^{(6)}\mathbf{L}$ в (1.11) найдены как

$$\mathbf{H} = \Psi \alpha \mathbf{b}, \quad {}^{(4)}\mathbf{M} = \Psi {}^{(4)}\mathbf{a} / \sigma_0, \quad {}^{(6)}\mathbf{L} = \Psi \gamma {}^{(6)}\mathbf{c} / \sigma_2^2,$$

где $\Psi = v(\sigma_e) \varphi_*^q / [(\varphi_* - \varphi)^q \sigma_e]$.

2. Рассмотрим некоторые частные формы записи уравнений (1.9), (1.10). Но прежде заметим, что вследствие симметрии тензора напряжений введенные тензоры постоянных тоже являются симметричными, т. е. удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} b_{ij} &= b_{ji}, \quad a_{ijkl} = a_{jihl} = a_{ijlk} = a_{klij}, \\ c_{ijklmn} &= c_{jiklmn} = c_{ijlkmn} = c_{ijklnm} = c_{klijmn} = \\ &= c_{mnijkl} = c_{ijmnlk} = c_{mnlkij} = c_{klmnlj}. \end{aligned}$$

С учетом этого инвариант σ содержит шесть независимых постоянных, $\sigma_1^2 = 24$, $\sigma_2^2 = 56$.

Для ортотропных сред при совпадении координатных осей с главными направлениями анизотропии зависимости (1.9) принимают вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} &= \Psi [(a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22} + a_{1133}\sigma_{33})/\sigma_0 + \alpha b_{11} + \gamma (c_{111111}\sigma_{11}^2 + \\ &+ c_{112222}\sigma_{22}^2 + c_{113333}\sigma_{33}^2 + 2c_{111122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2c_{111133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2c_{112233}\sigma_{22}\sigma_{33} + \\ &+ 4c_{111212}\sigma_{12}^2 + 4c_{112323}\sigma_{23}^2 + 4c_{111313}\sigma_{13}^2) / \sigma_2^2], \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \Psi [2a_{1212}\sigma_{12}/\sigma_0 + \gamma (4c_{121211}\sigma_{12}\sigma_{11} + 4c_{121222}\sigma_{12}\sigma_{22} + \\ &+ 4c_{121233}\sigma_{12}\sigma_{33} + 8c_{122313}\sigma_{23}\sigma_{13}) / \sigma_2^2]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi &= \chi(\sigma_e) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q; \quad \sigma_1 = b_{11}\sigma_{11} + b_{22}\sigma_{22} + b_{33}\sigma_{33}; \\ \sigma_0^2 &= a_{1111}\sigma_{11}^2 + a_{2222}\sigma_{22}^2 + a_{3333}\sigma_{33}^2 + 2a_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2a_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + \\ &+ 2a_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 4a_{1212}\sigma_{12}^2 + 4a_{2323}\sigma_{23}^2 + 4a_{1313}\sigma_{13}^2; \\ \sigma_2^2 &= c_{111111}\sigma_{11}^3 + c_{222222}\sigma_{22}^3 + c_{333333}\sigma_{33}^3 + 3c_{111122}\sigma_{11}^2\sigma_{22} + 3c_{111133}\sigma_{11}^2\sigma_{33} + \\ &+ 3c_{222211}\sigma_{22}^2\sigma_{11} + 3c_{222233}\sigma_{22}^2\sigma_{33} + 3c_{333311}\sigma_{33}^2\sigma_{11} + 3c_{333322}\sigma_{33}^2\sigma_{22} + \\ &+ 6c_{112233}\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 12c_{121211}\sigma_{12}^2\sigma_{11} + 12c_{121222}\sigma_{12}^2\sigma_{22} + 12c_{121233}\sigma_{12}^2\sigma_{33} + \\ &+ 12c_{232311}\sigma_{23}^2\sigma_{11} + 12c_{232322}\sigma_{23}^2\sigma_{22} + 12c_{232333}\sigma_{23}^2\sigma_{33} + 12c_{131311}\sigma_{13}^2\sigma_{11} + \\ &+ 12c_{131322}\sigma_{13}^2\sigma_{22} + 12c_{131333}\sigma_{13}^2\sigma_{33} + 48c_{122313}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}; \end{aligned}$$

остальные физические соотношения получаются из (2.1) круговой перестановкой индексов 1, 2, 3. Подчеркнем, что для рассматриваемой орто-

тропной среды тензор b включает три независимые постоянные, $(*)a$ — девять, $(6)c$ — двадцать.

