ПМТФ, № 3, 1972

УДК 538.4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ОМА

И. М. Руткевич

(Москва)

Исследуются закономерности распространения и развития малых возмущений нелинейно проводящих средах.

Известно, что в некоторых средах, например в неравновесной плазме [1] и полупроводниках [2], имеет место нелинейная связь между плотностью тока j и электрическим полем E. Эта связь обычно устанавливается из рассмотрения кинетики носителей тока или из экспериментов.

Одним из возможных подходов к описанию электрических явлений в нелинейных проводниках является прямое введение модельной зависимости j (E) в систему электродинамических уравнений. Такая зависимость трактуется как заданное материальное уравнение среды, замыкающее систему уравнений Максвелла. Указанный подход был использован в ряде работ [3-8] и, по-видимому, будет развиваться в дальнейшем.

Введение нелинейного закона Ома вносит дополнительные трудности в процедуру решения стационарных задач, связанные не только с нелинейностью исходных уравнений, но и с возможностью изменения типа этих уравнений [3] в областях, отвечающих падающему участку на вольт-амперной характеристике $j = j\,(E)$. Последнее обстоятельство может приводить к неустойчивости стационарного состояния [4].

Неустойчивость однородных стационарных распределений тока при отрицательной дифференциальной проводимости ($\sigma_d = dj\,/\,dE < 0$) неоднократно обсуждалась в литературе (см., например, обзор [2]). При этом анализ малых возмущений проводился на основе системы уравнений поля и различных частных случаев уравнений кинетики носителей тока. Из-за громоздкости системы обычно удавалось строго рассмотреть только потенциальные возмущения электрического поля. Использование модельной характеристики j (E) позволяет более детально изучить картину распространения всевозможных электромагнитных возмущений и начальную стадию развития неустойчивости независимо от механизма нелинейной проводимости.

В данной работе рассмотрены явления анизотропии в распространении малых возмущений и различные типы волн в нелинейно проводящих средах. Найдены критерии затухания во времени произвольно ориентированных гармоник начальных флуктуаций, возникающих на фоне однородного распределения тока в безграничном пространстве. Определены также критерии затухания амплитуд гармонических колебаний вдоль направлений распространения волн.

Дана постановка задачи об устойчивости в случае ограниченной области. Для однородного токового состояния построен пример нарастающих вихревых возмущений в случае $\sigma_d < 0$. Энергетическим методом доказана асимптотическая устойчивость неоднородных распределений тока при $\sigma_d > 0$. Рассмотрен вопрос о существовании связи условий устойчивости с экстремальным принципом минимума джоулевой диссипации. Показано, что для нелинейно проводящей среды этот принцип неадекватен условию устойчивости даже в сравнительно простом случае, рассмотренном в работе [9].

1. Анализ дисперсионных уравнений и различных типов возмущений. Будем рассматривать неподвижные проводники с близкими к единице значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Система электродинамических уравнений имеет в этом случае вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{H}\,/\,\partial t, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi c^{-1}\mathbf{j} + c^{-1}\partial\mathbf{E}\,/\,\partial t \qquad (1.1)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\,(E)\,\mathbf{E}$$

Запись закона Ома в последнем уравнении (1.1) предполагает однозначную зависимость j (E), что соответствует монотонной или N-образной вольт-амперной характеристике. Будем рассматривать возмущения однородного состояния, которое характеризуется заданной точкой (E_0, j_0) на этой кривой. В случае, когда характеристика является S-образной, т. е. зависимость $j(E)$ неоднозначна, при анализе малых возмущений следует рассматривать ту однозначную ветвь, которая содержит точку (E_0, j_0). Следует только предположить, что исследуемая точка не соединяет две однозначные ветви.

