ПМТФ, № 2, 1972

УДК 539.41

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОЙ ВОЛНЫ С ПЛАСТИНКОЙ

А. М. Скобеев

(Москва)

В рамках динамической теории упругости строится численное решение одной осесимметричной задачи, возникшей в связи с проблемой измерения напряжений на границе между сплошной средой и жесткой стенкой. В цилиндрических координатах r, z среда заполняет цилиндр $z > 0$, $r < R$, причем возможен случай $R \to \infty$, когда среда занимает полупространство $z > 0$. Упругая среда граничит с жесткой стенкой, имеющей в плоскости $z = 0$ деформируемую часть в виде круглой упругой пластинки, защемленной по краям. Из бесконечности падает плоская продольная волна в виде полубесконечной ступеньки. Исследуется взаимодействие этой волны с пластинкой, причем основное внимание уделяется изучению влияния параметров задачи на прогиб пластинки под действием волны.

1. Для измерения напряжений на границе между сплошной средой, например грунтом, и жесткой стенкой используются так называемые мембранные датчики.

Такой датчик представляет собой металлический цилиндр, в одно из оснований которого заделана упругая пластинка. Предполагается, что прогиб центра пластинки пропорционален действующему на ее поверхность напряжению. Коэффициент пропорциональности находят, помещая прибор в жидкость и измеряя прогиб под действием гидростатического давления. Корпус прибора помещен внутри стенки, так что в плоскости контакта находится только пластинка.

При этом способе измерения возникают систематические ошибки, вызванные тем, что среда обладает несущей способностью и при одинаковых напряжениях прогиб пластинки в жидкости будет больше, чем в твердой среде. Кроме того, если напряжение в среде изменится достаточно быстро, то пластинка просто не успеет прогнуться. Разумеется, могут существовать и другие ошибки, вызванные, например, несовершенством аппаратуры, но они здесь не рассматриваются.

Ошибки, о которых идет речь, существенно зависят от свойств среды и характера изменения нагрузки, в частности, в покоящейся жидкости они исчезают. При реальных измерениях свойства среды известны весьма приблизительно, особенно если цель измерений — получение сведений об этих свойствах. Поэтому в дальнейшем среда считается идеально упругой. Есть основания ожидать, что для упруго-пластической среды статическая ошибка будет меньше, чем для упругой, и это подтверждено в одном частном случае в работе автора [1]. Если это так, то результаты, полученные для упругой среды, могут использоваться и для оценки ошибок измерения в упруго-пластических средах.

Инерционные свойства пластинки сильнее всего проявляются при внезапном изменении нагрузки, поэтому рассматривается взаимодействие пластинки с волной в виде полубесконечной ступеньки. Это позволяет выявить динамические эффекты, вызванные внезапным изменением нагрузки и получить статическое решение, просто проводя расчет до выхода на статический режим.

Рассмотрение ведется в цилиндрических координатах. Используются обозначения: t — время, r — радиальная, z — осевая координаты, u, w —

смещения по r и z, σ_{zz}, σ_{rr}, $\tau \equiv \sigma_{rz}$ — компоненты тензора напряжений, μ — модуль сдвига в среде. Используются безразмерные переменные, выбранные так, чтобы плотность среды, скорость распространения продольной волны в среде и радиус пластинки равнялись единице. Связь между размерными и безразмерными величинами описывается выражениями

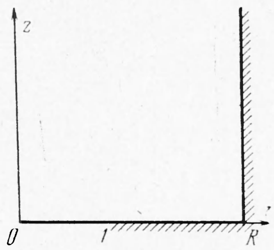
$$x_i = x_i' / L, \quad u_i = u_i' / L, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}' / (\lambda' + 2\mu')$$
$$\mu = \mu' / (\lambda' + 2\mu'), \quad t = c't' / L \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

где штрихом обозначены размерные переменные, $x_1 = r$, $x_2 = z$, $u_1 = u$, $u_2 = w$, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, λ' и μ' — коэффициенты Ляме, L — размерный радиус пластинки, $c' = \sqrt{(\lambda' + 2\mu')/\rho'}$ — скорость распространения продольной волны, ρ' — плотность среды.

Задача предполагается осесимметричной. Уравнения теории упругости в этом случае имеют вид [2]

$$u_{tt} = \mu u_{zz} + u_{rr} + (1 - \mu) w_{rz} + u_r / r - u / r^2$$
$$w_{tt} = w_{zz} + \mu w_{rr} + \mu w_r / r + (1 - \mu)(u_{zr} + u_z / r) \tag{1.2}$$

Для этих уравнений ставятся начальные и граничные условия, и они решаются в области $z > 0$, $0 < r < R$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Начальные условия описывают плоскую продольную волну, падающую на плоскость $z = 0$ из $z = \infty$; за фронтом среда находится в состоянии одноосной деформации с $\sigma_{zz} = 1/2$. Они имеют вид

$$u = u_t = 0, \quad w = z / 2, \quad w_t = 1/2 \text{ при } z > 0, \quad r < R, \quad t = 0 \tag{1.3}$$

Граничные условия ставятся при $r = 0$, $r = R$ и $z = 0$.