При описании ползучести изотропных сред в уравнениях (2.1) следует положить

$$\begin{aligned} b_{ij} &= B\delta_{ij}, \quad a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + (C/2)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ c_{ijklmn} &= D\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + (K/6)(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \\ &+ \delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{kl}\delta_{in}\delta_{jm} + \delta_{mn}\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{mn}\delta_{il}\delta_{jk}) + \\ &+ (E/8)(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jn} + \\ &+ \delta_{il}\delta_{kn}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{kj}\delta_{ln} + \delta_{im}\delta_{kn}\delta_{lj} + \delta_{in}\delta_{kj}\delta_{lm} + \\ &+ \delta_{in}\delta_{km}\delta_{lj}) \end{aligned}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Тогда определяющие зависимости (2.1) запишутся как

$$(2.2) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \chi(\sigma_e) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q \{ (AJ_1\delta_{ij} + C\sigma_{ij})/\sigma_0 + \alpha B\delta_{ij} + \\ + \gamma [DJ_1^2\delta_{ij} + E\sigma_{ik}\sigma_{kj} + K/3(J_2\delta_{ij} + 2J_1\sigma_{ij})]/\sigma_2^2 \},$$

где $\sigma_1 = BJ_1$; $\sigma_0^2 = AJ_1^2 + CJ_2$; $\sigma_2^3 = DJ_1^3 + KJ_1J_2 + EJ_3$; $J_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij}$; $J_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$; $J_3 = \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}$. Таким образом, предлагаемые уравнения изотропной ползучести используют три инварианта тензора напряжений (J_1, J_2, J_3) и шесть параметров (A, B, C, D, E, K) в выражении для σ_e .

Отметим, что при практическом применении физических зависимостей (2.1), (2.2) привлекаются также соотношения (1.3), (1.10), сохраняющие такую же форму записи, как и в случае более общих уравнений (1.9).

3. Обсудим возможности рассматриваемого подхода на примере ползучести изотропных сред, описываемых уравнениями (2.2). Полученные здесь выводы и рекомендации могут быть затем использованы при анализе зависимостей (1.9).

Для определения шести параметров, входящих в (2.2), требуется шесть опытных данных. С этой целью рассмотрим следующие базовые эксперименты на ползучесть вплоть до разрушения, при которых в образцах из изучаемого материала создается однородное напряженное состояние:

одноосное растяжение ($\sigma_{11} \neq 0$), устанавливающее в направлении прикладываемой нагрузки зависимость

$$(3.1) \quad \dot{\varepsilon}_{11} = K_+ \sigma_{11}^n \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q$$

и в поперечном направлении $\dot{\varepsilon}_{22} = -Q \sigma_{11}^n \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q$; одноосное сжатие ($\sigma_{11} \neq 0$), при котором

$$(3.2) \quad \dot{\varepsilon}_{11} = -K_- |\sigma_{11}|^n \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q;$$

чистое кручение ($\sigma_{12} \neq 0$) с определением скоростей изменения угловой

$$(3.3) \quad 2\dot{\varepsilon}_{12} = N \sigma_{12}^n \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q$$

и осевой $\dot{\varepsilon}_{11} = M \sigma_{12}^n \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q$ деформаций;

нагружение гидростатическим давлением ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -|J_1|/3$), устанавливающее закон $\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_{33} = -P |\sigma_{11}|^n \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q$; константы материала $K_+, K_-, Q, N, M, P, n, q, \varphi_*$ считаются известными.

