

## К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХОВ

С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Впервые вопрос об устойчивости горения порохов и ВВ рассматривался Я. Б. Зельдовичем в работе [1] на основе разработанных им представлений о механизме горения этих веществ. Было установлено, что стационарное горение пороха возможно лишь при  $k < 1$ , где  $k = \beta (T_S - T_0)$ ,  $\beta = (\partial \ln U / \partial T_0)_p$  — температурный коэффициент скорости горения  $U$ ,  $T_0$  — начальная температура,  $T_S$  — температура на поверхности газификации. Физически это означает, что стационарное горение пороха возможно, если градиент температуры у поверхности конденсированной фазы ( $k$ -фазы) не превышает некоторой величины; недостаточно прогретый порох не может гореть.

Последующие экспериментальные исследования показали, однако, что этот критерий устойчивости горения выполняется не всегда [2-4]. Расхождение теории с экспериментом может быть связано, в частности, с пренебрежением экзотермической реакцией, протекающей в  $k$ -фазе.

Ниже методом малых возмущений исследуется устойчивость горения пороха с учетом тепловыделения в  $k$ -фазе в предположении о безынерционности зоны горения в газе и области химической реакции в  $k$ -фазе, непосредственно прилегающей к поверхности газификации. Условие устойчивости горения пороха получено для двух возможных режимов горения с реакцией в  $k$ -фазе, рассмотренных в работах [6, 7] ( $T_S$ - и  $Q$ -режимы), и двух различных типов реакций. В случае  $Q$ -режима предполагается, что газификация  $k$ -фазы происходит в результате экзотермической реакции, когда величина собственного тепловыделения, характеризующего глубину выгорания, становится равной заданной величине  $Q_1$ . При этом температура на поверхности газификации в нестационарном режиме не остается постоянной. В случае  $T_S$ -режима предполагается, что газификация  $k$ -фазы происходит при некоторой определенной температуре (возможно, зависящей от давления), которая достигается благодаря поступлению тепла из газовой фазы и вследствие собственного тепловыделения. При этом количество тепла, выделившегося в  $k$ -фазе в нестационарном режиме, является переменной величиной.

Отметим, что вопрос о влиянии тепловыделения в  $k$ -фазе и изменения температуры поверхности на устойчивость горения пороха в  $Q$ -режиме с экзотермической реакцией нулевого порядка в  $k$ -фазе в предположении о безынерционности области горения в газе и зоны химической реакции в  $k$ -фазе недавно исследовался в работе [5]. В настоящей статье в § 2 содержатся результаты, соответствующие случаю, рассмотренному в работе [5]. Они не совпадают с полученными в этой работе выводами. Это расхождение, по-видимому, связано с тем, что авторы [5], используя при выводе формулы для скорости газификации  $k$ -фазы метод Я. Б. Зельдовича — Д. А. Франк-Каменецкого, приводящий к соотношению, связывающему скорость газификации с потоком тепла из газовой фазы и температурой поверхности, считали в нестационарных условиях возмущение скорости газификации не зависящим от возмущения потока тепла из газовой фазы.

§ 1. К постановке задачи. Рассматривается устойчивость в двустадийной модели горения. Схема зоны горения показана на фигуре. Через  $\varphi_{S_0}$  и  $\varphi_{S_1}$  обозначены градиенты температуры на границах реакционной зоны в  $k$ -фазе. Предполагается, что температурные зависимости скоростей химической реакции  $\Phi_1(T)$  и  $\Phi_2(T)$  (в  $k$ -фазе и газе) таковы, что реакции в основном протекают в узких интервалах температур вблизи  $T_S$  и  $T_2$  в областях  $x_1 < x < 0$  и  $x_2 < x < x_3$  соответственно ( $T_2$  — температура продуктов сгорания). В  $k$ -фазе выделяется тепло  $Q_1$ , в газе —  $Q_2$ . Полное тепловыделение определяется начальной химической энергией топлива и равно  $Q_1 + Q_2 = \text{const}$ . Область  $0 < x < x_2$  — зона прогрева в газе.