Условия при $r = 0$ выбираются из соображений симметрии и сводятся к тому, что в силу осевой симметрии w должно быть четной, u — нечетной функцией r

$$u = 0, \quad w_r = 0, \quad \text{при} \quad z > 0, \quad r = 0 \tag{1.4}$$

При $r = R$ среда граничит с жесткой гладкой стенкой, на которой $u = 0$, $\tau = 0$. Легко показать, что эти условия влекут за собой $w_r = 0$ на стенке, и, следовательно, при $r = R$ ставятся те же условия, что и при $r = 0$, т. е. (1.4).

В наиболее важном случае $R \to \infty$ среда заполняет полупространство $z > 0$, и граничное условие при $r = R$ исчезает.

При $z = 0$ ставится два граничных условия.

Первое из них отражает предположения о характере сцепления среды со стенкой и пластинкой. Рассматриваются два крайних случая: 1) на границе отсутствует трение (условие проскальзывания), 2) $u = 0$ на границе (условие прилипания). Чтобы записать эти условия в единообразной форме, вводится параметр k, который может принимать только два значения: 0 и 1. Первое условие принимает вид

$$ku + (1 - k)\tau = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.5}$$

При $k = 0$ оно переходит в условие проскальзывания, при $k = 1$ — в условие прилипания, а другие значения k не рассматриваются.

Второе условие при $z = 0$ возникает из требования непрерывности нормальных смещений на границе. Так как при $1 \leqslant r \leqslant R$ среда граничит с жесткой стенкой, то $w = 0$ для этих r. При $r < 1$ среда граничит с упругой пластинкой, и для w должно выполняться уравнение колебаний пластинки, которое в условиях цилиндрической симметрии имеет вид

$$\rho w_{tt} + I\Delta\Delta w - \sigma_{zz} = 0 \text{ при } z = 0, \quad r < 1 \quad (\Delta w = w_{rr} + w_r / r) \tag{1.6}$$

ρ и I — безразмерные плотность и жесткость пластинки. В размерных переменных

$$\rho = \frac{\rho_1 d}{\rho' L}, \quad I = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)(\lambda' + 2\mu')L^3}$$

где ρ_1 — плотность, d — толщина, L — радиус, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона пластинки.

Для уравнения (1.6), в свою очередь, возникают начальные и граничные условия. Начальные условия имеют вид

$$w = w_t = 0 \text{ при } t = 0, \quad z = 0, \; r < 1$$

Граничное условие при $r = 1$ следует из предположения, что пластинка защемлена по краям: $w = w_r = 0$. Условия при $r = 0$ сводятся к тому, что в осесимметричной задаче w — четная функция r, т. е. $w' = w''' = 0$ при $r = 0$.

2. Поставленная задача решается методом конечных разностей. Как обычно, область, в которой ищется решение, разбивается прямыми, параллельными осям координат, на квадраты со стороной h. Все функции рассматриваются только в узлах полученной сетки и в дискретные моменты времени. Производные по времени и координатам заменяются конечно-разностными отношениями, в результате получается система линейных алгебраических уравнений, которая решается на ЭВМ.

Прямая реализация этого метода невозможна хотя бы потому, что в результате получается бесконечная система уравнений. Поэтому исходная задача предварительно преобразуется: выделяется особенность в начальных условиях, бесконечная область заменяется конечной, а уравнение (1.6) преобразуется к более удобному виду.

Особенность в начальных условиях (разрыв w_t при $z = 0$) выделяется представлением начальных условий в виде суперпозиции статической нагрузки

$$w = z, \quad w_t = u_t = u = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{2.1}$$

и уходящей волны

$$w = -z/2, \quad w_t = {}^1/_2, \quad u = u_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2.2}$$

В силу линейности задачи решение будет равно сумме решений с начальными условиями (2.1) и (2.2). Решение, удовлетворяющее (2.2), имеет вид $u = 0$, $w = (t - z) / 2$ при $z > t$, $u = 0$, $w = 0$ при $z \leqslant t$. Следовательно, при $z \leqslant t$ решение с начальными условиями (2.1) совпадает с решением исходной задачи.

Основной интерес представляет w при $t > 0$, $z = 0$, поэтому в дальнейшем начальные условия (1.3) заменяются на (2.1) и не делается различия между решением исходной задачи и решением с начальными условиями (2.1).

Следующее изменение в исходной постановке состоит в ограничении области, в которой ищется решение. Можно усмотреть, что постоянное решение $u = 0$, $w = z$ удовлетворяет всем условиям задачи, кроме уравнения колебаний пластинки. Так как возмущение, вызванное движением пластинки, для конечных t распространяется на конечную область, представляется естественным искать решение только в этой области. Однако от этого способа пришлось отказаться, потому что рост возмущенной области накладывает неудобные ограничения на время, до которого можно продолжить расчет на БЭСМ-3М.

