

СТАЦИОНАРНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ИСТОЧНИК  
НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ

Г. А. Лукьянов

(Ленинград)

В работе [1] была рассмотрена рекомбинация электронов при разлете плазмы одноатомного газа в пустоту. Предполагалось, что основным элементарным процессом является столкновительно-излучательная рекомбинация. При некоторых условиях оказался возможным разлет с остаточной ионизацией газа на бесконечности.

В данной работе рассматривается стационарное течение в сверхзвуковом сферическом источнике неравновесной плазмы одноатомного газа, состоящей из электронов, однозарядных ионов и атомов. Течения такого типа реализуются на практике в таких важных случаях, как движение газа по соплу или стационарное истечение в пустоту.

**1. Исходные предположения. Система уравнений.** Будем исследовать течение после нарушения ионизационного равновесия и прекращения актов ионизации. Кроме того, будем полагать отсутствие термического равновесия между электронами и тяжелыми частицами и выполнение условия квазинейтральности плазмы.

При сделанных предположениях уравнения неразрывности запишем в виде

$$\frac{d}{dr} (n_e u_L r^2) = \left( \frac{dn_e}{dt} \right)_p r^2 \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dr} (n_a u_a r^2) = - \left( \frac{dn_e}{dt} \right)_p r^2 \quad (1.2)$$

Здесь  $n$  — концентрация,  $u$  — скорость,  $r$  — расстояние от полюса источника,  $(dn_e/dt)_p$  — изменение концентрации электронов вследствие рекомбинации.

Индексы  $e$ ,  $i$ ,  $a$ ,  $L$  и  $m$  относятся соответственно к электронам, ионам, атомам, заряженным и тяжелым частицам. Условие квазинейтральности  $n_e = n_i$  вместе с уравнениями неразрывности для электронов и ионов дает равенство скоростей заряженных частиц  $u_e = u_i = u_L$ .

При низких температурах  $kT \ll I$  ( $I$  — потенциал ионизации) и не чрезмерно малых плотностях процесс рекомбинации имеет каскадный характер [1]. Сначала электрон при тройном столкновении с ионом и другим электроном захватывается на один из верхних уровней атома. Затем под действием электронных ударов второго рода, а позднее и в результате излучательных переходов связанный электрон опускается на основной уровень. В этом случае изменение электронной концентрации при рекомбинации определяется выражением [2]

$$\left( \frac{dn_e}{dt} \right)_p = - a T e^{-9/2} n_e^3, \quad a = \frac{e^{10}}{9 m_e^{1/2} k^{3/2} \epsilon^3 (4\pi)^{7/2}} \quad (1.3)$$

Здесь  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $m_e$  — масса электрона,  $k$  — постоянная Больцмана.

Учитывая, что трение между заряженными и нейтральными частицами обуславливается в основном столкновениями тяжелых частиц, запишем уравнения движения в виде

$$\frac{dp_e}{dr} = -en_e E \quad (1.4)$$

$$m_i n_e u_L \frac{du_L}{dr} = -n_e n_a \varepsilon_{ia} (u_L - u_a) - \frac{dp_i}{dr} + en_e E \quad (1.5)$$

$$m_a n_a u_a \frac{du_a}{dr} = -n_a n_e \varepsilon_{ai} (u_a - u_L) - \frac{dp_a}{dr} \quad (1.6)$$

Здесь  $p$  — давление,  $E$  — напряженность электрического поля,  $\varepsilon_{ia} = \varepsilon_{ai}$  — коэффициент трения между атомами и ионами.

Согласно работе [3], коэффициент трения для твердых гладких шаров определяется зависимостью

$$\varepsilon_{ia} = \varepsilon_{ai} = \frac{8}{3} \left( \frac{2}{\pi} \frac{kT}{m} \frac{m_a m_i}{m_i + m_a} \right)^{1/2} Q_{ia} \quad (1.7)$$

где  $Q_{ia}$  — сечение столкновения между атомами и ионами.

В области рассматриваемых температур  $kT \ll I$  величина сечения столкновения ион-атом довольно слабо зависит от температуры газа [4]. В дальнейшем для простоты будем считать  $Q_{ia} = \text{const}$ .