Принимается, что характерное время процессов в зоне  $x_1 < x < x_3$  мало, сравнительно со временем перестройки теплового слоя в зоне прогрева в  $k$ -фазе, занимающей область  $-\infty < x < x_1$ . Из этого предположения и равенства  $\kappa = D$ , где  $D$ ,  $\kappa$  — коэффициенты диффузии и температуропроводности газа, следует, что в каждый момент времени в газе имеет место подобие полей концентрации и температуры. При линеаризации предполагается, что зависимость всех возмущений от времени описывается множителем  $\exp(\omega t)$ .

§ 2. Устойчивость горения в  $Q$ -модели с реакцией нулевого порядка в  $k$ -фазе. В соответствии с предположением о безынерционности зоны реакции в  $k$ -фазе, воспользуемся для определения скорости газификации в нестационарных условиях приближением Я. Б. Зельдовича — Д. А. Франк-Каменецкого [8].

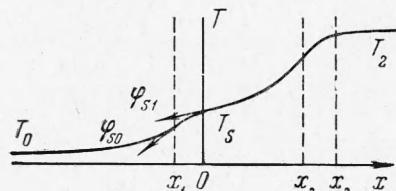
В данном случае это приближение приводит к следующим уравнениям для определения массовой скорости газификации:

$$\lambda_1 \varphi_{S0} = \sqrt{\lambda_1^2 \varphi_{S1}^2 + A_1(T_S)} \quad \left( A_1(T_S) = 2\lambda_1 h_1 \int_{T_0}^{T_S} \Phi_1(T) dT \right) \quad (2.1)$$

$$\lambda_1 \varphi_{S0} - \lambda_1 \varphi_{S1} = m Q_1 \quad (2.2)$$

Здесь  $\lambda_1$  — коэффициент теплопроводности,  $h_1$  — теплота реакции в  $k$ -фазе. После исключения из (2.1), (2.2) величины  $\varphi_{S1}$  получим

$$m Q_1 (2\lambda_1 \varphi_{S0} - m Q_1) = A_1(T_S) \quad (2.3)$$



Фиг. 1

Линеаризируя уравнение (2.3) при условии  $Q_1 = \text{const}$ , найдем

$$(1 - \mu) \frac{\delta m}{m} - z_1 \frac{\delta T_S}{T_S - T_0} + \frac{\delta \varphi_{S0}}{\varphi_{S0}} = 0$$

$$\left( \mu = \frac{Q_1}{c_1(T_S - T_0)}, z_1 = \frac{\lambda_1 h_1 \Phi_1(T_S)}{m^2 c_1 Q_1} \right)$$

Для массовой скорости горения в газе имеем

$$m Q_2 = \sqrt{A_2}, \quad A_2(T_2) = 2h_2 \int_{T_S}^{T_2} \lambda_2 \Phi_2(T) dT \quad (2.5)$$

Отметим, что здесь  $Q_2 > h_2$ , так как  $Q_1 < h_1$ , а механизм выделения тепла  $h_1 - Q_1$  после газификации не рассматривается<sup>1</sup>.

Линеаризация уравнения (2.5) при условии  $Q_2 = \text{const}$  с учетом  $\Phi_2(T_2) \gg \Phi_2(T_S)$  дает

$$\frac{\delta m}{m} - z_2 \frac{\delta T_2}{T_2} = 0 \quad \left( z_2 = \frac{h_2 \lambda_2 \Phi_2(T_2) T_2}{m^2 Q_2^2} \right) \quad (2.6)$$

В квазистационарном приближении закон сохранения энергии в области  $x_1 < x < x_3$  запишем, следуя работе [1], в виде

$$m(c_1 T_S + Q_1 + Q_2) - \lambda_1 \varphi_{S0} = m c_2 T_2 \quad (2.7)$$

Здесь  $c_1$ ,  $c_2$  — теплоемкости  $k$ -фазы и газа при постоянном давлении.

