УДК 532.5

# О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗОБАРИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. М. Зубарев[*,**], Е. Ю. Просвиряков[***]

[*] Институт электрофизики УрО РАН, 620016 Екатеринбург, Россия
[**] Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия
[***] Институт машиноведения УрО РАН, 620049 Екатеринбург, Россия
E-mails: nick@iep.uran.ru, evgen_pros@mail.ru

Исследуется переопределенная система уравнений, описывающая трехмерные слоистые нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости при постоянном давлении. Изучение совместности этой системы позволило свести ее к связанным квазилинейным параболическим уравнениям для компонент скорости. Редуцированные уравнения допускают построение нескольких классов точных решений. В частности, получены полиномиальные и пространственно локализованные автомодельные решения уравнений движения. Исследуется предельный переход к случаю идеальной жидкости.

Ключевые слова: слоистые течения, изобарические течения, точные решения, переопределенная система уравнений, условия совместности.

DOI: 10.15372/PMTF20190607

**Введение.** К числу однонаправленных слоистых изобарических течений можно отнести такие классические течения, как течение Куэтта и течения Стокса двух типов [1, 2]. Соответствующие точные решения часто рассматриваются как решения линейной системы Стокса [1–3], однако они являются также решениями полной системы Навье — Стокса.

В некоторых случаях к исследованию изобарических течений можно свести решение задач о движении жидкости в неинерциальных системах координат, например, рассмотрев течения Экмана и Пуазейля [1, 2]. Использование представления о сдвиговых потоках целесообразно при описании крупномасштабных процессов, происходящих в Мировом океане, и атмосферных явлений [1, 2, 4]. Перечень известных точных решений для слоистых и сдвиговых потоков приведен в [1–4].

Начало систематическому изучению плоских изобарических течений несжимаемой жидкости положено в работе Р. Беркера [5], в которой приведен ряд соответствующих точных решений уравнений Навье — Стокса. Особенность исследования подобных течений заключается в том, что система Навье — Стокса становится переопределенной. В [6] определены условия ее разрешимости и дана классификация точных решений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке УрО РАН (коды проектов 18-1-1-5, 18-2-2-15), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-00430) и в рамках Программы Президиума РАН № 2.

В работе [7] установлена возможность построения точных решений для трехмерных изобарических течений. Полученные решения характеризуются линейной зависимостью компонент скорости от двух координат (относятся к классу Линя [2, 8]).

В настоящей работе исследуется разрешимость переопределенной системы уравнений Навье — Стокса для трехмерных слоистых нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости. Последовательный анализ совместности уравнений движения позволил свести их к двум связанным квазилинейным параболическим уравнениям для компонент скорости. Редуцированные уравнения допускают построение нескольких классов точных нетривиальных решений, включающих в качестве частного случая решения [7], для которых задавалась структура решений из класса Линя.

**1. Уравнения движения жидкости.** Слоистые трехмерные нестационарные изобарические течения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье — Стокса

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\,\frac{\partial V_x}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\Big); \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x\,\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\,\frac{\partial V_y}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\Big), \tag{2}$$

в которых отсутствует слагаемое $\nabla P$, определяющее влияние давления [7]. В (1), (2) $x$, $y$, $z$ — декартовы координаты; $t$ — время; $V_x(x,y,z,t)$, $V_y(x,y,z,t)$ — компоненты вектора скорости (полагается, что $V_z = 0$); $\nu$ — кинематическая вязкость жидкости. Уравнения (1), (2) замыкаются уравнением непрерывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Система (1)–(3) является переопределенной, поскольку требуется из трех уравнений вычислить поле скоростей, задаваемое двумя функциями $V_x$, $V_y$. Заметим, что в частном двумерном случае, когда решение не зависит от координаты $z$, а система (1)–(3) описывает плоские течения жидкости, условия ее разрешимости исследовались в [6]. В трехмерном случае, т. е. когда решение зависит от переменной $z$, анализ условий совместности уравнений значительно усложняется.

**2. Анализ разрешимости.** Исследуем совместность переопределенной нелинейной системы (1)–(3). Дифференцируя (1) по $x$, (2) по $y$ и складывая полученные выражения, после несложных преобразований с использованием уравнения несжимаемости (3) находим условие совместности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}\,\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial y}\,\frac{\partial V_y}{\partial x}, \tag{4}$$

которое превращается в тождество, если между компонентами скорости $V_x$ и $V_y$ имеется функциональная связь:

$$V_y = F(V_x, z, t) \tag{5}$$

($F$ — некоторая функция). Подставляя (5) в уравнения движения (1), (2), находим

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + F\,\frac{\partial V_x}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\Big), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial V_x}\Big(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + F\,\frac{\partial V_x}{\partial y}\Big) = \nu\,\frac{\partial F}{\partial V_x}\Big(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\Big) + {}\\ + \nu\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial V_x^2}\Big(\Big(\frac{\partial V_x}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V_x}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V_x}{\partial z}\Big)^2\Big) + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial V_x\,\partial z}\,\frac{\partial V_x}{\partial z}\Big).\end{aligned} \tag{7}$$