Чтобы избежать этих ограничений, вводилась фиктивная граница Г и предполагалось, что на ней движение близко к плоскому одномерному. Для конечного R граница Г была отрезком прямой $z = z_0$, $0 \leqslant r \leqslant R$, для бесконечного R — отрезками $z = z_0$, $0 \leqslant r \leqslant R_0$ и $r = R_0$, $0 \leqslant z \leqslant z_0$, причем z_0 и R_0 выбирались так, чтобы новая граница проходила через узлы сетки.

Введем следующие обозначения: $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{\mu}$, l — нормаль к Г, u^1 и u^2 — нормальные и касательные к Г компоненты смещения в возмущенном движении. На участке $z = z_0$ введенные величины определяются равенствами

$$l = z,\ u^1 = w - z,\ u^2 = u$$

на участке $r = R_0$

$$l = r,\ u^1 = u,\ u^2 = w - z$$

В этих обозначениях предположение об одномерности возмущенного движения можно записать в виде

$$u_{tt}{}^{\alpha} = c_{\alpha}{}^2 u_{ll}{}^{\alpha} \text{ на Г } (\alpha = 1, 2) \tag{2.3}$$

Граничные условия на Г принимаются в виде

$$u_t{}^{\alpha} + c_{\alpha} u_l{}^{\alpha} = 0 \text{ на Г } (\alpha = 1, 2) \tag{2.4}$$

В (2.3) и (2.4) суммирования по α нет.

Можно показать, что в одномерном случае решение уравнений (2.3) с граничными условиями (2.4) совпадает с решением этих уравнений в неограниченной области. Использование условий (2.4) в неодномерной задаче внесет погрешность в решение, влияние которой оценивается в п. 4.

Наконец, уравнение (1.6) преобразуется так, чтобы входящие в него производные по z вычислялись во внутренних точках области. Обозначая индексом h величины при $z = h$ и использовав уравнения движения, получим

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}{}^h - h\partial\sigma_{zz}/\partial z + O(h^2) = \sigma_{zz}{}^h - hw_{tt} + h(\tau_r + \tau / r) + O(h^2) \tag{2.5}$$

Из (1.5) можно усмотреть, что $\tau = k\tau$ при $z = 0$. Это необычное равенство следует из того, что k принимает только два значения: 0 и 1, причем $\tau = 0$ при $k = 0$. Отсюда получается выражение для τ через смещения $\tau = k\mu w_r + k\mu u_z$. Так как на пластинке $u = 0$ при $k = 1$, то $ku_z = ku_z{}^h / h + O(h)$ и

$$h(\tau_r + \tau / r) = k\mu h\Delta w + k\mu h(u_r{}^h + u^h / r) + O(h^2) \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) и (2.5) в (1.6) и используя выражение для $\sigma_{zz}{}^h$ через смещения, получим

$$(\rho + h) w_{tt} + I\Delta\Delta w - k\mu h\Delta w = w_z{}^h + (1 - 2\mu + k\mu)(u_r{}^h + u^h / r) + O(h^2) \tag{2.7}$$

3. Для решения задачи была выбрана схема второго порядка точности. Значения u и w в момент времени $t + t_0$ вычислялись сначала во внутренних точках области, потом на границе с использованием уже вычисленных значений.

Во внутренних точках вычисления проводились по трехслойной явной схеме для уравнений (1.2). При этом использовались уже вычисленные значения u и w в моменты времени t и $t - t_0$ во всей области, включая границу.

Вычисления на участке границы $z = 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ велись по четырехслойной неявной схеме для уравнения (2.7). Выбор явной схемы для уравнений (1.2) и неявной для (2.7) объясняется тем, что машинное время тратится в основном на вычисления внутренних точек, поэтому их следует вычислять самым простым способом, а для граничных точек выбрать такую схему, которая не накладывает дополнительных ограничений на шаг по времени.

Для устойчивости явной схемы необходимо выполнение критерия Куранта, поэтому полагалось $t_0 = h/2$, причем h выбиралось так, чтобы $1/h$ было целым числом.

Для описания разностной схемы вводятся дополнительные обозначения

$$n_1 = 1/h,\ n_2 = z_0/h,\ n_3 = R_1/h,\ R_1 = R$$

если R конечно, $R_1 = R_0$, если R бесконечно, l — нормаль к границе.

Производные по координатам и времени аппроксимируются центральными разностными операторами везде, где это возможно, в остальных случаях используются односторонние операторы.

Центральные и односторонние разностные операторы определяются соотношениями

$$\delta_x f = (f_+ - f_-)\,/\,(2\Delta x), \qquad \delta_{xx} f = (f_+ - 2f + f_-)\,/\,(\Delta x)^2 \tag{3.1}$$

$$\delta_{xx}{}^1 f = (3f - 4f_- + f_2)\,/\,(2\Delta x), \qquad \delta_{xx}{}^1 f = (2f - 5f_- + 4f_2 - f_3)\,/\,(\Delta x)^2 \tag{3.2}$$

$$f_+ = f(x + \Delta x), \quad f_- = f(x - \Delta x), \quad f_2 = f(x - 2\Delta x), \quad f_3 = f(x - 3\Delta x)$$

Здесь f — произвольная функция аргумента x, величина $\Delta x = t_0$, если x означает t, $\Delta x = \pm h$ в остальных случаях. Знак Δx безразличен для центральных операторов, для односторонних он выбирается так, чтобы (3.2) не содержало внешних точек.