<sup>1</sup> При корректуре Б. В. Новожилов указал, что, если в (2.5) считать  $Q_2 = h_2$  (что физически более обосновано, чем (2.5)), то полученные в § 3, 5 условия устойчивости  $T_S$  — моделей принимают вид  $\varepsilon < 1$ , т. е. совпадают с критерием устойчивости модели Я. Б. Зельдовича.

После линеаризации уравнения (2.7), учитывая условие  $Q_1 + Q_2 = \text{const}$ , получим

$$\frac{\delta m}{m} + \frac{\delta T_S}{T_S - T_0} - \frac{1}{\tau} \frac{\delta T_2}{T_2} - \frac{\delta \varphi_{S0}}{\varphi_{S0}} = 0 \quad \left( \tau = \frac{c_1(T_S - T_0)}{c_2 T_2} \right) \quad (2.8)$$

Еще одну связь между возмущениями массовой скорости  $\delta m$ , градиента температуры  $\delta \varphi_{S0}$  и температуры поверхности  $\delta T_S$  получим из решения задачи о перестройке теплового слоя в области  $k$ -фазы, где скорость химической реакции пренебрежимо мала, при небольших изменениях скорости поверхности, приняв, что температура в точке  $x_1$  равна температуре поверхности  $T_S$ . Для возмущений, зависящих от времени как  $\exp(\omega t)$ , это решение имеет вид

$$\delta T(x) = -\frac{T_S - T_0}{\Omega} \frac{\delta m}{m} \exp\left(\frac{Ux}{\kappa_1}\right) + B_1 \exp\left(\frac{U\beta_{1x}}{2\kappa_1}\right) + B_2 \exp\left(\frac{U\beta_{2x}}{2\kappa_1}\right) \quad (2.9)$$

$$(\Omega = \kappa_1 \omega / U^2, \beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 4\Omega})$$

Здесь  $B_1, B_2$  — произвольные постоянные,  $\kappa_1$  — температуропроводность  $k$ -фазы,  $U$  — линейная скорость перемещения поверхности. Из условия  $\delta T(-\infty) = 0$  следует, что  $B_2 = 0$ . Из граничных условий при  $x = 0$  находим  $B_1$  и устанавливаем искомую связь

$$\frac{\beta_{12}}{2\Omega} \frac{\delta m}{m} - \frac{\beta_1}{2} \frac{\delta T_S}{T_S - T_0} + \frac{\delta \varphi_{S0}}{\varphi_{S0}} = 0 \quad (2.10)$$

Из уравнений (2.4), (2.6), (2.8) и (2.10) получим характеристическое уравнение для  $\Omega$

$$\gamma \Omega + 2(\varepsilon - 1)\Omega + \varepsilon = (\gamma \Omega + \varepsilon) \sqrt{1 + 4\Omega} \quad (2.11)$$

$$\left( \gamma = \frac{1 - (2 - \mu)\varepsilon}{1 - z_1}, \varepsilon = \tau z_2 \right)$$

Из анализа корней уравнения (2.11) следует, что условие устойчивости исследуемого режима горения имеет вид

$$(\varepsilon - 1)^2 - \gamma(\varepsilon + 1) < 0 \quad (2.12)$$

Это неравенство выполняется только при  $\gamma > 0$ . Входящую в  $\gamma$  величину  $z_1$  можно представить в виде

$$z_1 = \frac{1}{2}(2 - \mu)M_1, \quad M_1 = \Phi_1(T_S)(T_S - T_0) \left[ \int_{T_0}^{T_S} \Phi_1(T) dT \right]^{-1} \quad (2.13)$$

При обычных в теории горения предположениях относительно свойств функции  $\Phi_1(T)$  (положительность, монотонное возрастание, непрерывность) величина  $M_1$  характеризует «остроту» зависимости скорости химической реакции от температуры. Очевидно,  $M_1 > 1$ .