Уравнения энергии для электронов и тяжелых частиц запишем в виде

$$\frac{d}{dr} \left( n_e u_L r^2 \frac{5}{2} kT_e \right) = Q_{em}^* r^2 - I^* \frac{d}{dr} (n_e u_L r^2) - n_e u_L r^2 e E \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[ n_e u_L r^2 \left( \frac{5}{2} kT_m + \frac{m_a u_L^2}{2} \right) + \right. \\ & \left. + n_a u_a r^2 \left( \frac{5}{2} kT_m + \frac{m_a u_a^2}{2} \right) \right] = -Q_{em}^* r^2 + n_e u_L r^2 e E \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $Q_{em}^*$  — скорость передачи энергии от электронов к тяжелым частицам при упругих соударениях.

При степени ионизации выше  $10^{-3}$  передача энергии к тяжелым частицам происходит главным образом при электронно-ионных столкновениях ввиду того, что сечения столкновений электрон-ион более чем в  $10^3$  раз превышают электронно-атомные поперечные сечения.

Поскольку интересен случай заметной ионизации, то  $Q_{em}^* = Q_{ei}^*$  и, согласно работе [5]

$$Q_{ei}^* = \frac{n_e^2 e^4}{16\pi^2 m_a \varepsilon^2} \left( \frac{8\pi m_e}{kT_e} \right)^{1/2} \left( \frac{T_m}{T_e} - 1 \right) \ln \left[ \frac{72\pi^2 (kT_e)^3}{n_e e^6} \right] \quad (1.10)$$

Здесь  $I^*$  представляет собой энергию, возвращающуюся в электронный газ при дезактивации возбужденных атомов ударами второго рода. Другая часть энергии ионизации  $I - I^*$  высвечивается в спектральных линиях. Некоторая доля этой энергии, вообще говоря, также может перейти в тепло в результате возможной ударной дезактивации атома, возбужденного резонансным излучением. Длина пробега резонансного излучения определяется распределением плотностей и характером уширения спектральных линий. В энергетическом отношении основную роль играет реabsорбция резонансного перехода со второго уровня на первый (переход 2—1).

На близких расстояниях от полюса источника плазма практически всегда может считаться оптически толстой для резонансного перехода 2—1 ввиду очень больших эффективных сечений поглощения, достигающих в центре линии величины  $10^{-9} - 10^{-10}$  см<sup>2</sup>.

При оптически тонкой плазме можно воспользоваться выражением, полученным в работе [1] для атома водорода

$$I^* = I \times \begin{cases} 4.3 \cdot 10^{-6} n_e^{1/3} T_e^{-1/2} & (kT_e < I^* < I) \\ 3.1 \cdot 10^{-5} n_e^{1/6} T_e^{1/12} & (I^* > I) \end{cases} \quad (1.11)$$

$$I = \frac{1}{2} kT_e \left( \frac{2I}{kT_e} \right)^{1/3}$$

Ввиду медленного изменения  $I^*$  практически достаточно исследовать только второй случай  $I^* > I$ . Если  $I^*(r_1) > I(r_1)$ , то это неравенство сохранится и при  $r > r_1$ . Если же  $I^*(r_1) < I(r_1)$ , то вследствие сравнительно медленного изменения  $I^*$ , последнее неравенство изменит знак вскоре после сечения  $r = r_1$ . В дальнейшем будем пользоваться только вторым выражением (1.11). В случае плазмы оптически толстой для резонансного перехода 2—1 выражение для  $I^*$  принимает вид

$$I^* = 3.1 \cdot 10^{-5} n_e^{1/6} T_e^{1/12} + I_{21} \quad (1.12)$$

Для водорода ( $I = 13.53$  эв)  $I_{21} = 10.15$  эв и реабсорбция резонансного излучения при переходе 2—1 играет определяющую роль в передаче электронному газу энергии рекомбинации.

Уравнения состояния записываются в обычном виде

$$p_e = n_e k T_e, \quad p_i = n_i k T_m, \quad p_a = n_a k T_m \quad (1.13)$$

Исключим из системы уравнений  $n_a, E, p_e, p_m, p_i$  и введем следующие безразмерные параметры:

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad v_L = \frac{u_L}{u_0}, \quad v_a = \frac{u_a}{u_0}, \quad c_e = \frac{n_e}{n_0},$$

$$\theta_e = \frac{T_e}{T_0}, \quad \theta_m = \frac{T_m}{T_0}, \quad Y = \frac{r_0 e^4 (8\pi m_e)^{1/2} n_0}{40\pi^2 m_a u_0 e^2 (kT_0)^{3/2}} \ln \left[ \frac{72\pi^2 (kT_0 e)^3}{n_0 e^6} \right]$$

$$\Pi = \frac{a n_0^2 r_0}{T_0^{1/2} u_0}, \quad \Phi = \frac{8 \sqrt{kT_0} Q_{ia} r_0 n_0}{3 \sqrt{\pi m_a u_0}}, \quad W = \frac{kT_0}{m_a u_0^2}, \quad R = \frac{I^*}{v_{1/2} k T_0}$$

Здесь индексом 0 обозначены параметры тяжелых частиц, относящиеся к начальному радиусу сверхзвукового источника  $r_0$ .

