УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

О. Ф. Васильев, Н. С. Хапилова

(Новосибирск)

П. Л. Капицей [1,2] и его последователями рассматривалась задача о течении тонкой пленки вязкой жидкости по вертикальной стенке.

О. В. Голубевой [3] выполнено обобщение уравнений двумерных плоских движений идеальной жидкости на движение в пленке, покрывающей криволинейные поверхности.

Движение тонкого слоя жидкости на сфере рассматривается в теории приливных течений.

В настоящей работе исследуется неустановившееся течение тонкого слоя жидкости по поверхности тела вращения, вращающегося с переменной угловой скоростью вокруг своей оси, при наличии внешней массовой силы, действующей вдоль оси тела, и выпадении частиц той же жидкости на свободную поверхность.

Система дифференциальных уравнений движения получается из общих уравнений движения вязкой жидкости в подвижной криволинейной системе координат, движущейся вместе с телом.

Полученная система уравнений упрощается путем осреднения компонент скорости по толщине слоя.

Обозначения

$R(x)$ — расстояние от точек контура тела вращения до оси;

$j(t)$ — ускорение внешней массовой силы, направленной по оси вращения;

q — объем частиц жидкости, выпадающих в единицу времени на единицу площади поверхности, $q = q(x, \varphi, t)$;

u_i — компоненты скорости на оси $(i = 1, 2, 3)$;

ω — угловая скорость вращения;

ρ — плотность;

$\tau_{zx}, \tau_{z\varphi}$ — компоненты касательного напряжения;

μ — вязкость;

p — давление;

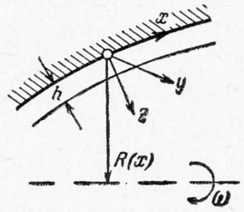
h — глубина потока;

v_i — компоненты скорости, осредненной по глубине на оси $(i = 1, 2)$.

1. Рассмотрим неустановившееся течение тонкого слоя вязкой жидкости по поверхности тела вращения, вращающегося вокруг собственной оси и движущегося поступательно вдоль нее.

Абсолютные значения угловой скорости $\omega(t)$ и скорости продольного движения $v_0(t)$ могут меняться во времени.

Движение слоя жидкости рассматривается в ортогональной криволинейной подвижной системе координат x, φ, z, связанной с телом, причем координата x отсчитывается вдоль дуги меридиана поверхности тела вращения, а координата z — по нормали к поверхности тела, обращенной внутрь слоя жидкости (фигура).



Фиг. 1

Контур тела вращения пусть задан радиусом $R(x)$, по сравнению с которым толщина слоя мала. Предположим также, что этот контур имеет достаточно плавное очертание или радиус кривизны меридионального сечения велик по сравнению с толщиной слоя. При плавном изменении толщины слоя вдоль поверхности это будет означать и относительную малость кривизны свободной поверхности. Естественно пренебречь при этом поверхностным натяжением.

Помимо сил, обусловленных движением жидкости во вращающейся координатной системе, жидкость подвержена действию внешней массовой силы, направленной по оси вращения, ускорение которой $j(t)$, где t — время. Эта сила может быть связана с ускоренным движением тела вдоль оси, а в частном случае может быть представлена ускорением силы тяжести g (случай вертикальной оси).

На свободную поверхность слоя жидкости может происходить выпадение частиц той же жидкости с осредненной интенсивностью $q(x, \varphi, t)$, представляющей объем частиц, выпадающих в единицу времени на единицу площади поверхности.

Давление газовой среды на свободной поверхности потока жидкости p_0 будем считать постоянным.

Полагая толщину слоя малой по сравнению с радиусами кривизны свободной поверхности и поверхности тела, из общих уравнений движения вязкой жидкости в выбранной системе координат получим следующую систему приближенных уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{u_2}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{u_2^2}{R} R' = j \sqrt{1 - R'^2} +$$

$$+ \omega^2 R R' + 2\omega u_2 R' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{u_2}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_1 u_2}{R} R' =$$

$$= - \frac{\partial \omega}{\partial t} R - 2\omega R' u_1 - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} \tag{1.2}$$

$$\frac{u_2^2}{R} \sqrt{1 - R'^2} = jR' - \omega^2 R \sqrt{1 - R'^2} - 2\omega u_2 \sqrt{1 - R'^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial (u_1 R)}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial (u_3 R)}{\partial z} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — компоненты скорости соответственно по координатным линиям x, y, z; p — давление; ρ — плотность; τ_{zx} и $\tau_{z\varphi}$—касательные напряжения.

В случае ламинарного течения

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial z}, \qquad \tau_{z\varphi} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial z} \tag{1.5}$$

При этом для $z = 0$ будем иметь

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \tag{1.6}$$

В случае выпадения частиц той же жидкости на свободную поверхность («дождь») динамический эффект этого явления можно представить приближенно при помощи теоремы количества движения в виде осредненных касательных напряжений на свободной поверхности

$$\tau_{zx} = \rho q (u_1' - u_1), \qquad \tau_{z\varphi} = \rho q (u_2' - u_2) \quad \text{при } z = h \tag{1.7}$$

Здесь u_1', u_2' — составляющие скорости присоединяющихся частиц по координатам x, φ до присоединения (определенные относительно координатной системы, связанной с телом). Если выпадения частиц не происходит, касательные напряжения на свободной поверхности будем считать нулевыми

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{z\varphi} = 0 \quad \text{при } z = h \tag{1.8}$$

Отметим, что на свободной поверхности $z = h(x, \varphi, t)$, помимо условий (1.7) или (1.8) и постоянства давления $p(x, \varphi, h) = p_0 = \text{const}$, должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u_2}{R} \frac{\partial h}{\partial \varphi} = u_3 + q \tag{1.9}$$

Помимо указанных граничных условий на свободной поверхности и поверхности твердого тела, требуется задание толщины слоя h и распределения скорости по его толщине, по крайней мере, в одном поперечном сечении (например, начальном сечении $x = 0$).