Использование закона Ома в форме (1.1) при описании нестационарных процессов основано на ряде упрощающих предположений о динамике электронного газа. В частности, должны быть выполнены условия

$$\omega \ll \nu_e, \qquad \omega_e \ll \nu_e \tag{1.2}$$

Здесь ω — характерная частота процесса, ν_e — эффективная частота столкновений электронов, ω_e — ларморовская частота. При нарушении первого из неравенств (1.2) нужно учитывать инерцию электронов, при нарушении второго неравенства — эффект Холла. В уравнениях Максвелла удержан ток смещения, влияние которого может быть ощутимым при $\omega \gtrsim 4\pi\sigma$. Диапазон частот, для которых последнее неравенство совместимо с условием $\omega \ll \nu_e$, может существовать при достаточно низкой проводимости среды, например в случае малой степени ионизации.

Рассмотрим однородное стационарное состояние среды

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \text{const}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 = \sigma(E_0)\,\mathbf{E}_0 = \text{const} \tag{1.3}$$

Состояние (1.3) характеризуется неоднородным магнитным полем вида

$$\mathbf{H}_0 = 2\pi c^{-1}(\mathbf{j}_0 \times \mathbf{x}) + \nabla\Phi$$

где Φ — произвольная гармоническая функция. В случае безграничного токового пространства поле $\mathbf{H}_0$ неограниченно при $|\mathbf{x}| \to \infty$ независимо от выбора «потенциала» Φ.

В этом пункте рассматриваются возмущения во всем пространстве. Результаты проводимого ниже анализа будут качественно отражать поведение возмущений в конечной области вдали от границы при условии, что характерные линейные размеры области значительно превышают масштаб флуктуаций.

Малые возмущения, наложенные на произвольное неоднородное стационарное состояние, удовлетворяют следующей линейной системе

$$\text{rot}\,\delta\mathbf{E} = -\,c^{-1}\partial\delta\mathbf{H}/\partial t, \qquad \text{rot}\,\delta\mathbf{H} = 4\pi c^{-1}\delta\mathbf{j} + c^{-1}\partial\delta\mathbf{E}/\partial t$$

$$\delta\mathbf{j} = \sigma_d(\mathbf{l}\delta\mathbf{E})\,\mathbf{l} + \sigma(\delta\mathbf{E} - (\mathbf{l}\delta\mathbf{E})\,\mathbf{l}) \equiv \sigma_d\delta\mathbf{E}_\parallel + \sigma\delta\mathbf{E}_\perp \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{l}$ — единичный вектор, направленный по невозмущенному электрическому полю $\mathbf{E}_0 = \mathrm{E}_0\mathbf{l}$, а векторы $\delta\mathbf{E}_\parallel$ и $\delta\mathbf{E}_\perp$ определяются как параллельная и перпендикулярная вектору $\mathbf{E}_0$ составляющие возмущения $\delta\mathbf{E}$. Обычная проводимость σ и дифференциальная проводимость $\sigma_d = dj/dE$ в уравнениях (1.4) берутся по невозмущенному состоянию. В случае однородного состояния (1.3) эти величины постоянны. В систему (1.4) не включено уравнение $\text{div}\,\delta\mathbf{H} = 0$, играющее роль начального условия, и уравнение $\text{div}\,\delta\mathbf{E} = 4\pi\delta\rho_e$, которое служит для определения флуктуации плотности заряда. Вследствие нелинейного характера закона Ома связь между малыми возмущениями $\delta\mathbf{j}$ и $\delta\mathbf{E}$ оказывается тензорной. Последнее уравнение (1.4) может быть записано в виде $\delta\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{E}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — симметричный тензор второго ранга. При $\sigma_d \neq \sigma$ «закон Ома» для возмущений характеризуется специфической анизотропией проводимости.