Система уравнений для определения  $v_L, v_a, c_e, \theta_e$  и  $\theta_m$  принимает вид

$$\frac{d}{dx} (c_e v_L x^2) = - \Pi \frac{c_e^3}{\theta_e^{3/2}} x^2 \quad (1.14)$$

$$c_a v_L \frac{dv_L}{dx} = - \Phi c_e (v_L - v_a) \theta_m^{1/2} \left( \frac{1}{x^2 v_a} - \frac{c_e v_L}{v_a} \right) - W \frac{d}{dx} [c_e (\theta_m + \theta_e)] \quad (1.15)$$

$$\left( \frac{1}{x^2 v_a} - \frac{c_e v_L}{v_a} \right) v_a \frac{dv_a}{dx} = - \Phi c_e (v_a - v_L) \theta_m^{1/2} \left( \frac{1}{x^2 v_a} - \frac{c_e v_L}{v_a} \right) - W \frac{d}{dx} \left[ \theta_m \left( \frac{1}{x^2 v_a} - \frac{c_e v_L}{v_a} \right) \right] \quad (1.16)$$

$$\frac{d}{dx} (c_e v_L x^2 \theta_e) = - Y x^2 c_e^2 \theta_e^{-1/2} \left( 1 - \frac{\theta_m}{\theta_e} \right) + R \Pi \frac{c_e^3}{\theta_e^{3/2}} x^2 + \frac{2}{5} v_L x^2 \frac{d}{dx} (c_e \theta_e) \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \theta_m + 0.2 \frac{v_a^2}{W} \right) + c_e v_L x^2 \cdot 0.2 \frac{1}{W} (v_L^2 - v_a^2) \right] = Y x^2 c_e^2 \theta_e^{-1/2} \left( 1 - \frac{\theta_m}{\theta_e} \right) - \frac{2}{5} v_L x^2 \frac{d}{dx} (c_e \theta_e) \quad (1.18)$$

**2. Течение вблизи полюса источника.** Вблизи полюса источника при достаточно большой плотности в начальном сечении, когда  $\Phi \gg 1$ , можно положить  $v_L = v_a = v$ . Тогда система (1.14) — (1.18) принимает вид

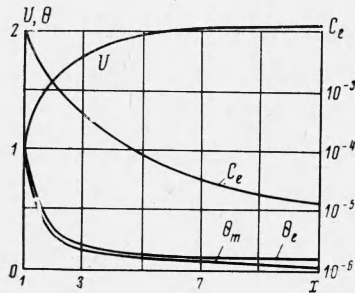
$$\frac{d}{dx}(c_e v x^2) = -\Pi \frac{c_e^3}{\theta_e^{3/2}} x^2 \quad (2.1)$$

$$[c_e v \frac{dv}{dx} = -W \frac{d}{dx} [c_e(\theta_m + \theta_e)]] \quad (2.2)$$

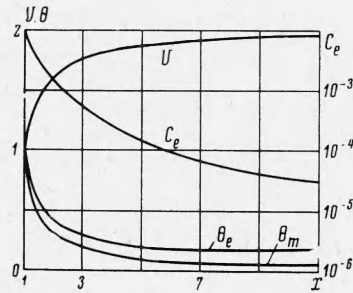
$$\frac{d}{dx}(c_e v x^2 \theta_e) = -Y x^2 c_e^2 \theta_e^{-1/2} \left(1 - \frac{\theta_m}{\theta_e}\right) + R\Pi \frac{c_e^3}{\theta_e^{3/2}} x^2 + \frac{2}{5} v x^2 \frac{d}{dx}(c_e \theta_e) \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \theta_m + 0.2 \frac{v^2}{W} \right) = Y x^2 c_e^2 \theta_e^{-1/2} \left(1 - \frac{\theta_m}{\theta_e}\right) - \frac{2}{5} v x^2 \frac{d}{dx}(c_e \theta_e) \quad (2.4)$$

Было проведено численное интегрирование системы уравнений (2.1) — (2.4) на машине Урал-1. На фиг. 1 представлены результаты расчета для случая оптически тонкой плазмы (1.11) при начальных параметрах  $r_0 = 10^{-2}$  м,  $n_0 = 10^{23}$  м<sup>-3</sup>,  $T_0 = 5 \cdot 10^3$  °К,  $u_0 = 10^4$  м/сек,  $m_a = 1.67 \cdot 10^{-27}$  кг.