При рассмотрении нестационарных задач к указанным граничным условиям должны быть добавлены начальные условия, выражающие распределение толщины слоя и скоростей в начальный момент времени.

Рассмотренная постановка задачи может быть упрощена путем использования интегральных принципов, подобно тому как это делается в теории пограничного слоя. Оказывается, что для тонкого потока со свободной поверхностью применение таких принципов приводит к такой постановке задачи, которая близка к теории мелкой воды или гидравлической теории открытых потоков.

2. Для упрощения полученных дифференциальных уравнений выполним осреднение компонент скорости по толщине слоя и пренебрежем неравномерностью распределения скоростей по толщине. Обозначим

$$v_i = \frac{1}{h} \int_0^h u_i \, dz \tag{2.1}$$

Пренебрегая неравномерностью распределения скоростей по толщине слоя, будем считать

$$\int_0^h u_i u_k \, dz \approx v_i v_k h, \qquad \int_z^h u_i u_k \, dz \approx v_i v_k (h - z) \tag{2.2}$$

Интегрируя по z уравнение неразрывности (1.4) от 0 до h и используя условие (1.9), получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (v_1 h)}{\partial x} + \frac{R'}{R} v_1 h + \frac{1}{R} \frac{\partial (v_2 h)}{\partial \varphi} = q \tag{2.3}$$

Интегрируя подобным же образом третье динамическое уравнение с учетом (2.2), получаем приближенное выражение для закона распределения давления по толщине слоя

$$p = p_0 + \rho f (h - z), \qquad f = \left(\omega^2 R + 2\omega v_2 + \frac{v_2^2}{R}\right) \sqrt{1 - R'^2} - jR' \tag{2.4}$$

Отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f \frac{\partial h}{\partial x} + \rho (h - z) \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho f \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \rho (h - z) \frac{\partial f}{\partial \varphi} \tag{2.5}$$

Анализ (2.5) показывает, что в силу сделанных допущений о малости h / R и кривизны меридионального сечения поверхности тела, которая характеризуется $R''(x)$, вторые слагаемые в этих выражениях малы по сравнению с первыми. Поэтому можно считать

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f \frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho f \frac{\partial h}{\partial \varphi} \tag{2.6}$$

Подставляя эти выражения в (1.1) и (1.2) и интегрируя последние по толщине слоя с учетом (2.2), придем к приближенным уравнениям

$$\frac{\partial (v_1 h)}{\partial t} + \frac{\partial (v_1^2 h)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial (v_1 v_2 h)}{\partial \varphi} + \frac{R'}{R} (v_1^2 - v_2^2) h - q v_1 = F_1 h \tag{2.7}$$

$$F_1 = j \sqrt{1 - R'^2} + \omega^2 R R' + 2\omega R' v_2 - f \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho h} [\tau_{zx}(x, \varphi, h) - \tau_{zx}(x, \varphi, 0)]$$

$$\frac{\partial (v_2 h)}{\partial t} + \frac{\partial (v_1 v_2 h)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial (v_2^2 h)}{\partial \varphi} + 2 \frac{R'}{R} v_1 v_2 h - q v_2 = F_2 h \tag{2.8}$$

$$F_2 = -\left(\frac{d\omega}{dt} R + 2\omega R' v_1\right) - \frac{1}{R} f \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho h} \left[\tau_{z\varphi}(x, \varphi, h) - \tau_{z\varphi}(x, \varphi, 0)\right]$$

При помощи уравнения неразрывности (2.3) эти уравнения можно представить также в виде

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{v_2}{R} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - R' \frac{v_2^2}{R} = F_1 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{v_2}{R} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + R' \frac{v_1 v_2}{R} = F_2 \tag{2.10}$$

В соответствии с (1.7)

$$\tau_{zx}(x, \varphi, h) = \rho q (u_1' - v_1), \qquad \tau_{z\varphi}(x, \varphi, h) = \rho q (u_2' - v_2) \tag{2.11}$$

Подобно тому как это делается в теории пограничного слоя, касательные напряжения на поверхности тела могут быть связаны приближенно со средними скоростями зависимостями вида

$$\tau_{zx}(x, \varphi, 0) = {}^1/_8 \lambda \rho v v_1, \qquad \tau_{z\varphi}(x, \varphi, 0) = {}^1/_8 \lambda \rho v v_2 \tag{2.12}$$

Здесь λ — безразмерный коэффициент сопротивления при равномерном течении в трубе, v — модуль скорости.

Поступила 1 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. I. Свободное течение. Ж. эксперим. и теор. физ., 1948, т. 18, вып. 1.
2. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. III. Опытное изучение волнового режима течения. Ж. эксперим. и теор. физ., 1949, т. 19, вып. 2.
3. Голубева О. В. Работы С. В. Ковалевской о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1950, т. 14, вып. 3.