

ВЯЗКОСТЬ ЖИДКОЙ ФАЗЫ В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ

Ю. А. Бувич, В. М. Сафрай

(Москва)

Как известно, движение дисперсной системы, состоящей из непрерывной дисперсионной среды и частиц диспергированной фазы, можно описывать при помощи уравнений импульсов и сохранения массы, записанных для каждой из фаз в отдельности [1]. Для определенности этих уравнений необходимо знать зависимость входящих в них коэффициента вязкости, давления в твердой фазе и других величин от различных параметров движения. Эта трудность имеет место уже для простейшей модели дисперсной системы, когда внутренние напряжения в диспергированной фазе считаются равными нулю. В последнем случае имеет место неопределенность коэффициента вязкости среды, который не является материальной константой и зависит от концентрации системы, а также неопределенность силы взаимодействия между фазами. Для этой силы имеется целый ряд эмпирических зависимостей, а в [2] она была вычислена также теоретически. В данной работе аналогичным путем получено выражение для коэффициента вязкости жидкой фазы в дисперсной системе. В частном случае, когда в системе жидкость — твердые частицы достигается концентрация, отвечающая плотной упаковке системы, этот коэффициент описывает вязкость жидкости, фильтрующейся в пористой среде. В частном случае малых концентраций в дисперсной системе полученное выражение для коэффициента вязкости жидкой фазы соответствует известным формулам Тэйлора, Эйнштейна и Гута и Марка.

Будем рассматривать «стесненное» обтекание частиц диспергированной фазы. При этом используем «ячеечную» модель системы, согласно которой каждой частице радиуса a соответствует сферическая ячейка радиуса $b > a$, концентрическая с частицей, причем возмущения, вносимые частицей в течение жидкой фазы, локализованы в объеме этой ячейки [3]. Поверхности таких ячеек представляют собой своеобразные поверхности симметрии, разделяющие «зоны влияния» различных частиц. отождествляя объем ячейки с удельным объемом частицы в системе, получим

$$b = a\rho^{-1/3} \tag{1}$$

При решении задачи о «стесненном» обтекании используем общий метод работы [4]. Запишем в стоксовом приближении уравнения для возмущений скоростей жидкой фазы и материала частиц в виде

$$\Delta [\nabla \times \mathbf{v}] = 0$$

Пусть невозмущенное частицей течение жидкой фазы определено соотношениями

$$v^0 = \alpha_{ik}x_k, \quad \alpha_{ii} = 0, \quad \alpha_{ik} \equiv \alpha_{ki}$$

Поскольку $\text{div } \mathbf{v} = 0$, векторы \mathbf{v} можно представить в виде роторов некоторых аксиальных векторов. Так как последние должны линейно зависеть от тензора α_{ik} , их можно составить единственным образом, в результате чего получим для скоростей вне и внутри частицы

$$\mathbf{v} = \nabla \times [\nabla \times (\alpha \nabla f)], \quad \alpha \nabla f = \alpha_{ik} \partial f / \partial x_k$$

где f — скалярная функция r . Уравнение для f

$$\Delta^2 [\nabla \times (\alpha \nabla f)] = 0$$

имеет общее решение

$$f = \beta r^6 + \gamma r^4 + \delta r + \varepsilon r^{-1} + \zeta$$

где $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ — произвольные постоянные.