Фиг. 1

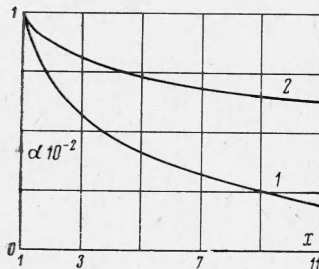


Фиг. 2

Аналогичный расчет для случая оптически толстой плазмы (1.12) при тех же начальных условиях дает большой отрыв электронной температуры (фиг. 2) и большее замораживание степени ионизации  $\alpha$  (фиг. 3). На фиг. 3 кривые 1 и 2 относятся соответственно к оптически тонкой и оптически толстой для резонансного излучения плазмы.

Это объясняется относительно большой долей энергии ( $I_{21} = 10.15$  эв), переходящей в электронный газ в результате ударной дезактивации атома, возбужденного резонансным излучением.

Результаты расчетов показывают, что для данных начальных условий преобразование тепловой энергии в кинетическую происходит очень интенсивно и практически заканчивается в области  $x \lesssim 10$ .



Фиг. 3

Интересным является изменение скорости плазмы при переходе от оптически тонкой к оптически толстой плазме. Во втором случае в области пространства, где проводился расчет, скорость оказалась меньшей по величине, хотя максимальное значение скорости, достигаемое при полном преобразовании энтальпии в кинетическую энергию, больше в случае оптически толстой плазмы. Несмотря на большее значение энергии рекомбинации  $I^*$ , передающейся электронам, замедление скорости рекомбинации в оптически толстой плазме вследствие более высокой электронной температуры приводит к уменьшению градиента скорости и растяжению зоны преобразования тепловой энергии в кинетическую. Характер изменения степени ионизации указывает на стремление течения к замораживанию состава. В области источника, где  $v \rightarrow \text{const}$ ,  $\alpha \rightarrow \text{const}$ , приближенно можно считать, что концентрация электронов  $n_e \sim r^{-2}$ .

При  $R \gg 1$ ,  $Y \gg 1$  вблизи начальной поверхности баланс энергии электронов определяется в основном потерями в упругих соударениях с тяжелыми частицами и возвращением в электронный газ энергии рекомбинации  $I^*$ , которая на основании уравнения (1.12) приближенно может считаться постоянной величиной

$$Yx^2c_e^2\theta_e^{-1/2}\left(1 - \frac{\theta_m}{\theta_e}\right) = R\Pi c_e^3\theta_e^{-3/2}x^2 \quad \text{или} \quad c_e = \frac{YI}{R\Pi} \theta_e^3 (\theta_e - \theta_m) \quad (2.5)$$

Положив  $v_L = v_a = v$ , сложим уравнения (1.17) и (1.18). Используя затем уравнение (1.14), получаем

$$(R + \theta_e)c_e v x^2 + \theta_m + \frac{0.2}{W} v^2 = \frac{A_0}{\Pi} \quad (2.6)$$

где  $A_0$  — постоянная, определяемая из условий на начальной поверхности.

Из равенств (2.5) и (2.6) для начальной стадии расширения получаем выражение для степени термической неравновесности

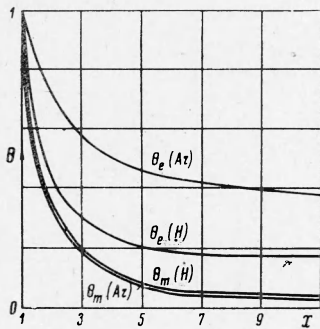
$$\frac{\theta_e - \theta_m}{\theta_e} = \frac{R}{Yvx^2\theta_e^4(R + \theta_e)} \left[ A_0 - \left( 0.2 \frac{\Pi}{W} v^2 + \Pi\theta_m \right) \right] \quad (2.7)$$