При  $\Phi_1 = D \exp(-E_1/RT)$  приближенная оценка с использованием неравенства  $E_1/RT \gg 1$  дает

$$M_1 \approx E_1(T_S - T_0) / RT_S^2$$

Зона химической реакции в  $k$ -фазе предполагается безынерционной, поэтому выводы будут справедливы лишь при достаточно больших энергиях активации  $E_1$ . При  $z_1 > 1$ , условие устойчивости (2.12) выполняется только при  $\varepsilon > 1/(2 - \mu)$ . Это условие — необходимое, но не достаточное. Если  $z_1 > 3 - \mu$  можно показать, что для устойчивости горения необходимо также выполнение неравенства  $\varepsilon < \varepsilon_2$ , ( $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ), где  $\varepsilon_{1,2}$  — корни квадратного трехчлена (2.12).

При сравнении условий устойчивости в рассмотренной модели с условием устойчивости в модели горения Я. Б. Зельдовича следует иметь в виду, что при тепловыделении в  $k$ -фазе, стремящемся к нулю,  $Q$ -модель не переходит в модель Я. Б. Зельдовича, а условие (2.12) — в соответствующее условие для параметра  $k$ .

§ 3. Устойчивость горения в  $T_S$ -модели с реакцией нулевого порядка в  $k$ -фазе. В данном случае, в отличие от рассмотренной выше  $Q$ -модели, линеаризация уравнений проводится при условии  $T_S = \text{const}$ . Из уравнения (2.3) получим

$$q(1-\mu)\frac{\delta m}{m} + (1-\mu)\frac{\delta Q_1}{Q_2} + q\frac{\delta\varphi_{S0}}{\varphi_{S0}} = 0 \quad \left(q = \frac{Q_1}{Q_2}\right) \quad (3.1)$$

Аналогично из уравнения (2.5) найдем

$$\frac{\delta m}{m} - \frac{\delta Q_1}{Q_2} - z_2 \frac{\delta T_2}{T_2} = 0 \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1), (3.2) вместе с уравнениями (2.8), (2.9), в которых необходимо считать  $\delta T_S = 0$ , образуют замкнутую систему, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\frac{\sqrt{1-4\Omega}-1}{2\Omega} = \frac{(1-\mu)(\varepsilon-1-q)}{(1-\mu)\varepsilon+q} \quad (3.3)$$

Исследование корней уравнения (3.3) показывает, что  $T_S$  — режим горения с реакцией нулевого порядка в  $k$ -фазе устойчив при

$$\frac{\varepsilon(1-\mu)+q}{(1+q)(1-\mu)+q} < 1, \quad \text{или} \quad \varepsilon < 1+q \quad (3.4)$$

Отметим, что в случае  $q = 0$ , соответствующем отсутствию тепловыделения в  $k$ -фазе, критерий (3.4) совпадает с условием устойчивости, полученным Я. Б. Зельдовичем. Из формулы (3.4) видно, что в данном случае увеличение тепловыделения в  $k$ -фазе расширяет интервал значений  $\varepsilon$ , отвечающих устойчивому горению.

§ 4. Устойчивость горения в  $Q$ -модели с реакцией первого порядка в  $k$ -фазе. При стационарном распространении фронта экзотермической реакции первого порядка в  $k$ -фазе справедливы соотношения

$$mQ_1 = h_1 \int_{-\infty}^0 a(x) \Phi_1 [T(x)] dx$$

$$h_1 a(x) = h_1 a_0 - c_1(T - T_0) + \frac{\lambda_1 dT}{m dx} \quad (4.1)$$

где  $a(x)$  — концентрация вещества, реагирующего в  $k$ -фазе,  $a(-\infty) = a_0$ . Считая зону химической реакции в  $k$ -фазе узкой и проводя усреднение градиента температуры по этой зоне, можно получить приближенную формулу для скорости распространения фронта реакции, которая имеет вид

$$mQ_1(2\lambda_1\varphi_{S0} - mQ_1) = 2\lambda_1 \int_{T_0}^{T_S} [h_1 a_0 - c_1(T - T_0)] \Phi_1(T) dT +$$

$$+ \frac{\lambda_1(2\lambda_1\varphi_{S0} - mQ_1)}{m} \int_{T_0}^{T_S} \Phi_1(T) dT \quad (4.2)$$