Требую конечности скоростей в интервале $0 \leq r \leq b$ и обозначая штрихом величины, относящиеся к течению внутри частицы, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left(\frac{2}{3} Ar^3 + \frac{B}{r^2} - \frac{5}{3} \frac{C}{r^4} \right) ((\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n})\mathbf{n}) + \left(-\frac{5}{3} Ar^3 + \frac{2}{3} \frac{C}{r^4} \right) (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}) \\ \mathbf{v}' &= \frac{2}{3} A'r^3 ((\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n})\mathbf{n}) + \left(-\frac{5}{3} A'r^3 + Dr \right) (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}), \\ p &= \mu_0 \left(\frac{14}{3} Ar^2 + \frac{2B}{r^3} \right) ((\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n})\mathbf{n}), \quad p' = \mu' \frac{14}{3} A'r^2 ((\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n})\mathbf{n}) + p_\sigma \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$, а p_σ — изменение скачка давления на поверхности частицы, обусловленного поверхностным натяжением, связанное с искажением формы этой поверхности. На поверхности частицы $r = a$ должны, очевидно, выполняться условия непрерывности нормальных и касательных составляющих полных скоростей и напряжений и условие обращения в нуль нормальной компоненты скорости. На поверхности ячейки эти величины, вообще говоря, произвольны.

Вопрос о виде граничных условий при $r = b$ служил предметом многочисленных дискуссий, причем разные авторы предлагали самые разнообразные условия. С выбором указанных условий связаны также основные возражения против ячеечной модели «стесненного» обтекания [3]. Между тем, простые физические соображения приводят к единственному краевому условию при $r = b$. Действительно, сущность ячеечной модели состоит в усреднении и сглаживании объемов, занятых отдельными частицами, и в введении ячейки как меры такого сглаженного объема. Такое усреднение равносильно допущению о полной идентичности всех частиц системы и связанных с ними ячеек, что может быть оправдано, если число частиц в системе достаточно велико. Но тогда из соображений симметрии сразу же получим, что при $r = b$ должна обращаться в нуль радиальная составляющая возмущения скорости. Ясно конечно, что ячеечная модель представляет собой лишь некоторое приближение к реальной дисперсной системе. Однако эта модель приводит к неплохим результатам для силы межфазового взаимодействия в дисперсных системах, хорошо согласующимся с эмпирическими зависимостями [2]. Кроме того, аналогичная модель с успехом используется, как известно, в кинетической теории. Поэтому естественно ожидать, что эта же модель приведет к удовлетворительному согласию с экспериментом и при расчете эффективной вязкости.

Таким образом, имеем пять произвольных постоянных и величину p_σ , представляющую дополнительную степень свободы рассматриваемой задачи, для удовлетворения шести граничным условиям. При этом величина p_σ входит лишь в условие непрерывности нормальных напряжений при $r = a$; поэтому, если вычисление p_σ само по себе не представляет интереса, задачу можно упростить, вообще отбросив указанное граничное условие, что и было сделано ранее в [2, 6]. Действительно, считая возмущение поверхности частицы малым, все граничные условия, кроме условия непрерывности нормальных напряжений, можно записывать на невозмущенной сферической поверхности, так как все члены, связанные с возмущением поверхности, имеют высший порядок малости. Наоборот, в условии непрерывности нормальных напряжений p_σ имеет тот же порядок величины, что и остальные члены, а само это условие фактически определяет априори неизвестное искажение формы поверхности частицы. Аналогичная ситуация встречается при выводе формулы Рыбчинского — Адамара, в исследовании обтекания тела, покрытого жидкой пленкой [6], а также при выводе выражения для силы межфазового взаимодействия в дисперсных системах [2].

Насколько известно авторам, указанное обстоятельство явно не отмечалось в литературе, что приводит в ряде случаев к недоразумениям¹. Поэтому в конце работы в качестве приложения подробнее рассмотрены вывод формулы Рыбчинского — Адамара для силы сопротивления жидкой капли и искажение формы капли.

¹ См., например, реферат Н. А. Слезкина на работу [6] (РЖ Механика, 1966, № 6, Б648).