Вследствие симметрии тензора $\boldsymbol{\sigma}$ всегда существуют возмущения $\delta\mathbf{E}$, для которых $\delta\mathbf{j} \parallel \delta\mathbf{E}$ (в отличие от случая, когда анизотропия проводимости обусловлена эффектом Холла). Любой декартов базис $\mathbf{e}_i$, такой что $\mathbf{e}_1 = \mathbf{l}$, образует систему главных осей тензора $\boldsymbol{\sigma}$. В этом базисе отличны от нуля только диагональные элементы матрицы $\|\sigma_{ij}\|$, причем

$$\sigma_{11} = \sigma_d, \qquad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma$$

В случае однородного стационарног› состояния (1.3) будем рассматривать произвольно ориентированные одномерные возмущения вида

$$(\delta \mathbf{E},\ \delta \mathbf{j},\ \delta \mathbf{H}) = \mathrm{Re}\{(\mathbf{E}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{H}')\, e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)}\} \tag{1.5}$$

В (1.5) комплексные амплитуды $\mathbf{E}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{H}'$ постоянны. Волновой вектор $\mathbf{k}$ и частота ω в общем случае будут комплексными. Заметим только, что из требования одномерности возмущений следует: $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — вещественный единичный вектор, k — комплексное число. Подстановка экспоненциальных решений (1.5) в систему (1.4) приводит к однородной алгебраической системе

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}' = i\varkappa^{-1}\xi\mathbf{H}'$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}' = -i\varkappa^{-1}[(1+\xi)\mathbf{E}' + (\lambda-1)(\mathbf{l}\mathbf{E}')\mathbf{l}] \tag{1.6}$$

$$(\xi = -i\omega/4\pi\sigma,\ \varkappa = ck/4\pi\sigma,\ \lambda = \sigma_d/\sigma = d\ln j/d\ln E)$$

Дисперсионное уравнение, отвечающее системе (1.6), имеет вид

$$\xi P_2(\xi)\, P_3(\xi) = 0$$

$$P_2(\xi) = \xi^2 + \xi + \varkappa^2,\quad P_3(\xi) = \xi^3 + (1+\lambda)\,\xi^2 + (\lambda+\varkappa^2)\,\xi + + \varkappa^2(\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha) \tag{1.7}$$

Здесь α — угол между векторами $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{n}$. При $\lambda \neq 1$ корни полинома $P_3(\xi)$ будут зависеть от угла α. Поэтому при несовпадении истинной и дифференциальной проводимостей наряду с анизотропной связью между векторами $\delta\mathbf{j}$ и $\delta\mathbf{E}$ возникает анизотропия в распространении малых возмущений.

Заметим, что корень $\xi = 0$ уравнения (1.7) должен быть отброшен, так как ему отвечает нетривиальное решение $\mathbf{E}' = 0$, $\mathbf{H}' = H'\mathbf{n} \neq 0$, несовместимое при $\varkappa \neq 0$ с требованием $\operatorname{div}\delta\mathbf{H} = 0$. Представляющие интерес типы возмущений определяются корнями полиномов $P_2(\xi)$ и $P_3(\xi)$.

Изучим сначала вопрос об устойчивости состояния (1.3), рассматривая комплексную функцию $\omega(\mathbf{k})$ при вещественных значениях аргумента. Функция $\omega(\mathbf{k})$ многозначна, и каждая из ее однозначных ветвей $\omega_p(\mathbf{k})$ отвечает одному из корней ξ_p уравнения (1.7). Требование устойчивости состоит в выполнении для всех вещественных $\mathbf{k}$ условий

$$\mathrm{Im}\,\omega_p(\mathbf{k}) < 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, 5) \tag{1.8}$$

Стационарное состояние будет неустойчивым, если при каком-нибудь вещественном $\mathbf{k}_0$ хотя бы одно из значений $\omega_p(\mathbf{k}_0)$ попадет в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\omega > 0$.

Поскольку $\xi = -i\omega/4\pi\sigma$ и $\sigma > 0$, то условия устойчивости равносильны требованиям $\mathrm{Re}\,\xi_p < 0$ для любых вещественных $\varkappa = ck/4\pi\sigma$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

Корни многочлена $P_2(\xi)$ имеют вид

$$\xi_{1,2} = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4\varkappa^2}) \tag{1.9}$$