Линеаризируя уравнение (4.2) при условии  $Q_1 = \text{const}$ , получим

$$\left(1 - \mu + \frac{A}{\mu}\right) \frac{\delta m}{m} - z_{11} \frac{\delta T_S}{T_S - T_0} + \left(1 - \frac{A}{\mu}\right) \frac{\delta \varphi_{S0}}{\varphi_{S0}} = 0 \quad (4.3)$$

$$\left(z_{11} = \frac{\lambda_1 \Phi_1(T_S)(2h_1 a_0 - Q_1)}{2m^2 c_1 Q_1}, \quad A = \frac{1}{m \varphi_{S0}} \int_{T_0}^{T_S} \Phi_1(T) dT\right)$$

Из уравнений (4.3), (2.6), (2.8) и (2.10) нетрудно получить характеристическое уравнение для  $\Omega$ , по виду тождественное уравнению (2.11), но с параметром  $\gamma$ , имеющим вид

$$\gamma_1 = \left[1 - (2 - \mu)\varepsilon - \frac{A}{\mu}\right] / \left[1 - z_{11} - \frac{A}{\mu}\right]$$

В соответствии с этим, и условие устойчивости горения в рассматриваемом случае будет иметь вид неравенства (2.12) с  $\gamma = \gamma_1$ .

§ 5. Устойчивость горения в  $T_S$ -модели с реакцией первого порядка в  $k$ -фазе. Линеаризация уравнений (2.4) при  $T_S = \text{const}$  дает

$$\left(1 - \mu + \frac{A}{\mu}\right) q \frac{\delta m}{m} + \left(1 - \mu + \frac{A}{2}\right) \frac{\delta Q_1}{Q_2} + \left(1 - \frac{A}{\mu}\right) q \frac{\delta \varphi_{S0}}{\varphi_{S0}} = 0 \quad (5.1)$$

Замкнутая система уравнений образована теперь уравнениями (5.1), (3.2) и (2.8), (2.10), в которых надо положить  $\delta T_S = 0$ . Приравняв определитель этой системы нулю, получим характеристическое уравнение для  $\Omega$ , которое имеет вид

$$\frac{\sqrt{1 + 4\Omega} - 1}{2\Omega} = 1 - \frac{1}{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = \frac{(1 - \mu + 1/2 A)\varepsilon + (1 - \mu^{-1} A)q}{(2 - \mu)q + (1 - \mu + 1/2 A)} \quad (5.2)$$

Из анализа корней уравнения (5.2) следует, что стационарный  $T_S$ -режим горения с реакцией первого порядка в  $k$ -фазе является устойчивым при условии, что

$$\varepsilon < 1 + \frac{1 - \mu + \mu^{-1} A}{1 - \mu + 1/2 A} q \quad (5.3)$$

Сравнивая условия (3.4) и (5.3), замечаем, что учет выгорания реагента при реакции в  $k$ -фазе расширяет пределы устойчивого горения пороха.

Поступила 26 XI 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, т. 12, стр. 498.
2. З е л ь д о в и ч Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1963, № 3.
3. К о р о т к о в А. П., Л е й п у н с к и й О. И. Зависимость температурного коэффициента скорости горения пороха при атмосферном давлении от температуры пороха. Сб. «Физика взрыва», Изд-во АН СССР, 1953, № 2.
4. П о х и л П. Ф., Н е ф е д о в а О. И., М а р г о л и н А. Д. Об аномальной зависимости скорости горения пороха от начальной температуры. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 4.
5. И с т р а т о в А. Г., Л и б р о в и ч В. Б. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
6. Н о в и к о в С. С., Р я з а н ц е в Ю. С. Анализ математических моделей горения конденсированной фазы. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 5.
7. Н о в и к о в С. С., Р я з а н ц е в Ю. С. К теории горения конденсированных систем. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.
8. З е л ь д о в и ч Я. Б., Ф р а н к - К а м е н е ц к и й Д. А. Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. химии, 1938, т. 12, вып. 1.