УДК 539.3:534.1

ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

С. Д. Алгазин, И. А. Селиванов*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия
* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия
E-mails: algazinsd@mail.ru, shertors@gmail.com

Рассматриваются собственные колебания прямоугольной пластины с двумя защемленными и двумя свободно опертыми краями. С использованием метода Бубнова — Галеркина вычислены первые собственные значения, причем в случае одной пробной функции первое собственное значение вычисляется с погрешностью менее 1 %. Проведено сравнение с известными результатами, приведены собственные формы.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, свободные колебания пластины, метод Бубнова — Галеркина, вычислительный эксперимент.

DOI: 10.15372/PMTF20210207

Введение. В данной работе рассматривается решение задачи о колебаниях прямоугольной пластины. Подобные задачи решались различными методами [1]. Особенностью этих задач является необходимость точного вычисления собственных значений задачи. Получать аналитические формы для любых комбинаций граничных условий не всегда возможно, поэтому необходимо строить решения, позволяющие находить точное собственное значение при малых вычислительных затратах. Более подробно данная проблема рассмотрена в работе [1], в которой также предлагается искать решение в виде комбинации тригонометрических и аналитических функций, при этом необходимо определить восемь различных коэффициентов.

Решению задач о колебаниях прямоугольной пластины посвящена монография [2], в которой построение решения основано на методе суперпозиции и решении Леви [3]. Рассматриваемые задачи делятся на подзадачи, которые решаются отдельно. При этом решение задачи строится таким образом, что собственное значение нужно вычислять методом перебора.

Применяя процедуру Бубнова — Галеркина [4], можно сформулировать задачу в матричной форме, получая в результате ряд собственных значений на редкой сетке. Используя это преимущество метода Бубнова — Галеркина, можно строить точные решения задачи о собственных колебаниях прямоугольной пластины.

1. Постановка задачи о собственных колебаниях прямоугольной пластины. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях прямоугольной пластины с двумя жестко закрепленными и двумя свободно опертыми краями. Схема пластины представлена на рис. 1.

Работа выполнена в рамках Государственного задания АААА-А20-120011690132-4.

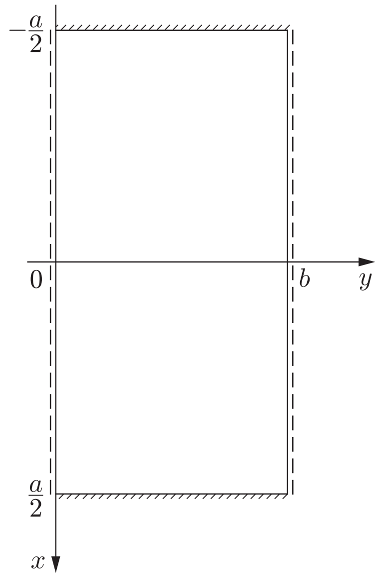

Рис. 1. Схема пластины

Уравнение собственных колебаний пластины и соответствующие граничные условия записываются следующим образом [2–6]:

$$D\nabla^4 w(x,y,t) + \rho h \,\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial^2 t} = 0; \tag{1}$$

$$w(x,y,t)\big|_{|x|=a/2} = 0, \qquad \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x}\Big|_{|x|=a/2} = 0; \tag{2}$$

$$w(x,y,t)\big|_{y=0,b} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial^2 y}\Big|_{y=0,b} = 0. \tag{3}$$

Здесь $w(x,y,t)$ — прогиб пластины; $\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2$; $\nabla^2 = \partial^2/\partial^2 x + \partial^2/\partial^2 y$ — бигармонический дифференциальный оператор, записанный в прямоугольной системе координат; $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины, $\text{Н}\cdot\text{м}$; ρ — плотность материала пластины, кг/м^3; h — толщина пластины, м; E — модуль Юнга, Па; ν — коэффициент Пуассона.