Из (1.9) для всех вещественных $\varkappa$ следует:

$$\mathrm{Re}\,\xi_1 < 0,\qquad \mathrm{Re}\,\xi_2 \leqslant 0$$

При $\varkappa \neq 0$ этим корням отвечают поперечные волны, в которых $\delta\mathbf{E} \parallel (\mathbf{n}\times\mathbf{l})$, $\delta\mathbf{H} \parallel (\mathbf{n}\times\delta\mathbf{E})$. Параллельность вектора $\delta\mathbf{E}$ определенному направлению отличает эти возмущения от поперечных волн в среде с линейным законом Ома, где $\delta\mathbf{E}$ может иметь любое направление в плоскости волнового фронта. В нелинейном проводнике при $\lambda \neq 1$ эллиптическая поляризация возмущений оказывается возможной только для направлений $\mathbf{n} = \pm\mathbf{l}$. Здесь обнаруживается некоторое сходство с поведением электромагнитных волн в одноосных кристаллах.

При $\varkappa = 0$ корню ξ_1 отвечает решение с $\delta H = 0$ и однородным возмущением δE, затухающим за классическое время $1/4\pi\sigma$. Корень ξ_2 при $\varkappa = 0$ обращается в нуль, и ему соответствует решение $\delta E = 0$, $\delta H = \mathrm{const}$. Таким образом, возмущения, связанные с корнями многочлена $P_2(\xi)$, не приводят к неустойчивости.

Заметим, что сами значения корней $\xi_{1,2}$ получаются такими же, как и в случае линейно проводящей среды, где каждый из этих корней является двукратным.

Новые, по сравнению с классическими, ветви функции $\omega(\mathbf{k})$ могут отвечать корням многочлена $P_3(\xi)$. Поскольку этот многочлен инвариантен относительно замены α на $\pi - \alpha$, то достаточно рассмотреть значения $0 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2\pi$. При произвольных значениях α аналитические выражения для корней будут трудно обозримыми. Поэтому ниже приведем решения для двух предельных случаев ($\alpha = 0$ и $\alpha = {}^1/_2\pi$), а для промежуточных значений углов ограничимся строгим качественным анализом.

В случае $\alpha = 0$ корни многочлена $P_3(\xi)$ имеют вид

$$\xi_3 = \xi_1, \quad \xi_4 = \xi_2, \quad \xi_5 = -\lambda$$

где ξ_1 и ξ_2 определены в (1.9). Сдвоенным корням ξ_3 и ξ_4 соответствуют затухающие поперечные волны с эллиптической или произвольной линейной поляризацией. Корню ξ_5 отвечает стоячая продольная волна: $\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$, $\delta H = 0$, нарастающая во времени при $\lambda < 0$ и затухающая при $\lambda > 0$.

При $\alpha = {}^1/_2\pi$ получим следующие выражения для корней:

$$\xi_{3,4} = -{}^1/_2\lambda\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\varkappa^2/\lambda^2}\right), \quad \xi_5 = -1$$

Корням $\xi_{3,4}$ при $\varkappa \neq 0$ соответствуют линейно поляризованные поперечные волны ($\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{l}$, $\delta\mathbf{H} \parallel (\mathbf{n} \times \mathbf{l})$), нарастающие при $\lambda < 0$ и затухающие при $\lambda > 0$. Корню ξ_5 отвечает затухающая за время $1/4\pi\sigma$ стоячая продольная волна ($\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$, $\delta H = 0$).

Таким образом, вывод о неустойчивости состояния (1.3) при $\sigma_d < 0$ следует уже из рассмотренных предельных случаев. Нарастающие возмущения $\delta\mathbf{E}$ могут быть как потенциальными, так и вихревыми. Характерно, что в приведенных выше примерах нарастающих волн вектор $\delta\mathbf{E}$ параллелен стационарному полю $\mathbf{E}_0$. Наличие нарастающих стоячих волн в случае $\sigma_d < 0$ позволяет утверждать, что неустойчивость является абсолютной (по терминологии, предложенной в [10]). К аналогичному выводу можно прийти на основании общих критериев, обзор которых дан в работе [11].

Теперь следует выяснить, гарантирует ли условие $\sigma_d > 0$ выполнение неравенств (1.8) при произвольных вещественных $\mathbf{k}$. Кроме того, представляет интерес обнаружение области значений волнового вектора, в которой флуктуации будут затухать даже при отрицательных σ_d.