Видно, что (3.1), (3.2) аппроксимируют соответствующие дифференциальные операторы с точностью до h^2.

Если ввести сокращенные обозначения

$$\Delta_1 = \delta_r + r^{-1}, \quad \Delta_r = \Delta_1\delta_r, \quad \Delta_z = \Delta_1\delta_z, \quad \Delta_2 = \Delta_r\Delta_r, \quad \delta_{rz} = \delta_r\delta_z$$

то разностный аналог уравнений (1.2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \delta_{tt} u = \Delta_r u + \mu\delta_{zz} u + (1 - \mu)\,\delta_{rz} w - u\,/\,r^2 \\ \delta_{tt} w = \delta_{zz} w + \mu\Delta_r w + (1 - \mu)\,\Delta_z u \end{gathered} \tag{3.3}$$

где u и w опредлены для значений аргументов

$$t = mt_0, \quad r = ih, \quad z = jh \qquad (m \geqslant 0,\ 0 < i < n_3,\ 0 < j < n_2)$$

причем m, i, j — целые. Для уравнения (2.7) принималась аппроксимация

$$(\rho + h)\,\delta_{tt}{}^1 w + I\Delta_2 w - k\mu h\Delta_r w = \delta_z w + (1 - 2\mu + k\mu)\,\Delta_1 u \tag{3.4}$$

где $t = mt_0$, $r = ih$, $m \geqslant 1$, $0 \leqslant i < n_1$, $z = h$ в правой части, $z = 0$ в левой.

Оператор Δ_r содержит особенность $ur = 1$ при $r = 0$, а $\Delta_2 = \Delta_r\Delta_r$ при $r = 0$, $r = h$. В этих точках операторы Δ_r и Δ_2 принимались с использованием граничных условий для (1.6) в виде

$$\begin{gathered} \Delta_r w = 2\,(w_1 - w_0)/h^2 \ \text{при}\ r = 0 \\ \Delta_r w = 2\,(w_0 - w)/h^2 \ \text{при}\ r = 1 \\ \Delta_2 w = 16\,(w_0 - {}^4/_3\, w_1 + w_2/3)/h^4 \ \text{при}\ r = 0 \\ \Delta_2 w = (-4w + 26w_0/3 - 20\, w_1/3 + 2w_2)/h^4 \ \text{при}\ r = h \\ w_i = w\,(t + t_0,\ r + ih,\ 0), \qquad w_- = w\,(t + t_0, r - h, 0) \end{gathered} \tag{3.5}$$

Уравнения (3.4) представляют собой систему линейных уравнений для определения w на участке границы $z = 0$, $0 \leqslant r < 1$. Эта система решалась методом прогонки [3].

Граничное условие (1.5) принималось в виде

$$ku + \mu\,(1 - k)\,(\delta_r w + \delta_z{}^1 u) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,\ \ 0 < r \leqslant R_1 \tag{3.6}$$

Это условие позволяет вычислить u, если w известно на всей нижней границе.

Граничное условие (2.4) аппроксимировалось с использованием центральных разностных отношений. Если в (2.4) вместо u_t^α и u_l^α подставить $\delta_t u^\alpha$ и $\delta_l u^\alpha$, то полученная система будет содержать лежащие вне области точки. Для исключения этих точек использовалась разностная аппроксимация уравнений (2.3). В результате граничное условие на Г получалось в виде

$$2c_\alpha(\delta_t u^\alpha + c_\alpha \delta_l u^\alpha) + h(\delta_{tt} u^\alpha - c_\alpha^2 \delta_{ll} u^\alpha) = 0 \tag{3.7}$$

где $\alpha = 1,2$ и суммирования по α нет.

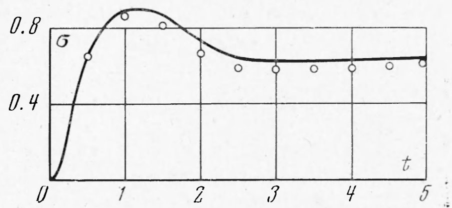
Граничное условие $w_r = 0$ заменялось на $\delta_r^1 w = 0$, а условия $u = 0$ и $w = 0$ оставлялись без изменений.