Решение задачи можно представить в виде [5]

$$w(x,y,t) = w(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,. \tag{4}$$

Таким образом, задача (1) с учетом допущения (4) принимает вид

$$\nabla^4 w(x,y) = \lambda w(x,y),$$

где величина $\lambda = \rho h\omega^2/D$ имеет размерность м$^{-4}$ (безразмерной величиной является $b^2\sqrt{\lambda}\,$).

2. Построение решения. Для пластин, два противоположных края которых свободно оперты, решение будем искать в виде ряда (см., например, [4])

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{m_x}\sum_{n=1}^{m_y} U_m(x)\sin\frac{n\pi y}{b},$$
$$m = 1,3,5,\ldots,m_x, \qquad n = 1,2,3,\ldots,m_y, \tag{5}$$

который удовлетворяет граничным условиям (3).

Рассматривая только симметричные относительно оси y колебания (получая только четные собственные формы), функции $U_m(x)$ примем в следующем виде:

$$U_m(x) = \frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi x}{b} + B_m \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh}\frac{m\pi x}{b}$$

(A_m, B_m — константы, определяемые из граничных условий (2)).

Введем обозначение $V_n(y) = \sin(n\pi y/b)$. Тогда выражение (5) принимает вид

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{m_x}\sum_{n=1}^{m_y} U_m(x)V_n(y).$$

3. Метод Бубнова — Галеркина. Согласно методу Бубнова — Галеркина решение будем искать в виде [7]

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{m_x}\sum_{n=1}^{m_y} a_m U_m(x) b_n V_n(y),$$

где a_m, b_n — произвольно выбранные постоянные, которые определяются из условия ортогональности базисных функций к невязке

$$\int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{m=1}^{m_x}\sum_{n=1}^{m_y} \big[\nabla^4(a_m U_m(x) b_n V_n(y)) - \lambda(a_m U_m(x) b_n V_n(y))\big] U_p(x)V_q(y)\,dx\,dy = 0. \qquad (6)$$

Преобразуем условие (6). Заметим, что

$$\nabla^4(U_m(x)V_n(y))U_p(x)V_q(y) = \nabla^2(U_m(x)V_n(y))\nabla^2(U_p(x)V_q(y)).$$

Вводя матрицу A размером $p\times q$, $m\times n$, для элемента $pqmn$ этой матрицы получаем

$$A_{pqmn} = \int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_p''\,dx \int_0^b V_n V_q\,dy + \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p\,dx \int_0^b V_n'' V_q''\,dy + {}$$
$$+ \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p''\,dx \int_0^b V_n'' V_q\,dy + \int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_p\,dx \int_0^b V_n V_q''\,dy.$$

Вводя матрицу B того же размера, что и A, для элемента $pqmn$ получаем выражение

$$B_{pqmn} = \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p\,dx \int_0^b V_n V_q\,dy.$$

Вычислим интегралы, учитывая, что

$$V_n'' = \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\sin\frac{n\pi y}{b} = -\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2 \sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad V_q = \delta_{nq}V_n,$$

$$U_m''(x) = \Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^2 A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi x}{b} + 2\Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^2 B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi x}{b} + \Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^3 B_m x \operatorname{sh}\frac{m\pi x}{b}$$

(δ_{nq} — символ Кронекера). Тогда

$$\int_0^b V_n'' V_q\,dy = \int_0^b V_n V_q''\,dy = -\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2 \int_0^b V_n^2\,dy = \delta_{nq}\,\frac{1}{2}\,\frac{n\pi}{b}\,\big(\cos(n\pi)\sin(n\pi) - n\pi\big),$$

$$\int\limits_0^b V_n V_q\,dy = -\delta_{nq}\,\frac{b}{2n\pi}\,\big(\cos(n\pi)\sin(n\pi) - n\pi\big), \tag{7}$$

$$\int\limits_0^b V_n'' V_q\,dy = -\delta_{nq}\,\frac{1}{2}\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^3\big(\cos(n\pi)\sin(n\pi) - n\pi\big).$$

Таким образом, интегралы в (7) являются ненулевыми только при $n = q$.