После вычислений получим выражения для постоянных в (2)

$$Aa^2 = \frac{1}{\Delta(\kappa, \xi)} [(5\kappa + 2)\xi^3 - 3\kappa\xi^7], \quad \frac{B}{a^3} = \frac{1}{\Delta(\kappa, \xi)} [5\kappa + 2 + 2(\kappa - 1)\xi^7]$$

$$\frac{C}{a^5} = \frac{1}{\Delta(\kappa, \xi)} [3\kappa + 2(\kappa - 1)\xi^5], \quad A'a^2 = D = \frac{1}{\Delta(\kappa, \xi)} (3 + 7\xi^5 - 5\xi^7) \quad (3)$$

$$\Delta(\kappa, \xi) = -2(\kappa + 1) + 7\kappa\xi^5 - (5\kappa - 2)\xi^7, \quad \xi = a/b = \rho^{1/3}, \quad \kappa = \mu'/\mu_0$$

Выражения (3) вместе с (2) и величиной p_σ , которую просто найти из неиспользованного при вычислении (3) условия непрерывности нормальных напряжений, полностью определяют исследуемое движение.

Среднее по объему ячейки значение тензора плотности потока импульса в системе равно тензору средних напряжений

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = -\langle p \rangle \delta_{ik} + \left\langle \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle$$

Нетрудно убедиться, что $\langle p \rangle \equiv 0$. Имеем, следовательно,

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \frac{1}{V_0} \left[\mu' \int_{r < a} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) dV + \mu_0 \int_{a < r < b} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dV \right]$$

Здесь V_0 — объем ячейки. Применяя теорему Остроградского — Гаусса и учитывая непрерывность скорости при $r = a$, получим

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \frac{\mu_0}{V_0} \oint_{r=b} (v_i dS_k + v_k dS_i) = 4\pi b^3 \alpha_{ik} \frac{\mu_0}{V_0} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{15} Ab^3 + \frac{4}{15} \frac{B}{b^3} \right)$$

Вводя $\xi = a/b$ и учитывая, что, в силу (1), $\xi^3 = \rho$, имеем

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = 2\mu_0 \alpha_{ik} \left[1 + \frac{5\kappa + 2 - 2^{1/5} \kappa \xi^2 - 4/5 (\kappa - 1) \xi^7}{2(\kappa + 1) - 7\kappa \xi^5 + (5\kappa - 2) \xi^7} \rho \right]$$

Отсюда для эффективной вязкости $\mu(\rho)$ получим

$$\mu(\rho) = \mu_0 \left[1 + \frac{5\kappa + 2 - 2^{1/5} \kappa \xi^2 - 4/5 (\kappa - 1) \xi^7}{2(\kappa + 1) - 7\kappa \xi^5 + (5\kappa - 2) \xi^7} \rho \right] \quad (4)$$

В предельном случае $\kappa \rightarrow \infty$ (суспензия твердых частиц)

$$\mu^{(1)}(\rho) = \mu_0 \left(1 + \frac{5 - 2^{1/5} \xi^2 - 4/5 \xi^7}{2 - 7\xi^5 + 5\xi^7} \rho \right) \quad (5)$$

В предельном случае $\kappa \rightarrow 0$ (система газовых пузырьков в капельной жидкости)

$$\mu^{(2)}(\rho) = \mu_0 \left(1 + \frac{2 + 4/5 \xi^7}{2(1 - \xi^7)} \rho \right) \quad (6)$$

Легко видеть, что для разбавленных дисперсных систем ($\rho \ll 1$) выражение (4) переходит в известную формулу Тэйлора, а (5) и (6) — в формулы Эйнштейна и Гута и Марка соответственно [7, 8].

Кривые $\mu^{(1)}/\mu_0$ и $\mu^{(2)}/\mu_0$ представлены на фигуре; пунктир соответствует формулам Эйнштейна и Гута и Марка.