Вычитая из (7) уравнение (6), умноженное на $\partial F/\partial V_x$, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \nu\,\frac{\partial^2 F}{\partial V_x^2}\Big(\Big(\frac{\partial V_x}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V_x}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V_x}{\partial z}\Big)^2\Big) + 2\nu\,\frac{\partial^2 F}{\partial V_x\,\partial z}\,\frac{\partial V_x}{\partial z}. \tag{8}$$

Таким образом, выполнение этого уравнения необходимо для совместности системы (6), (7). Уравнение (8) обращается в тождество, если функция $F$ одновременно удовлетворяет трем условиям

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial V_x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial V_x\,\partial z} = 0. \tag{9}$$

Нетрудно построить совместное решение (условие разрешимости) системы линейных уравнений в частных производных (9) в виде

$$F(V_x, z, t) = kV_x + h(z,t), \tag{10}$$

где $k$ — постоянная; $h$ — функция, удовлетворяющая параболическому уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}.$$

Введем константу (угол) $\theta = \operatorname{arctg} k$ и вспомогательную функцию $V = h\cos\theta$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Из выражения (10) с учетом (5) следует, что компоненты скорости $V_x$, $V_y$ связаны линейным соотношением

$$V_y\cos\theta - V_x\sin\theta = V(z,t). \tag{12}$$

Найдем решения исходной системы (1)–(3), для которых справедливо соотношение (12). Подставляя (5) в условие несжимаемости (3), получаем уравнение

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial V_x}\,\frac{\partial V_x}{\partial y} = 0,$$

или с учетом решения (10) системы (9) уравнение

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial V_x}{\partial y}\sin\theta = 0.$$

Общее решение этого линейного уравнения в частных производных первого порядка можно записать в виде

$$V_x = Q(\xi, z, t)\cos\theta, \qquad \xi = y\cos\theta - x\sin\theta, \tag{13}$$

где $Q$ — некоторая функция. При подстановке (10), (13) в (6) получаем, что функция $Q$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + V\,\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \nu\Big(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\Big). \tag{14}$$

Итак, исходная (3+1)-мерная переопределенная система уравнений (1)–(3) сводится к паре (2+1)-мерных уравнений (11), (14) для функций $V$ и $Q$.

Введем вместо $Q$ новую функцию $U$

$$U(\xi, z, t) = Q(\xi, z, t) + V(z,t)\operatorname{tg}\theta.$$

В силу (5), (10), (13) с использованием этой функции решение системы уравнений (1)–(3), обеспечивающее ее совместность, записывается в симметричном виде

$$V_x = U(\xi, z, t)\cos\theta - V(z, t)\sin\theta, \qquad V_y = U(\xi, z, t)\sin\theta + V(z, t)\cos\theta, \tag{15}$$

где $U$, $V$ — функции, удовлетворяющие следующей системе квазилинейных параболических уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V\,\frac{\partial U}{\partial \xi} = \nu\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\Big), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{16}$$

Таким образом, анализ условий совместности переопределенной системы (1)–(3), описывающей слоистые трехмерные нестационарные изобарические течения вязкой несжимаемой жидкости, позволяет получить широкий класс ее решений, задаваемый уравнениями (15), (16).

Следует отметить, что в работе [7], в которой впервые рассматривалась система (1)–(3), найдено частное решение этой системы с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных $x$ и $y$ [9, 10]:

$$V_x = [u(z,t) + \xi v(z,t)]\cos\theta - V(z,t)\sin\theta, \qquad V_y = [u(z,t) + \xi v(z,t)]\sin\theta + V(z,t)\cos\theta. \tag{17}$$

Решение (17) является частным случаем (15), соответствующим следующему представлению функции $U$:

$$U(\xi, z, t) = u(z,t) + \xi v(z,t)$$

($u$, $v$ — вспомогательные функции).

**3. Полиномиальные решения.** Найдем точные решения системы (16), обобщающие решение (17) на случай произвольных степеней пространственных переменных $x$ и $y$ (с учетом (13) — на случай произвольных степеней $\xi$).