Каким бы ни был знак σ_d, возмущения, связанные с корнями многочлена $P_2(\xi)$, не могут быть нарастающими. Поэтому для ответа на поставленные вопросы нужно указать необходимые и достаточные условия, при которых все корни многочлена $P_3(\xi)$ лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\xi < 0$. При действительных $\varkappa$ многочлен $P_3(\xi)$ имеет действительные коэффициенты. Поэтому удобно применить критерий устойчивости Рауса — Гурвица [12], сводящийся к следующим неравенствам:

$$1 + \lambda > 0, \quad \varkappa^2(\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha) > 0 \qquad (1.10)$$
$$\lambda(1 + \lambda) + \varkappa^2(\cos^2\alpha + \lambda\sin^2\alpha) > 0$$

Из (1.10) следует, что при $\lambda > 0$ и $\varkappa \neq 0$ любые возмущения вида (1.5) затухают во времени. При $\lambda > 0$, $\varkappa = 0$ один из корней полинома $P_3(\xi)$ равен нулю, а два других отрицательны. Нулевому корню отвечает «нейтральное» возмущение $\delta H = \mathrm{const}$, $\delta\mathbf{E} = 0$. Таким образом, состояние

(1.3) при $\sigma_d > 0$ устойчиво по отношению к любым синусоидальным возмущениям.

При $\sigma_d < 0$ область значений волнового вектора $\mathbf{k}$, для которых все возмущения будут затухающими, существует при выполнении следующих условий:

$$|\lambda| < \min(1, \varkappa^2), \quad \alpha_- < \alpha < \alpha_+ \quad (\pi - \alpha_+ < \alpha < \pi - \alpha_-) \qquad (1.11)$$
$$\alpha_- = \operatorname{arc\,tg}(|\lambda|^{1/2}), \quad \alpha_+ = \operatorname{arc\,tg}\{(\varkappa^2 - |\lambda| + \lambda^2)^{1/2} |\lambda|^{-1/2} (1 - |\lambda| + \varkappa^2)^{-1/2}\}$$

Из (1.11) заключаем, что при $|\sigma_d| < \sigma$ для достаточно коротких волн ($k^2 > k_0^2 = 16\pi^2\sigma|\sigma_d|$) существует область направлений волновых векторов M, в которой все возмущения гасятся со временем. Область M заключена между двумя круговыми конусами с углами раскрытия α_+ и α_- и общей осью, направленной по стационарному полю $\mathbf{E}_0$. При $\lambda \to 0$ будет $\alpha_- \to 0$, $\alpha_+ \to {}^1/_2\pi$, так что нарастать могут только длинные волны ($k^2 < k_0^2$), зависящие от направлений вблизи общей оси конусов и вблизи плоскости, ортогональной этой оси. При увеличении $|\lambda|$ поле устойчивых направлений сужается, исчезая при $\lambda = -1$, когда происходит слияние обеих границ области M с конической поверхностью $\alpha = {}^1/_4\pi$.

Отметим следующую особенность нетривиальных решений системы (1.6), отвечающих корням полинома $P_3(\xi)$ при $\sin 2\alpha \neq 0$. В волнах, описываемых этими решениями, $\mathbf{n}\delta\mathbf{E} \neq 0$ и $\mathbf{n} \times \delta\mathbf{E} \neq 0$. Следовательно, по отношению к возмущениям электрического поля такие волны не будут строго продольными или строго поперечными. (Исключение представляет случай, возможный при $\lambda < 0$, когда $\operatorname{tg}^2\alpha = -\lambda$. В этом случае один из корней полинома $P_3(\xi)$ обращается в нуль и ему отвечает стационарное возмущение $\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$, $\delta\mathbf{H} \parallel (\mathbf{n} \times \mathbf{l})$.)