Принимая затем в (2.2) $\chi(\sigma_e) = \sigma_e^n$ и записывая для каждого из рассмотренных выше напряженных состояний соответствующие формулы, вытекающие из (2.2), найдем после несложных преобразований параметры

в физических зависимостях:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} C &= N^{2r}/2, \quad \alpha B = M/(\sqrt{2C})^n, \quad A = X^2 - C, \\ 6\gamma^3 D &= [\sqrt{9A + 3C} - 3\alpha B - (3P)^r]^3 - 3(T - \alpha B)^3 + \\ &\quad + 18(A/\sqrt{A+C} + \alpha B + QK_+^{-nr})(T - \alpha B)^2, \\ 2\gamma^3 K &= 3(T - \alpha B)^3 - [\sqrt{9A + 3C} - 3\alpha B - (3P)^r]^3 - \\ &\quad - 24(A/\sqrt{A+C} + \alpha B + QK_+^{-nr})(T - \alpha B)^2, \\ \gamma^3 L &= (T - \alpha B)^3 - \gamma^3 D - \gamma^3 K. \end{aligned}$$

Здесь $T = (K_+^r - K_-^r)/2$; $X = (K_+^r + K_-^r)/2$; $r = 1/(n+1)$. По аналогичной методике определяются параметры в уравнениях (2.2) при других представлениях $\chi(\sigma_e)$.

Получим частные физические соотношения, вытекающие из (2.2) и содержащие меньшее число параметров. По-прежнему считаем $\chi(\sigma_e) = \sigma_e^n$. Если по данным базовых экспериментов будут установлены, например, равенства

$$(3.5) \quad T = MN^{-nr}, \quad \sqrt{9X^2 - 3N^{2r}} = 3T + (3P)^r,$$

то из (3.4) имеем $\gamma = 0$. Поэтому $\sigma_e = \alpha\sigma_1 + \sigma_0$, т. е. в этом случае эквивалентное напряжение не содержит третий инвариант тензора напряжений. Тогда уравнения ползучести (2.2) записываются в виде

$$(3.6) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \chi(\sigma_e) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q \left(\frac{AJ_1 \delta_{ij} + C\sigma_{ij}}{\sigma_0} + \alpha B \delta_{ij} \right),$$

а соотношения (3.5) являются условиями применения тензорно-линейных зависимостей (3.6). В случае выполнения равенств

$$(3.7) \quad 3T^3 - [\sqrt{9X^2 - 3N^{2r}} - (3P)^r]^3 = Y = M = 0,$$

где $Y = X = N^{2r}/(2X) + QK_+^{-nr}$, на основе формул (3.4) приходим к требованиям $\alpha B = D = K = 0$. При этом зависимости (2.2) вырождаются в уравнения

$$(3.8) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \chi(\sigma_e) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q \left(\frac{AJ_1 \delta_{ij} + C\sigma_{ij}}{\sigma_0} + \gamma \frac{L\sigma_{ih}\sigma_{kj}}{\sigma_1^2} \right).$$

Полученные физические зависимости (3.8) по-прежнему, как и (2.2), тензорно-нелинейные и используют все три инварианта напряженного состояния, однако содержат меньшее число параметров по сравнению с исходными уравнениями (2.2). Возможности применения зависимостей (3.8) обусловлены равенствами (3.7). Если же по опытным данным будут установлены соотношения

$$(3.9) \quad [\sqrt{9X^2 - 3N^{2r}} - (3P)^r]^3 - 9T^3 = T + 3Y = M = 0,$$

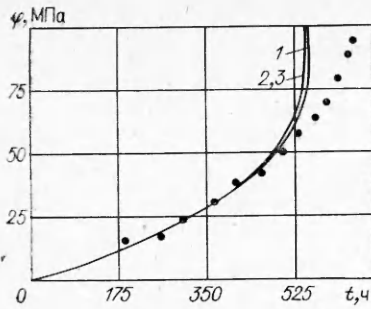
то из (3.4) следует $\alpha B = D = L = 0$, а поэтому уравнения (2.2) принимают вид

$$(3.10) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \chi(\sigma_e) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q \left[\frac{AJ_1 \delta_{ij} + C\sigma_{ij}}{\sigma_0} + \gamma \frac{K(J_2 \delta_{ij} + 2J_1 \sigma_{ij})}{3\sigma_1^2} \right].$$