Интегралы по переменной x могут быть вычислены либо аналитически, либо численно. При этом в случае $m = p$ целесообразно записать аналитическую формулу, а в случае $m \neq p$ — вычислить интегралы с использованием квадратурных формул

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m_x} C_k f(x_k),$$

$$C_k = \frac{a}{m_x}\Big(1 + \sum_{l=2(2)}^{m_x-1} \frac{2}{1-l^2}\cos(l\theta_k)\Big), \qquad \theta_k = \frac{a}{2}\,\frac{2k-1}{2m_x}\,\pi, \quad x_k = \cos\Big(\frac{a}{2}\,\frac{2k-1}{2m_x}\,\pi\Big).$$

В результате исходная задача (6) записывается в виде

$$\sum_{m,p=1}^{m_x}\sum_{n,q=1}^{m_y} a_m b_n A_{pqmn} = \lambda \sum_{m,p=1}^{m_x}\sum_{n,q=1}^{m_y} a_m b_n B_{pqmn}, \tag{8}$$

где суммирование по m, p и n, q проводится отдельно. При этом матрица B является недиагональной, а матрица A — симметричной.

4. Определение собственных значений. Задача сводится к определению собственных значений системы линейных алгебраических уравнений (8). Эти значения можно вычислить следующим образом:

$$B^{-1}A = \lambda E. \tag{9}$$

Для получения собственных значений λ необходимо вычислить собственные значения матрицы $B^{-1}A$. Такие вычисления можно выполнить с помощью подпрограмм ELMHES, ELTRAN и HQR2 библиотеки EISPACK [8].

Матрица B в левой части (9) плохо обусловлена, что приводит к возникновению ошибок при обращении матрицы. Применение процедуры итерационного уточнения [9] не оказывает существенного влияния на точность вычисления собственных значений.

5. Получение приближенного значения первого собственного значения. Если рассмотреть решение, в котором $m_x = m_y = 1$, т. е. $m = n = p = q = 1$, то из (9) следует

Таблица 1

Приближенные и точные значения собственных значений для различных пластин

φ	$b^2\sqrt{\lambda}$		
	Приближенное значение	Точное значение [3]	Δ, %
1,0	29,087 171 22	28,9509	0,47
1,5	17,491 057 39	17,3730	0,68
0,4	146,006 353 40	145,4839	0,36
2/3	56,569 370 81	56,3481	0,39