Начальные условия принимались при $t = 0$ и $t = -t_0$ во всей области в виде (2.1). Для (3.4) необходимо еще одно условие, поэтому полагалось $w = 0$ при $t = -2t_0$, $z = 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Изложенная схема была реализована в виде программы на языке АЛГОЛ-60. Расчеты проводились на БЭСМ-3М. Максимальное число точек сетки 2500. Так как в каждой точке нужно было хранить четыре величины, то массивы смещений не помещались в оперативной памяти и их приходилось хранить на барабане. Обмен с барабаном занимал примерно половину времени счета. Время, необходимое для расчета решения от 0 до t, составляло $\sim 2\cdot 10^{-4}\, z_0 R_1 t/h^3$ *мин*.

4. Целью расчетов была оценка влияния параметров задачи на прогиб пластинки. Как уже было сказано в начале, при интерпретации результатов измерения предполагается, что прогиб центра пластинки пропорционален напряжению в среде. Если через σ обозначить измеряемое напряжение, то из решения соответствующей гидростатической задачи находится выражение для σ через смещение центра пластинки

$$\sigma = 64\, w(t, 0, 0) / I \tag{4.1}$$



Фиг. 2

Если не учитывать влияние прогиба пластинки на поле напряжений, то в отраженной волне $\sigma_{zz} = 1$ при $t > 0$, следовательно, σ равна отношению измеряемого напряжения к истинному.

В задачу входит пять физических параметров — μ, k, ρ, I, R — и три параметра, характеризующие выбранную схему, — h, z_0, R_0. Параметры схемы влияют только на точность результатов, физические же параметры влияют на σ по существу.

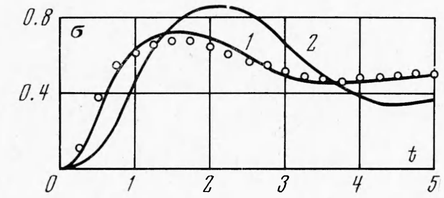
Так как оценить одновременное влияние всех параметров при численном счете совершенно невозможно, то влияние каждого параметра исследуется отдельно. Чтобы не выписывать одинаковые комбинации параметров, в дальнейшем полагается

$$\mu = 0.3,\ k = 0,\ \rho = 0.1,\ I = 0.02,\ R \to \infty,\ h = 0.1,\ z_0 = 3.0,$$
$$R_0 = 3.0$$

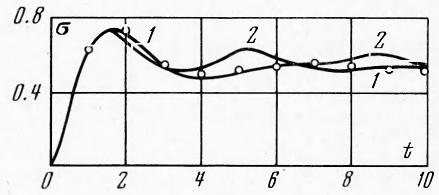
и оговариваются только отличия параметров от перечисленных значений.

Проще всего исследовать влияние k, так как оно принимает только два значения: 0 и 1. Было обнаружено, что σ слабо зависит от k. На фиг. 2 сплошной линией изображено $\sigma(t)$ для $k = 0$, точки соответствуют решению с $k = 1$. Аналогичные результаты получились и для $I = 0.01$, 0.04, 0.08, и можно считать, что k влияет на σ в пределах нескольких процентов. Это обстоятельство представляется важным, так как относительно реальных условий контакта обычно известно только, что они лежат где-то между условиями прилипания ($k = 1$) и полного проскальзывания ($k = 0$).

Безразмерная плотность ρ, в принципе, может быть любой, однако для реальных датчиков она порядка 0.1. Так как решение статической задачи не зависит от ρ, то ρ влияет только на переходной процесс. Это влияние видно из фиг. 3, где $I = 0.01$, кривая *1* изображает $\sigma(t)$ для $\rho = 0.1$, кривая *2* — для $\rho = 0.5$, точки означают σ для $\rho = 0.02$. Видно,



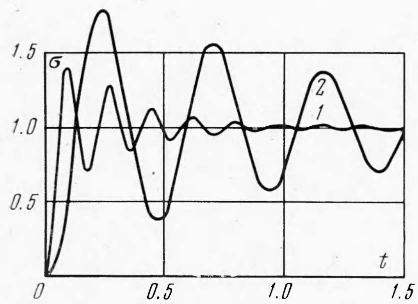
Фиг. 3



Фиг. 4

что при малых ρ величина $\sigma(t)$ слабо зависит от ρ, а длительность переходного процесса растет с ростом ρ, т. е. более тяжелые пластинки имеют худшие динамические характеристики.

Исследовалось также влияние боковых стенок. Как и следовало ожидать, оно оказалось максимальным для малых I, но и в этом случае оно все равно мало. На фиг. 4 $I = 0.01$, кривая *1* изображает $\sigma(t)$ для $R \to \infty$, кривая *2* — для $R = 1.1$, точки соответствуют $R = 3$.



Фиг. 5

Наиболее существенна зависимость σ от μ и I.

Влияние этих параметров исследовалось в [4], где было построено численное решение статической задачи для $R \to \infty$ и $k = 0$.

Эта же задача решалась другим методом Е. Б. Сретенским [1], которым было получено выражение

$$\sigma_0 = [1 + 0.0431\mu\,(1 - \mu)/I]^{-1} \qquad (4.2)$$

где приняты обозначения данной работы и σ_0 соответствует $\sigma(\infty)$. Следует заметить, что численные результаты [4] хорошо описываются формулой (4.2).