Не теряя общности, в (15) можно положить $\theta = 0$ (изменение угла $\theta$ соответствует повороту в плоскости $\{x, y\}$). Тогда $\xi = y$, а редуцированная система (15) принимает вид

$$V_x = U(y, z, t), \qquad V_y = V(z, t), \tag{18}$$

т. е. при $\theta = 0$ функции $U$ и $V$ играют роль компонент скорости $V_x$ и $V_y$ соответственно. Согласно (16) эти функции удовлетворяют квазилинейной системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V\,\frac{\partial U}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\Big), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{19}$$

Решение для скорости $U$ будем искать в виде полинома степени $N$ по переменной $y$, т. е. для компонент скорости принимаем

$$V_x = U(y, z, t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(z,t)\,\frac{y^n}{n!}, \qquad V_y = V(z, t). \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), находим, что неизвестные функции $u_n$ вычисляются из рекуррентной системы уравнений

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + V u_{n+1} = \nu\Big(u_{n+2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\Big), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-2; \tag{21}$$

$$\frac{\partial u_{N-1}}{\partial t} + V u_N = \nu\,\frac{\partial^2 u_{N-1}}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial u_N}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 u_N}{\partial z^2}. \tag{22}$$

Таким образом, представление скоростей (20) позволяет понизить размерность исследуемых параболических уравнений с $(2+1)$ до $(1+1)$.

Заметим, что решение (17) является частным случаем представления (20), соответствующим простому случаю $N = 1$. Выражения (20) задают полиномиальный класс решений исходной задачи (1)–(3), обобщающий точные решения [7]. В рамках этого класса решений можно построить стационарные решения задачи. Стационарное решение уравнения для функции $V$ имеет вид

$$V_y = V = cz + c', \tag{23}$$

где $c$, $c'$ — постоянные. Подставляя выражение (23) в (21), (22), находим, что если решение для $V_x$ ищется в виде полинома степени $N$ по переменной $y$, то по переменной $z$ оно является полиномом степени $3N + 1$. Соответствующие течения при достаточно больших значениях $N$ имеют сложную структуру. Очевидно, что при увеличении числа слагаемых в решении (20) увеличивается число нулевых значений скорости $V_x$, которые определяют точки покоя. Как следствие происходит расслоение потока на области с различными направлениями движения жидкости.

**4. Частные локализованные решения.** Рассмотрим решения рассматриваемой задачи (1)–(3) другого типа (которые невозможно представить в виде полинома по переменной $y$). Пусть компонента скорости $V_y$ описывается стационарным решением (23), в котором, не теряя общности, можно положить $c' = 0$. Тогда для скоростей $U$ и $V$ имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} + cz\,\frac{\partial U}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\Big), \qquad V = cz.$$

Нестационарное (2+1)-мерное уравнение для определения функции $U$ можно редуцировать к $(1 + 1)$-мерному уравнению путем следующей подстановки:

$$U = U(\eta, \tau), \qquad \eta = y - czt, \qquad \tau = t + c^2t^3/3.$$

Эволюция компоненты скорости $V_x = U$ в новых переменных $\eta$ и $\tau$ описывается уравнением типа уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \nu\,\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}. \tag{24}$$

Рассмотрим частное автомодельное решение уравнения (24)

$$U = \operatorname{erf}\Big(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu\tau}}\Big), \qquad \tau > 0,$$

для которого скорость $U$ в областях $\eta \to \mp\infty$ стремится к значениям $\mp 1$, т. е. жидкость движется в разных направлениях. Граница между областями течений с различным направлением задается условием $\eta = 0$. Переходная зона локализована и имеет ширину $\sim\sqrt{\nu\tau}$. В исходных переменных $y$, $z$, $t$ распределение скорости задается выражением

$$U = \operatorname{erf}\Big(\frac{y - czt}{2\sqrt{\nu t(1 + c^2t^2/3)}}\Big).$$

Рассмотрим поведение во времени производной скорости $U$ в вертикальном направлении, имеющей смысл $y$-компоненты завихренности:

$$\Omega_y = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{ct}{\sqrt{\pi\nu t(1 + c^2t^2/3)}}\exp\Big(-\frac{(y - czt)^2}{4\nu t(1 + c^2t^2/3)}\Big).$$

Максимальное значение этой производной $\Omega_{\max}$ для заданного момента времени $t$ реализуется при $y = czt$ (т. е. при $\eta = 0$):

$$\Omega_{\max}(t) \equiv |\Omega_y|_{y=czt} = ct\Big/\sqrt{\pi\nu t(1 + c^2t^2/3)}.$$

Заметим, что временная зависимость завихренности является немонотонной. При малых значениях $t$ завихренность увеличивается по степенному закону $t^{1/2}$, что обусловлено сдвиговым характером течения: слои жидкости движутся с различной скоростью. При больших значениях времени, наоборот, $\Omega_{\max}$ уменьшается по закону $t^{-1/2}$, что можно объяснить влиянием диссипативных процессов в неидеальной жидкости. Максимального значения $\Omega_{\max} = \sqrt{3^{1/2}c/(2\pi\nu)}$ завихренность достигает в момент $t = \sqrt{3}/c$.