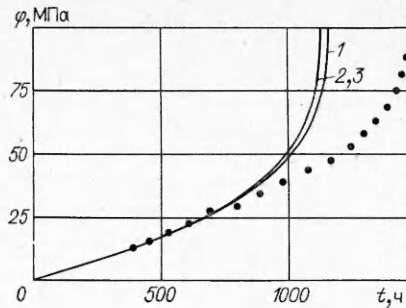
Условия (3.9) будут при этом рекомендациями по использованию зависимостей (3.10).

Рассмотренные трехпараметрические зависимости (3.6), (3.8), (3.10) — неединственные уравнения, вытекающие из (2.2). Например, при выполнении равенств

$$(3.11) \quad K_+ = K_-, \quad M = P = 0, \quad N^{2r} = 3K_+^{2r}$$



Р и с. 1



Р и с. 2

из формул (3.4) следуют равенства $\alpha B = \gamma = 0$, $C = -3A$. При этом физические зависимости (2.2) вырождаются в известные уравнения ползучести [19]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} C \chi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} C \sigma_i \right) \varphi_*^q / (\varphi_* - \varphi)^q \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij} \right)$$

материалов, нечувствительных к виду нагружения. Таким образом, зависимости (2.2) обладают достаточной общностью и включают в себя как частные случаи ряд определяющих уравнений.

Далее обратимся к экспериментальным данным [7] ползучести и длительной прочности титанового сплава ОТ-4 при температуре $T = 748$ К. К сожалению, из-за отсутствия в [7] всех результатов сформулированных ранее базовых экспериментов не представляется возможным привлечь уравнения (2.2) и установить справедливость тех или иных методологических рекомендаций из (3.5), (3.7), (3.9). Поэтому воспользуемся результатами трех опытов (растяжение, сжатие, кручение), описываемыми соотношениями (3.1)–(3.3). Установлено [7], то постоянные материала: $K_+ = 13,3 \cdot 10^{-14}$ МПа $^{-n} \cdot$ ч $^{-1}$, $K_- = 7,5 \cdot 10^{-14}$ МПа $^{-n} \cdot$ ч $^{-1}$, $N = 27,7 \times 10^{-13}$ МПа $^{-n} \cdot$ ч $^{-1}$, $n = 4$, $q = 2$, $\varphi_* = 100$ МПа. Используя эти опытные данные, можно определить параметры в физических зависимостях (3.6), (3.8), (3.10), принимая $\chi(\sigma_e) = \sigma_e^n$.

Сопоставим результаты расчета на основе соотношений (3.6), (3.8), (3.10) с экспериментальными данными при двумерном напряженном состоянии для рассматриваемого титанового сплава. Эксперименты проводились [7] на тонкостенных трубчатых образцах, нагруженных растягивающим усилием и крутящим моментом. На рис. 1, 2 представлено изменение удельной рассеянной работы φ с течением времени t в двух экспериментах на растяжение с кручением: $\sigma_{11} = 194,9$ МПа, $\sigma_{12} = 46,6$ МПа и $\sigma_{11} = 156,3$ МПа, $\sigma_{12} = 52,1$ МПа соответственно (точки — экспериментальные данные, линии 1–3 — результаты расчетов, отвечающие соотношениям (3.6), (3.8), (3.10)). Все расчеты проведены интегрированием кинетического уравнения (1.10) методом Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага.

Учитывая естественный для ползучести и особенно заметный на третьей стадии разброс опытных данных, совпадение теоретических и экспериментальных результатов можно считать удовлетворительным. Отметим также близость между собой расчетных данных, полученных на основе физических зависимостей, по-разному описывающих разносопротивляемость растяжению — сжатию. В этой ситуации оправданно использование, по крайней мере, при двумерном напряженном состоянии как более простых тензорно-линейных уравнений (3.6). Аналогичный вопрос для трехмерного напряженного состояния пока остается открытым. Однако несомненно установленным фактом является то, что невыполнение хотя бы одного из равенств (3.11) не позволяет применять традиционные уравнения ползучести, не учитывающие влияние вида нагружения.