Оценивались пределы применимости (4.2). Для этого решение считалось до тех пор, пока $\sigma(t)$ не становилось постоянной. Полученная постоянная σ_1 сравнивалась с σ_0 из (4.2). Результаты приведены ниже

I	0.01	0.04	0.08	0.10	1.00	
σ_0	0.52	0.82	0.90	0.92	0.99	$\mu = 0.3$
σ_1	0.53	0.83	0.91	0.93	1.01	

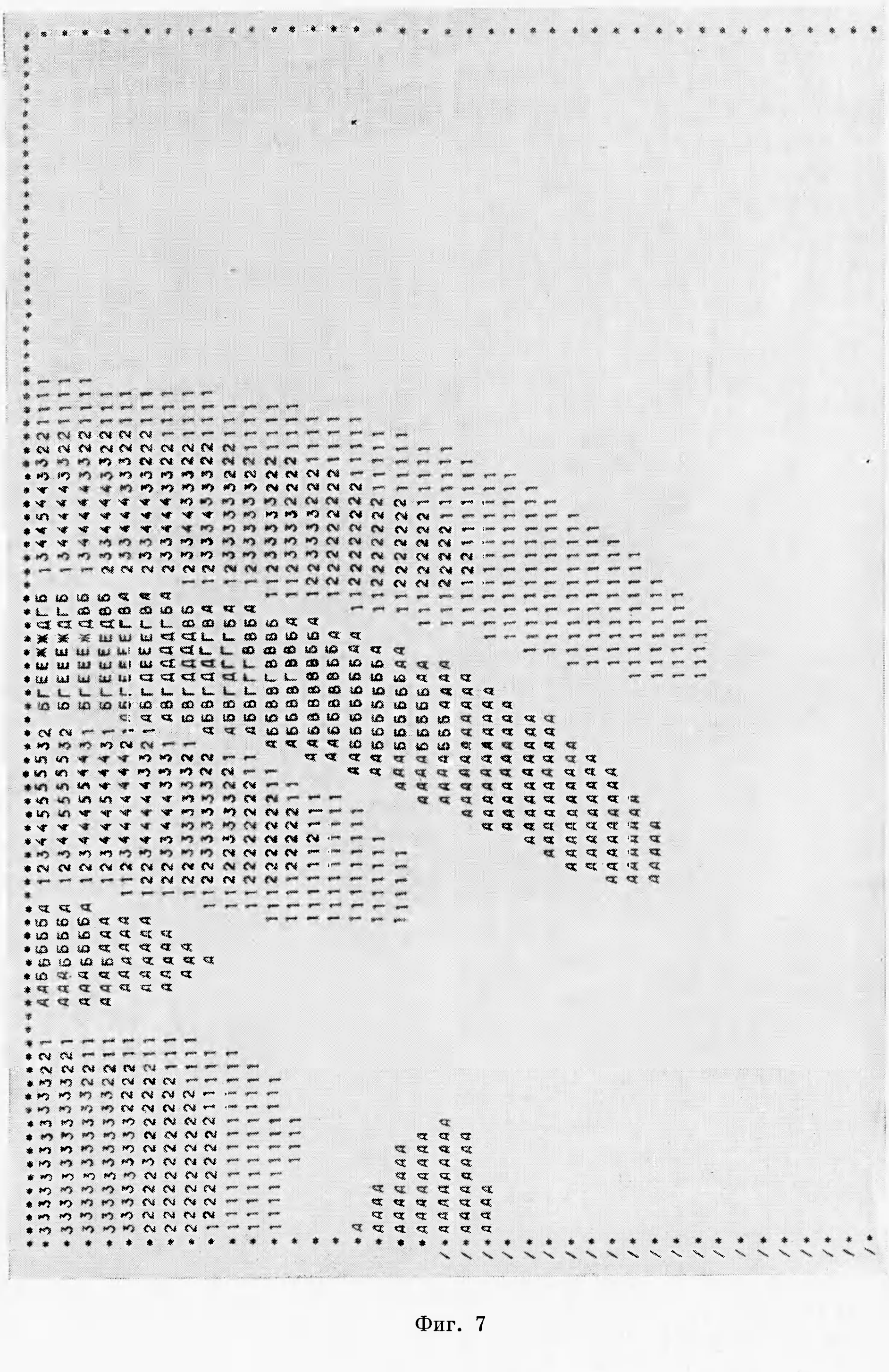
μ	0.00	0.10	0.30	0.50	
σ_0	1.00	0.84	0.69	0.65	$I = 0.02$
σ_1	1.01	0.86	0.69	0.65	

Контрольные расчеты с повышенной точностью показали, что различие между σ_0 и σ_1 объясняется скорее ошибками численного счета, нежели погрешностью (4.2). Таким образом, можно считать, что при $I \geqslant 0.01$ и любых μ (4.2) дает по крайней мере два верных знака после запятой.