При  $R \gg \theta_e$  ( $R > 1$  для оптически тонкой и  $R \gg 1$  для оптически толстой плазмы), что выполняется обычно начиная с  $x > (3 \div 5)$ , выражение (2.7) несколько упрощается

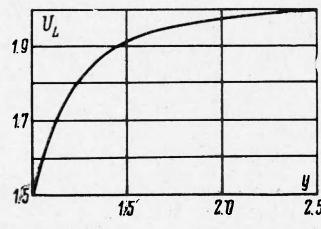
$$\frac{\theta_e - \theta_m}{\theta_e} = \frac{A_0 - (0.2\Pi v^2/W + \Pi\theta_m)}{Yvx^2\theta_e^4} \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что степень термической неравновесности увеличивается с понижением начальной концентрации и увеличением массы атома. На фиг. 4 представлены результаты численного расчета изменения температуры электронов и тяжелых частиц в сверхзвуковом источнике для водорода и аргона. Начальные концентрации, температуры и степени ионизации в обоих случаях полагались одинаковыми  $n_0 = 10^{23} \text{ м}^{-3}$ ,  $T_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{К}$ ,  $\alpha = 10^{-2}$ . Плазма считалась оптически толстой для резонансного перехода

2—1. При очень близких температурах тяжелых частиц наблюдается большое различие в электронных температурах.



Фиг. 4



Фиг. 5

**3. Течение вдали от полюса источника.** Скорость диффузии электронов и ионов относительно нейтральных атомов может быть получена из соответствующих уравнений движения (1.15) и (1.16). Ограничимся для простоты случаем, когда в результате нарушения термического равновесия температура электронов много больше температуры тяжелых частиц  $\theta_e \gg \theta_m$ . При значительной степени ионизации, давление в плазме будет в этом случае определяться давлением электронов. Учитывая сказанное, запишем



уравнение для скорости амбиполярной диффузии

$$\frac{d(v_L - v_a)}{dx} = -\Phi \frac{\theta_m^{1/2}}{x^2 v_a v_L} (v_L - v_a) - \frac{W}{c_e v_L} \frac{d}{dx} (c_e \theta_e) \quad (3.1)$$

Когда трение между тяжелыми частицами велико, разность между членами правой части уравнения (2.8) мала по сравнению с каждым из членов в отдельности. В этом случае скорость диффузии определяется выражением

$$v_L - v_a = -\frac{W x^2 v_a}{c_e \theta_m^{1/2} \Phi} \frac{d}{dx} (c_e \theta_e) \quad (3.2)$$

При дальнейшем расширении трение между тяжелыми частицами становится пренебрежимо малым. Скорость амбиполярной диффузии будет определяться только ускорением заряженной компоненты, которое обусловливается превращением тепловой энергии электронов в кинетическую энергию ионов при помощи электрического поля

$$\frac{dv_L}{dx} = -\frac{W}{c_e v_L} \frac{d}{dx} (c_e \theta_e) \quad (3.3)$$

На данной стадии расширения разумно считать, что обмен энергией между электронами и ионами при упругих соударениях, а также рекомбинация отсутствуют. Температура электронов  $\theta_e$  находится из уравнений энергии для электронов и ионов

$$\theta_e = H - \frac{0.2}{W} v_L^2, \quad H = c_{e1} v_{L1} x_1^2 \left( \theta_{e1} + \frac{0.2}{W} v_{L1}^2 \right) \quad (3.4)$$

Здесь индекс 1 соответствует некоторому фиксированному сечению  $r_1$ . Из уравнения неразрывности для электронов имеем

$$c_e = \frac{N}{x^2 v_L}, \quad N = c_{e1} x_1^2 v_{L1} \quad \text{при} \quad \left( \frac{dn_e}{dt} \right)_p = 0 \quad (3.5)$$

Преобразуя уравнение (3.3) при помощи (3.4) и (3.5), получаем

$$(0.8 v_L^2 - HW) \frac{dv_L}{dy} = (2WH v_L - 0.4 v_L^3) y^{-1}, \quad y = \frac{x}{x_1} \quad (3.6)$$

Интегрирование уравнения (3.6) дает

$$y = \left( \frac{v_L^* + v_L}{v_L^* - v_L} \frac{v_L^* - v_{L1}}{v_L^* + v_{L1}} \right)^{1/v_L^*} \left( \frac{v_L^2}{v_L^{*2} - v_L^2} \frac{v_L^{*2} - v_{L1}^2}{v_{L1}^2} \right)^{-0.25} \quad (3.7)$$

Здесь  $v_L^* = \sqrt{5HW}$  — максимальная скорость заряженных частиц. На фиг. 5 приведен график зависимости  $v_L = v_L(y)$ .