Разработанные в настоящей работе теоретические положения, сформулированные базовые эксперименты и методологические рекомендации могут служить основой и направлением дальнейших теоретических и экспериментальных исследований в области ползучести изотропных и анизотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. При этом ни в коей мере не отвергаются другие подходы, сформировавшиеся в современной теории ползучести и длительной прочности рассматриваемых сред, например энергетический вариант [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соснин О. В. О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие // ПМТФ.— 1970.— № 5.
2. Цвелодуб И. Ю. О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отделение, Ин-т гидродинамики.— 1976.— Вып. 25.
3. Цвелодуб И. Ю. О некоторых возможных путях построения теории установившейся ползучести сложных сред // Изв. АН СССР. МТТ.— 1981.— № 2.
4. Никитенко А. Ф., Соснин О. В. Изгиб балки из материала с разными характеристиками ползучести при растяжении и сжатии // Пробл. прочности.— 1971.— № 6.
5. Никитенко А. Ф., Цвелодуб И. Ю. О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отделение, Ин-т гидродинамики.— 1979.— Вып. 43.
6. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии: Тр. Всесоюз. совещ.— Киев: Наук. думка, 1978.
7. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // ПМТФ.— 1979.— № 4.
8. Малинин Н. Н., Хажинский Г. М. Влияние шарового тензора напряжений на ползучесть металлов // Механика деформируемых тел и конструкций.— М.: Машиностроение, 1975.
9. Ленин Г. Ф. Ползучесть металлов и критерии жаропрочности.— М.: Metallurgia, 1976.
10. Перас А. Я., Даукнис В. И. Прочность огнеупорной керамики и методы ее исследования.— Вильнюс: Моклас, 1977.
11. Бойков В. Н., Лазаренко Э. С. Кратковременная ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению — сжатию // Изв. вузов. Машиностроение.— 1976.— № 11.
12. Золочевский А. А. Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов // ПМТФ.— 1982.— № 4.
13. Betten J. Creep theory of anisotropic solids // J. of Rheology.— 1981.— V. 25, N 6.
14. Sobotka Z. Tensorial expansions in non-linear mechanics.— Praga: Academia, 1984.
15. Murakami S., Jamada J. Effects of hydrostatic pressure and material anisotropy on the transient creep of thickwalled tubes // Intern. J. Mech. Sci.— 1974.— V. 16, N 3.
16. Закономерности ползучести и длительной прочности/Под ред. С. А. Шестерикова.— М.: Машиностроение, 1983.
17. Локощенко А. М. Исследование поврежденности материала при ползучести и длительной прочности // ПМТФ.— 1982.— № 6.
18. Никитенко А. Ф., Вакуленко Л. Д. Ползучесть и длительная прочность элементов конструкций: Библиогр. указатель.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1987.
19. Соснин О. В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 1 // Пробл. прочности.— 1973.— № 5.
20. Соснин О. В., Шокало И. К. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 2 // Пробл. прочности.— 1974.— № 1.
21. Kachanov L. M. Introduction to continuum damage mechanics.— Dordrecht: Nijhoff, 1986.
22. Lemaitre J., Chaboche J.-L. Mecanique des materiaux solides.— Paris: Dunod, 1985.
23. Betten J. Tensorrechnung für Ingenieure.— Stuttgart: Teubner, 1987.
24. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // Trans. of ASME. J. Appl. Mech.— 1988.— V. 55, N 2.
25. Krajcinovic D. Continuum damage mechanics // Appl. Mech. Rev.— 1984.— V. 37, N 1.
26. Hull J. Stiffness and strength of damaged materials // ZAMM.— 1988.— V. 68, N 4.
27. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
28. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Пробл. прочности.— 1979.— № 7.

г. Харьков

Поступила 27/IX 1990 г.