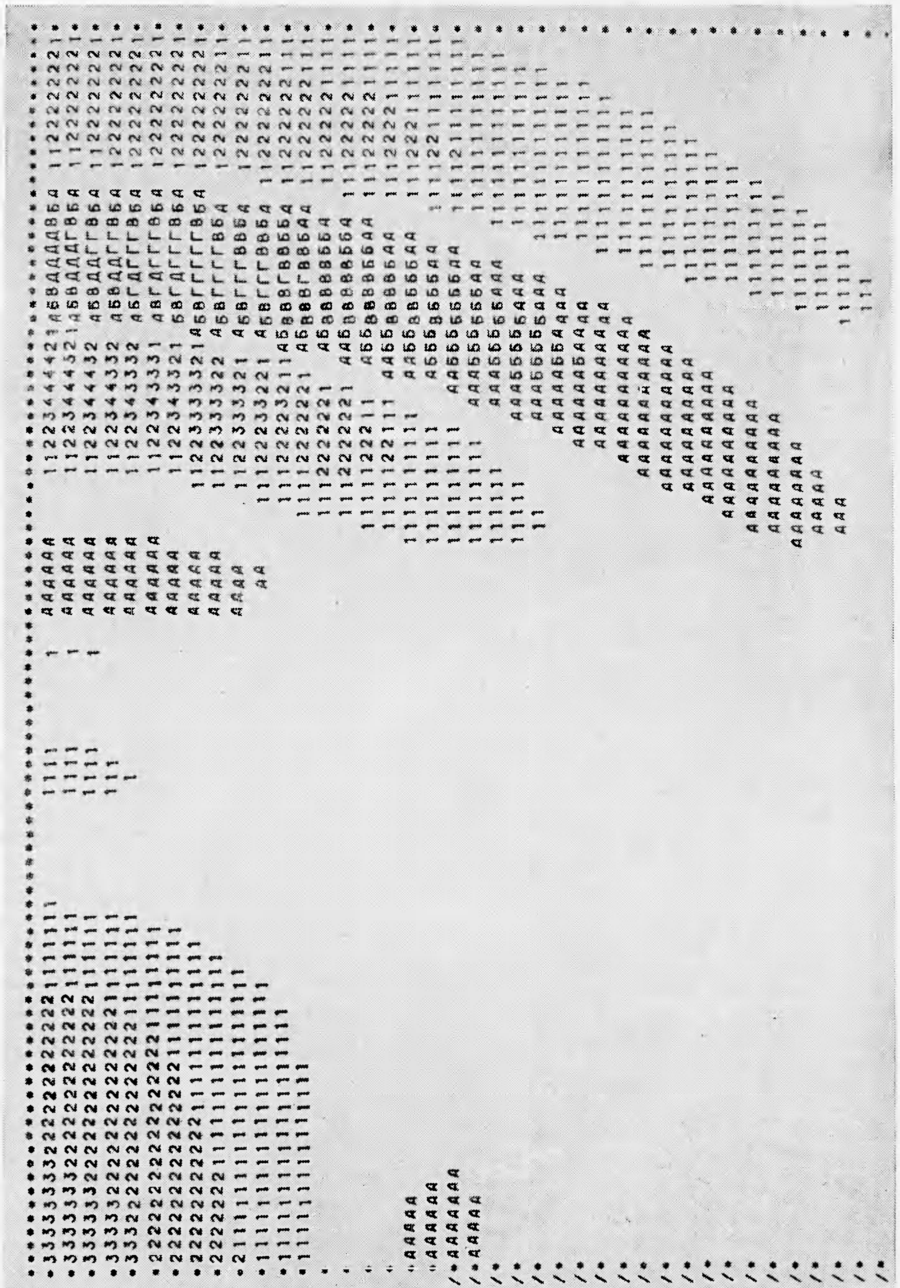
[1] Сретенский Е. Б. К теории мембранного датчика напряжений. Дипломная работа, МФТИ, 1970 г.