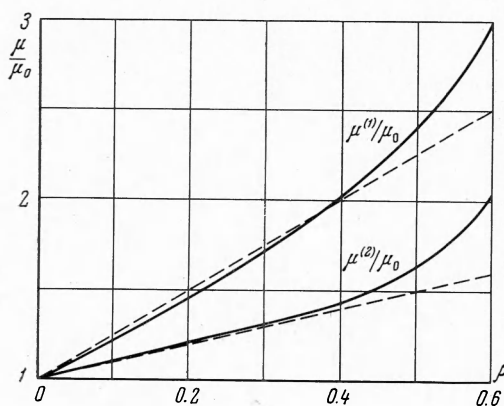
Отметим, что величина $\mu(\rho)$ из (4) — (6) представляет собой эффективную вязкость жидкости, фильтрующейся в пористом теле с пористостью $\varepsilon = 1 - \rho$. Действительно, полный перенос импульса в системе складывается из нескольких зависимых, вообще говоря, друг от друга частей:

- 1) перенос импульса в фильтрующейся жидкой фазе;
- 2) перенос импульса, связанный с локальными пульсационными движениями частиц;

3) перенос импульса, вызванный трением частиц друг о друга в их относительном движении, неоднородностью внешних сил и т. п.

Очевидно, соотношения (4) — (6) описывают лишь ту часть полного переноса, которая связана с движением жидкой фазы. Величина $\mu(\rho)$ совпадает с вязкостью системы в целом лишь в случаях, когда две последние компоненты в полном переносе импульса пренебрежимо малы по сравнению с первой. Необходимые условия малости второй компоненты могут быть выяснены из результатов работы [9]. Третью компоненту можно считать малой, если концентрация системы не слишком близка к концентрации плотной упаковки.

Заметим, что в большинстве известных авторам исследований вязкости дисперсных систем, в частности, в большинстве работ, использующих ячеечную модель «стесненного» обтекания, различие между вязкостью жидкой фазы в системе и



Фиг. 1

полной эффективной вязкостью самой системы вообще игнорировалось. Поэтому ряд полученных ранее результатов (например, формула Симхи [3]), не имеет отношения ни к одной из указанных вязкостей.

В большинстве экспериментов [7], проведенных с суспензиями умеренных концентраций, условия совпадения вязкостей жидкой фазы и суспензии не выполнены, поэтому эти эксперименты не пригодны для проверки соотношений (4) — (6). Однако имеются данные (например, результаты опытов Арнштейна и Рейнера [8] по установившейся ползучести («крипу» бетонных растворов), согласно которым формула Эйнштейна приближенно справедлива не только в области ρ от 0 до 2—3%, как это принято считать, но и во всем интервале ρ вплоть до 50—60%. В условиях этих опытов плотности фаз примерно одинаковы, а число Архимеда весьма мало, главным образом за счет больших значений вязкости цементной основы, служившей дисперсионной средой.

Поэтому условия малости внутренних напряжений в диспергированной фазе в этих опытах выполняются почти при всех ρ , и возможно сравнение с выражениями $\mu(\rho)$ из (4) — (6).

Как видно из фигуры, в широком диапазоне ρ величину $\mu(\rho)$ на самом деле можно приближенно определять по формуле Эйнштейна.

Кроме того, известен так называемый «эффект аномальной вязкости», когда измеряемое значение вязкости суспензии оказывалось несколько ниже, чем вычисляемое по формуле Эйнштейна. Легко видеть, что это соответствует участку не слишком больших ρ на фигуре.

Величина $\mu(\rho)$ из (5), представляющая собой характеристику вязкостных свойств фильтрующейся жидкости, определяет вязкий член, которым при необходимости могут быть дополнены уравнения фильтрации Дарси. В частности, член вида

$$\mu(\rho) \partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_j$$

может быть записан в уравнениях относительного движения («межфазового скольжения») во взвешенном слое, полученных в работе [10].