**4. Изменение степени ионизации.** Рассмотрим изменение степени ионизации при расширении плазмы. Скорость рекомбинации пропорциональна  $n_e^3 T_e^{-3/2}$ . Представляет безусловный интерес, проходит ли рекомбинация до конца или имеет место остаточная ионизация газа. Исследуем область, удаленную от полюса источника. Будем для простоты полагать  $u_L = u_a = \text{const}$ .

На основании уравнения (1.3) изменение степени ионизации  $\alpha$  запишем в виде

$$\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{an_m^2}{u_L} T_e^{-3/2} \alpha^3, \quad \alpha = \frac{n_e}{n_m} \quad (4.1)$$

Асимптотическое поведение степени ионизации можно видеть из формального решения уравнения (4.1)

$$\alpha = \alpha_1 \left[ 1 + \alpha_1^2 2a \int_{r_1}^r \frac{n_m^2}{u_L T_e^{3/2}} dr \right]^{-1/2} \quad (4.2)$$

Индекс 1 относится к параметрам в некотором фиксированном сечении с радиусом  $r_1$ . Если искать асимптотическое решение для  $T_e$  в виде  $T_e \sim r^{-p}$ , то, полагая  $n \sim r^{-2}$  для больших  $r$ , получим, что при  $p < 2/3$  степень ионизации стремится при  $r \rightarrow \infty$  к постоянной величине, а при  $p > 2/3$  к нулю. Однако изменение  $T_e$  само зависит от процесса рекомбинации. Чтобы дать ответ на поставленный вопрос, необходимо получить явную зависимость  $T_e = T_e(r)$ .

Будем рассматривать стадию достаточного расширения, когда можно пренебречь обменом энергией при упругих соударениях между электронами и тяжелыми частицами. Изменение электронной концентрации в данной области источника определяется в основном процессом расширения

$$c_e = c_{e1} y^{-2} \quad (4.3)$$

При помощи подстановки  $z = \theta_e^{1/2}$  уравнение энергии для электронов (1.17) преобразуется к виду

$$\frac{dz}{dy} + \frac{22}{3} \frac{z}{y} = \frac{55}{6} R\Pi \frac{c_{e1}^2 x_1}{v_L} y^{-4} \quad (4.4)$$

Интегрируя уравнение (4.4), получаем

$$\theta_e = y^{-4/3} \left[ \frac{55}{38} R\Pi c_{e1}^2 \frac{x_1}{v_L} (y^{1/3} - 1) + \theta_e^{1/2} \right]^{2/11} \quad (4.5)$$

Для  $y \gg 1$  выражение (4.5) можно упростить

$$\theta_e = \frac{55}{38} R\Pi c_{e1}^2 y^{-4/11} x_1 v_L^{-1} \text{ или } p = 6/11 \quad (4.6)$$

Таким образом, на больших расстояниях от полюса  $p < 2/3$ , и, следовательно, в сверхзвуковом источнике происходит замораживание состава плазмы.

Нулевая степень ионизации может быть достигнута в том случае, если рекомбинация закончится еще вблизи полюса источника. Это возможно, например, при очень малой степени ионизации.

Отметим, что здесь рассмотрены лишь некоторые вопросы, связанные с расширением плазмы в сверхзвуковом источнике. Желательным является учет некоторых важных процессов, например диффузии излучения, которая не принималась во внимание.

Поступила 22 IV 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Н. М., Райзер Ю. П. О рекомбинации электронов в плазме, расширяющейся в пустоту. ПМТФ, 1965, № 4.
2. Гуревич А. В., Пятаевский Л. П. Коэффициент рекомбинации в плотной низкотемпературной плазме. ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 4.
3. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В сб.: «Вопросы теории плазмы», М., Госатомиздат, 1963, вып. 1.
4. Хастед Дж. Физика атомных столкновений. М., «Мир», 1965.
5. Печек Г., Байрон С. Приближение к равновесной ионизации за ударной волной в аргоне. В сб. «Ударные трубы», М., Изд-во иностр. лит., 1962.