Таблица 2

Собственные значения для сеток различного размера и различных значений a, b, φ

25×25 ($a = b = 2$, $\varphi = 1$)	25×25 ($a = 3$, $b = 2$, $\varphi = 1{,}5$)	17×17 ($a = 4$, $b = 2$, $\varphi = 2$)	25×25 ($a = 2{,}5$, $b = 2$, $\varphi = 1{,}25$)
28,951 910 528	17,481 586 540	13,567 112 199	21,316 341 135
54,743 212 672	45,484 590 932	42,684 675 502	48,517 702 057
102,215 483 810	63,702 743 866	48,143 638 987	86,970 995 036
128,817 819 860	89,952 676 890	73,172 684 662	96,908 804 415
154,588 481 230	94,212 032 164	91,383 089 231	112,934 984 290
170,345 705 210	136,660 789 330	119,644 835 400	158,922 203 720
199,699 869 470	163,072 480 590	155,719 801 950	165,504 075 620
255,724 960 990	173,810 416 990	155,719 801 950	225,639 831 980
258,613 254 030	198,342 152 830	160,585 885 680	238,633 269 170
265,132 668 970	203,966 101 330	184,248 542 960	254,088 777 180
271,510 583 280	241,763 983 050	187,179 853 460	264,013 433 860
299,535 235 220	251,719 616 030	206,200 350 190	268,036 343 590
310,858 778 010	291,615 403 750	246,658 473 580	308,976 678 640
328,428 556 610	305,603 159 720	249,385 643 610	313,720 179 950
348,367 786 220	360,127 005 580	275,237 852 490	362,426 533 920
351,076 768 020	390,334 202 440	308,211 405 610	376,934 111 220
366,816 551 300	399,407 368 260	339,465 908 760	418,308 761 560
376,321 105 190	488,465 221 110	357,950 166 330	479,900 782 500
443,274 746 700	495,988 260 890	383,567 191 720	490,625 559 130
457,419 157 470	527,153 788 610	392,000 873 550	508,086 113 690
494,868 708 520	557,941 691 120	486,101 058 590	546,309 535 870
519,745 690 300	565,267 235 390	498,543 023 990	556,014 806 970
529,583 115 830	581,329 927 770	512,565 360 020	638,577 523 540
584,000 916 720	622,204 385 100	629,178 299 120	658,553 690 460
585,242 688 770	623,300 706 450	634,106 662 100	683,036 847 160
619,083 382 440	637,541 498 110	637,247 267 220	693,765 859 260
635,573 798 370	659,821 754 650	669,689 691 160	806,288 876 010
637,315 179 720	659,821 754 650	789,851 433 770	810,310 968 590
642,726 860 840	683,230 765 820	802,022 627 850	826,680 361 260
674,625 178 380	749,264 875 280	822,870 802 600	861,053 982 090
704,560 765 790	769,249 022 660	884,602 064 670	878,505 384 690
730,692 661 510	804,131 287 870	989,531 987 240	912,433 870 840
746,915 921 430	841,824 317 440	996,428 480 110	933,682 997 150
751,081 798 370	902,911 981 030	1008,398 843 700	979,813 236 160
761,540 340 360	930,864 356 440	1008,398 843 700	993,761 470 780
800,629 906 700	954,180 903 110	1011,459 591 400	1048,486 622 100
810,368 806 150	954,180 903 110	1090,947 007 500	1057,615 216 500
848,433 358 940	991,625 802 110	1196,742 895 900	1132,341 140 700
887,567 335 560	1021,354 548 500	1218,889 304 700	1145,912 558 200
896,862 526 520	1023,563 976 700	1244,187 753 000	1152,554 761 400