Фиг. 6

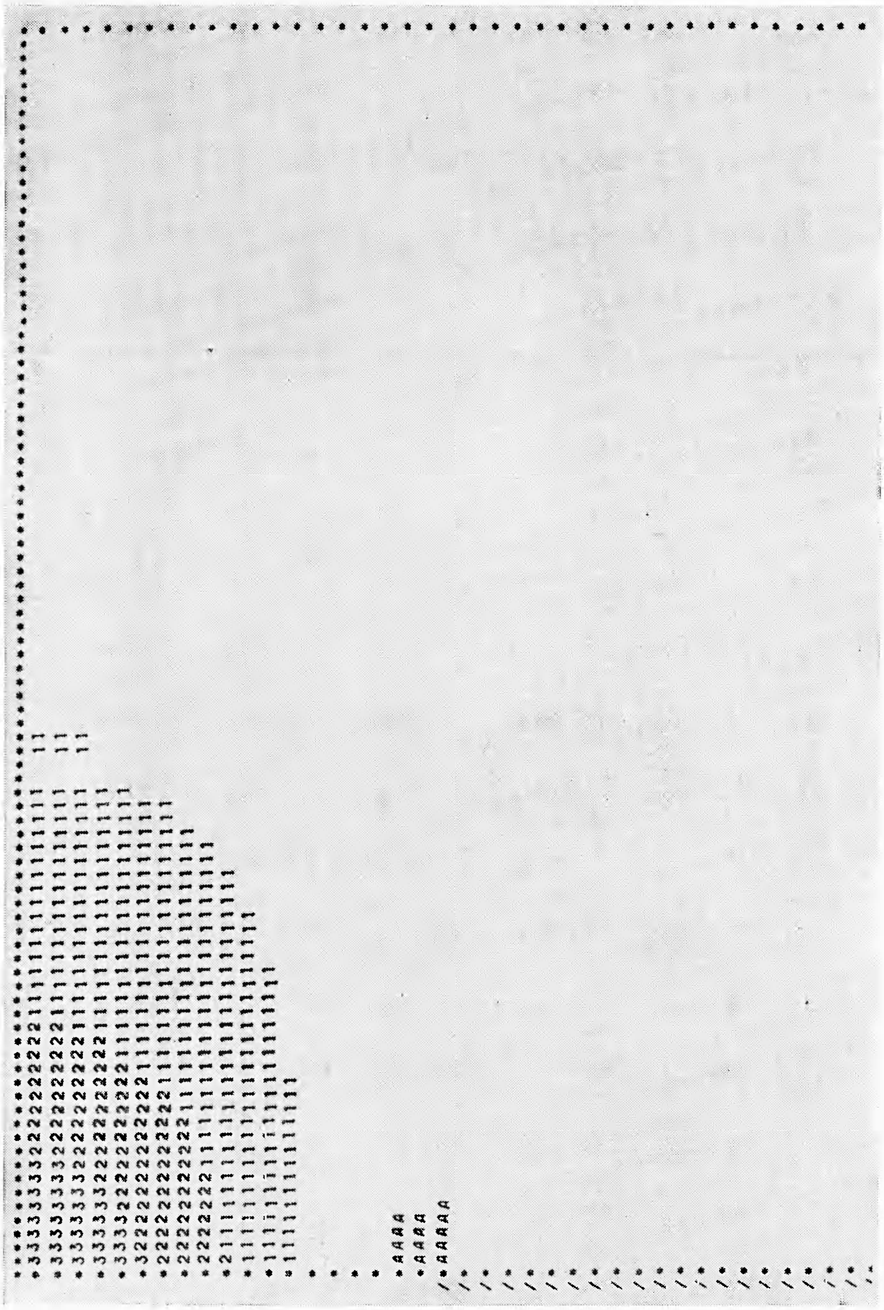
Из (4.2) можно усмотреть, что влияние μ существенно при малых I и падает с ростом I. Аналогично обстоит дело и в динамике. На фиг. 5 изображено $\sigma(t)$ для $I = 1$, $h = 0.05$, $z_0 = R_0 = 2.5$, причем кривая *1* соответствует $\mu = 0.5$, $\rho = 0.1$, кривая *2* — $\mu = 0.3$, $\rho = 0.5$.



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Расчет для $\mu = 0.01$ дал совпадение с кривыми *1* и *2* с ошибкой меньше 0.01. Это значит, что для достаточно жестких пластинок движение близко к одномерному.

Распределение напряжений над пластинкой во времени иллюстрируют фиг. 6—9, где изображено $\sigma_{zz}(r, z)$ в моменты времени $t = 1.0$, 2.0, 3.0, 5.0 для следующей комбинации параметров: $\mu = 0.3$, $I = 0.1$, $\rho =$

$= 0.1$. По оси абсцисс отложено r, по оси ординат — z, стенка отмечена штриховкой. Зоны пониженных напряжений отмечены символами 1, 2, 3, ..., повышенных — символами *А*, *Б*, *В*, *Г*. Переход к следующему символу соответствует изменению σ_{zz} на 0.05. В частности, отсутствие символа означает $\sigma_{zz} = 1 \pm 0.025$; символ *А* означает $\sigma_{zz} = 1.05 \pm 0.025$, символ *1* — $\sigma_{zz} = 0.95 \pm 0.025$ и т. д.

Проводился контроль точности результатов варьированием параметров h, z_0, R_0. Выяснилось, что замена бесконечной области конечной с условиями (2.4) дает незначительный вклад в общую ошибку, которая для рассмотренных вариантов не превышала 0.05.

В заключение автор благодарит участников семинара по динамике сплошной среды Института проблем механики за обсуждение работы.

Поступила 23 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Скобеев А. М. О влиянии измерительного прибора на напряжения в грунте. Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1970.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., Физматгиз, 1965.
3. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Askegaard Vagn. Measurement of pressure between a rigid wall and a compressible medium by means of pressure cells; basie considerations concerning three types of pressure cells. Acta Polytech. Scandinavica, Ser. ci, 1961, No. 11, pp. 1—35.