Приложение. Искажение формы жидкой капли, движущейся в вязкой жидкости. Решая уравнения движения вне и внутри капли в пренебрежении инерционными членами, получим (величины со штрихом, относятся к течению внутри капли)

$$\begin{aligned} v_r &= \left(\frac{b_1}{r^3} + \frac{b_2}{r} + u \right) \cos \theta, & v_\theta &= \left(\frac{b_1}{2r^3} - \frac{b_2}{2r} - u \right) \sin \theta, & p &= \mu b_2 / r^2 \cos \theta, \\ v_r' &= (a_1 r^2 + a_2) \cos \theta, & v_\theta' &= (-2a_1 r^2 - a_2) \sin \theta, & p' &= \mu' 10a_1 r \cos \theta \end{aligned}$$

Здесь u — скорость жидкости на бесконечном удалении от капли. Из условий непрерывности скорости и тангенциальной компоненты напряжений и обращения в нуль радиальной компоненты скорости на поверхности капли, которую с точностью до малых первого порядка можно считать сферической, получим

$$\frac{b_1}{R^3} = \frac{u}{2} \frac{\mu'}{\mu + \mu'}, \quad \frac{b_2}{R} = -\frac{u}{2} \frac{3\mu' + 2\mu}{\mu + \mu'}, \quad a_1 R^2 = \frac{u}{2} \frac{\mu}{\mu + \mu'}, \quad a_2 = -\frac{u}{2} \frac{\mu}{\mu + \mu'}$$

Простые вычисления приводят к известной формуле Рыбчинского — Адамара для силы сопротивления. Однако условие непрерывности нормальных напряжений на сфере $r = a$ не выполняется, на ней имеет место дополнительный скачок давления

$$p_\sigma = p - p' = \frac{9}{2} \frac{u}{R} \frac{\mu\mu'}{\mu + \mu'} \cos \theta$$

Предполагая, что уравнение возмущенной сферы $r = a + \zeta(\theta)$, $\zeta \ll a$, выразим p_σ через производные от ζ : в результате имеем

$$\frac{d^2 \zeta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\zeta}{d\theta} + 2\zeta = -\frac{9}{2} \frac{uR}{\sigma} \frac{\mu\mu'}{\mu + \mu'} \cos \theta$$

Общее решение этого уравнения

$$\zeta(\theta) = \left[\frac{3}{2} \frac{uR}{\sigma} \frac{\mu\mu'}{\mu + \mu'} \ln \sin \theta + \frac{s_1}{2} \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{s_1}{\cos \theta} + s_2 \right] \cos \theta \quad \left(\begin{array}{l} s_1 = \text{const} \\ s_2 = \text{const} \end{array} \right)$$

Выбирая s_1 так, чтобы $\zeta(\theta)$ не имела особенностей при $\theta = 0, \pi$, получим

$$\zeta(\theta) = \frac{3}{2} \frac{uR}{\sigma} \frac{\mu\mu'}{\mu + \mu'} \cos \theta \left[\ln \sin \theta - \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right] + s_2 \cos \theta$$

причем постоянная s_2 определяется из условия постоянства объема капли

$$\int_0^\pi (a + \zeta(\theta))^3 \sin \theta d\theta = 2a^3$$

Таким образом, условие непрерывности нормальных напряжений на самом деле определяет искажение формы капли при обтекании ее и не имеет отношения к вычислению v, v', p и получению формулы для силы сопротивления. Формально это обстоятельство можно учесть, полагая $p' = \mu' (10a_1 r + a_2) \cos \theta$, т. е. вводя в выражение для p' новую постоянную a_3 , что и было сделано, например, в [2, 6].

Поступила 17 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, № 3.
2. Бувевич Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.
3. Simha R. Treatment of the Viscosity of Concentrated Suspensions. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, No. 9.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
5. Головин А. М., Левич В. Г., Толмачев В. В. Гидродинамика системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1966, № 2.
6. Бувевич Ю. А., Гупало Ю. П. Обтекание тела, покрытого жидкой пленкой. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.
7. Фриш Г. Л., Симха Р. Вязкость коллоидных дисперсий и растворов, содержащих макромолекулы. Сб. «Реология», Изд. иностр. лит., 1962.
8. Рейнер М. Реология. Изд. «Наука», 1965.
9. Бувевич Ю. А. Приближенная статистическая теория взвешенного слоя. ПМТФ, 1966, № 6.
10. Бувевич Ю. А. Двухжидкостная гидродинамика взвешенного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.