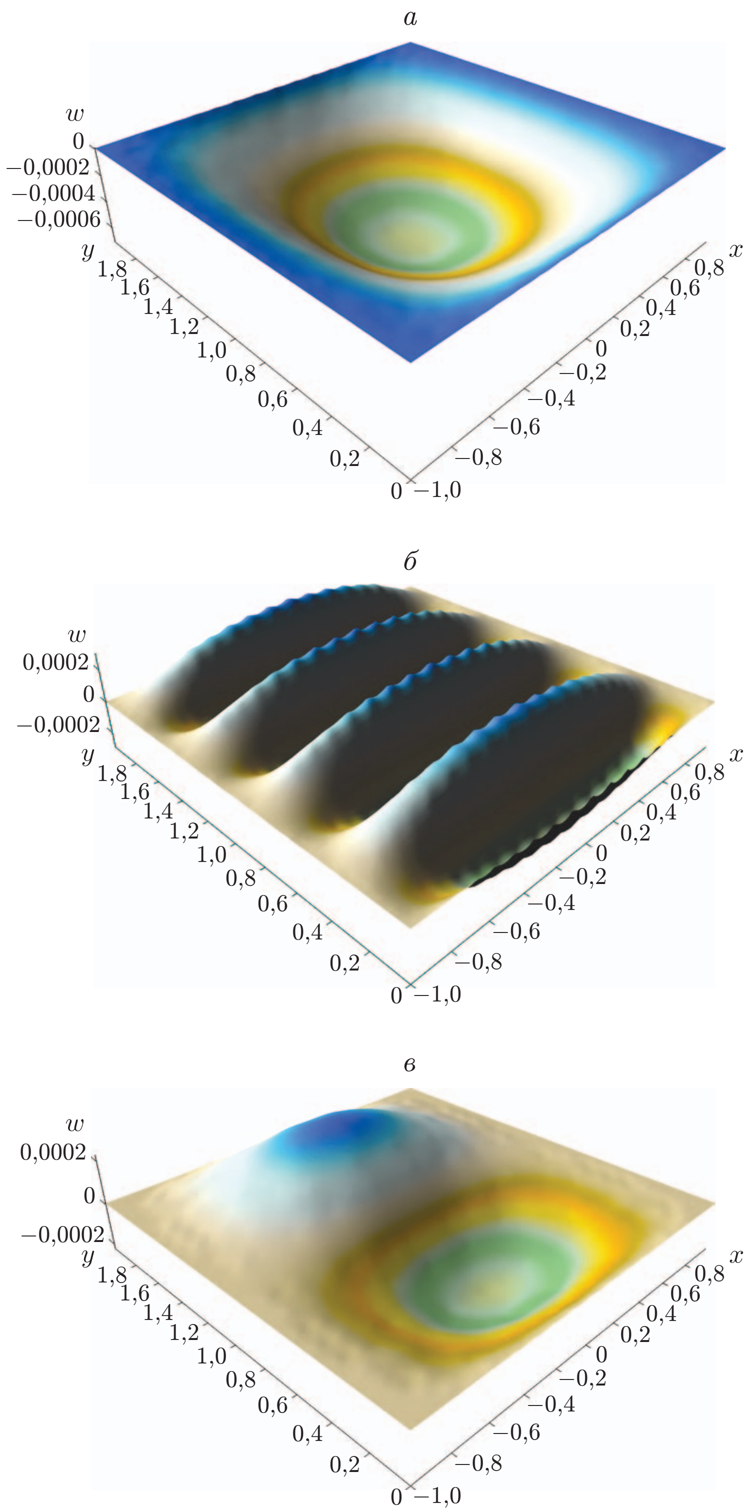

Рис. 2. Собственные формы при $a = b = 2$ и различных значениях λ:
а — $\lambda = 28{,}951\,910\,528$, *б* — $\lambda = 642{,}726\,860\,840$, *в* — $\lambda = 154{,}588\,481\,230$

уравнение, решение которого является приближенным значением первого собственного значения задачи.

В табл. 1 приведены приближенные и точные [3] значения собственных значений при различных значениях $\varphi = a/b$, а также погрешность Δ приближенного решения.

Численное решение нетрудно получить, например, с помощью пакета Maple.

6. Программная реализация и результаты расчетов. Программная реализация решения задачи выполнена на языке Fortran. Поиск решения проводился при различных значениях a и b. В табл. 2 приведены вычисленные собственные значения при $\varphi = a/b =$ 1,00; 1,50; 2,00; 1,25.

На рис. 2 представлены собственные формы для квадратной пластины.

Заключение. В работе рассмотрена задача о собственных колебаниях пластины с двумя защемленными и двумя свободно опертыми краями, решение которой строится по аналогии с решением Леви. Применение метода Бубнова — Галеркина позволило сформулировать задачу на собственные значения в матричной форме и построить приближенное аналитическое решение для первого собственного значения при $m_x = m_y = 1$. При этом погрешность вычисления не превышает 0,7 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eisenberger M., Deutsch A.** Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions // J. Sound Vibrat. 2019. V. 452. P. 1–12.
2. **Gorman D. J.** Free vibration analysis of rectangular plates. N. Y.: Elsevier North Holland, Inc, 1982.
3. **Leissa A. W.** The free vibration of rectangular plates // J. Sound Vibrat. 1973. V. 31, N 3. P. 257–293.
4. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки. Изд. 2-е, стереотип. / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.
5. **Germain S.** Recherches sur la theorie des surfaces elastiques. P.: Mme ve Courcier, 1821.
6. **Барашков В. Н.** Основы теории упругости: Учеб. пособие / В. Н. Барашков, И. Ю. Смолина, Л. Е. Путеева, Д. Н. Песцов. Томск: Том. гос. архит.-строит. ун-т, 2012.
7. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970.
8. **EISPACK.** A collection of Fortran subroutines that compute the eigenvalues and eigenvectors. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://www.netlib.org/eispack/.
9. **Фаддеев Д. К.** Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 21/IV 2020 г.,
после доработки — 3/VI 2020 г.
Принята к публикации 29/VI 2020 г.