Следует отметить, что рассмотренное частное автомодельное решение впервые описано В. В. Пухначевым в работе [11], в которой оно выводилось другим способом — с использованием методики Л. В. Овсянникова построения инвариантных решений систем дифференциальных уравнений [12].

**5. Предельный случай идеальной жидкости.** Для редуцированной системы (15) рассмотрим предельный переход к идеальной жидкости ($\nu \to 0$). При нулевой вязкости система уравнений (16) записывается в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V\,\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

и не содержит в явном виде переменную $z$. Общее решение этой системы, являющейся редуцированной системой уравнений Эйлера движения идеальной жидкости, имеет вид

$$U = U(\xi - V(z)t, z), \qquad V = V(z). \tag{25}$$

С учетом (18) решение (25) описывает слоистое течение идеальной жидкости, для которого течения в различных слоях (по координате $z$) являются независимыми.

**6. Условие совместности в терминах функции тока.** Рассмотрим одно из условий совместности (4) исходной переопределенной системы (1)–(3). Введем скалярную функцию тока $\psi = \psi(x, y, z, t)$:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{26}$$

Представление (26) автоматически обеспечивает выполнение условия несжимаемости жидкости (3). При использовании (26) условие (4) принимает вид однородного уравнения Монжа — Ампера

$$\Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}\Big)^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \tag{27}$$

Для нелинейного уравнения (27) известно общее решение, которое записывается в параметрической форме и включает две произвольные функции [13]:

$$\psi = \alpha x + f(\alpha, z, t)y + g(\alpha, z, t), \qquad x + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,y + \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0 \tag{28}$$

($\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ — функциональный параметр). Переменные $z$, $t$, не входящие в (27) в явном виде, включаются в решение (28) в качестве параметров. Заметим, что полученному решению (15) соответствует функция тока в виде

$$\psi = h(a_1(z,t)x + a_2(z,t)y, z, t) + a_3(z,t)x + a_4(z,t)y + a_5(z,t). \tag{29}$$

Выражение (29) является частным (содержащим единственную произвольную функцию $h$ переменных $x$, $y$) решением однородного уравнения Монжа — Ампера. Рассматриваемый подход можно также использовать при построении точных решений модифицированной системы уравнений Навье — Стокса для исследования конвективных [14], термодиффузионных [15] и магнитогидродинамических [16, 17] течений.

**Заключение.** В работе проведен анализ переопределенной системы уравнений Навье — Стокса, описывающей трехмерные слоистые нестационарные изобарические течения вязкой несжимаемой жидкости. Показано, что для обеспечения совместности этой системы компоненты скорости жидкости должны быть связаны парой квазилинейных параболических уравнений. Все полученные ранее решения задачи описываются в рамках подобной редукции.

Авторы выражают благодарность В. В. Пухначеву за интерес к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Drazin P. G.** The Navier — Stokes equations: A classification of flows and exact solutions / P. G. Drazin, N. Riley. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
2. **Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д.** Точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
3. **Пухначев В. В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6–76.
4. **Аристов С. Н.** Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости / С. Н. Аристов, К. Г. Шварц. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006.
5. **Berker R.** Sur quelques cas d'intégration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Paris; Lille: Taffin-Lefort, 1936.
6. **Шмыглевский Ю. Д.** Об изобарических плоских течениях вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 12. С. 1895–1898.
7. **Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю.** Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182.
8. **Lin C. C.** Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 391–395.
9. **Зубарев Н. М., Карабут Е. А.** Точные локальные решения для формирования особенностей на свободной поверхности идеальной жидкости // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107. С. 434–439.
10. **Агафонцев Д. С., Кузнецов Е. А., Майлыбаев А. А.** Развитие структур высокой завихренности в несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера: влияние начальных условий // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 104. С. 695–700.
11. **Пухначев В. В.** Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1969. Ч. 1.
12. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
13. **Polyanin A. D.** Handbook of nonlinear partial differential equations / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. Boca Raton; L.: Chapman and Hall/CRC Press, 2012.
14. **Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю.** Неоднородное конвективное течение Куэтта // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 3–9.
15. **Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю.** Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теорет. основы хим. технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 294–301.
16. **Волков Н. Б., Зубарев Н. М.** Модель начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода в токонесущей плазмоподобной среде // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1995. Т. 107, № 6. С. 1868–1876.
17. **Iskoldsky A. M., Volkov N. B., Zubarev N. M.** A model of the stratification of a liquid current-carrying conductor // Phys. Lett. A. 1996. V. 217, iss. 6. P. 330–334.

*Поступила в редакцию 5/III 2019 г.,*
*после доработки — 20/V 2019 г.*
*Принята к публикации 27/V 2019 г.*