При неучете токов смещения система (1.4) становится неэволюционной в случае $\sigma_d < 0$. Соответствующий пример построен в [4], где указано также на возможность ограничения скорости нарастания коротковолновых возмущений за счет токов смещения. Требование эволюционности означает, что все функции $\omega_p(\mathbf{k})$ должны при $k \to \infty$ удовлетворять неравенствам

$$\operatorname{Im}\omega_p(\mathbf{k}) < \mathrm{const} \qquad (1.12)$$

Оценки для $\operatorname{Im}\omega_p(\mathbf{k})$ в случае произвольно ориентированных возмущений в [4] не проводились. Такие оценки можно получить из рассмотрения дисперсионного уравнения (1.7). Функции $\omega_{1,2}(\mathbf{k})$, отвечающие корням $\xi_{1,2}$, заведомо удовлетворяют требованиям (1.12), так как всегда имеют неположительные мнимые части. Для функций $\omega_p(\mathbf{k})$, отвечающих корням многочлена $P_3(\xi)$, имеет место следующая асимптотика при $k \to \infty$.

$$\omega_{3,4}(\mathbf{k}) = \pm ck - 2\pi\sigma(\cos^2\alpha + \lambda\sin^2\alpha)\,i + O(k^{-1})$$
$$\omega_5(\mathbf{k}) = -4\pi\sigma(\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha)\,i + O(k^{-1})$$

Поэтому неравенства (1.12) выполняются для всех ветвей функции $\omega(\mathbf{k})$, что позволяет сделать вывод об эволюционности системы (1.4) при произвольном знаке дифференциальной проводимости.

С рассмотренной выше задачей об устойчивости тесно связан вопрос о возможности усиления колебаний, наложенных на стационарное состояние (1.3). Физическая постановка задачи об усилении колебаний состоит в выяснении условий, при которых волны, распространяющиеся от источника осцилляций, будут нарастать в пространстве с проходимым расстоянием. Для нахождения таких условий следует рассмотреть все ветви k_p многозначной функции $k(\omega, \alpha)$ при вещественных ω. Условие затухания гармонических колебаний в пространстве состоит в выполнении при всех вещественных $\omega \neq 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2\pi$ неравенств

$$\omega \operatorname{Re} k_p \operatorname{Im} k_p > 0 \qquad (1.13)$$

для всех функций k_p (ω, α). При выполнении требований (1.13) амплитуды бегущих волн затухают в направлении фазовой скорости $\mathbf{v} = (\omega / \operatorname{Re} k)\,\mathbf{n}$.

Для плоских волн вида (1.5) с вещественным значением ω рассмотрим вектор потока энергии, осредненный по времени за период колебаний $T = 2\pi / \omega$

$$\mathbf{s} = T^{-1} \int\limits_t^{t+T} \frac{c}{4\pi} (\delta \mathbf{E} \times \delta \mathbf{H})\, dt = \frac{c}{16\pi} (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}_*' + \mathbf{E}_*' \times \mathbf{H}') \tag{1.14}$$

Здесь звездочка означает операцию комплексного сопряжения. Требования (1.13) физически обоснованы, если затухание амплитуды колебаний в направлении $\mathbf{v}$ равносильно затуханию ее в направлении переноса энергии, т. е. при условии $\mathbf{vs} > 0$. Последнее условие действительно выполняется, так как из (1.14) и первого уравнения (1.6) следует:

$$\mathbf{s} = (16\pi\omega)^{-1} c^2 [(k + k_*) (\mathbf{E}'\mathbf{E}_*')\, \mathbf{n} - k_* (\mathbf{E}'\mathbf{n})\, \mathbf{E}_*' - k (\mathbf{E}_*'\mathbf{n})\, \mathbf{E}']$$

$$\mathbf{vs} = (8\pi)^{-1} c^2 (|\mathbf{E}'|^2 - |\mathbf{E}'\mathbf{n}|^2) \geqslant 0$$

Для линейных электромагнитных волн в анизотропной среде условие $\mathbf{vs} \geqslant 0$ было получено в работе [13]. По существу вывод этого результата опирается только на первое уравнение (1.4) и предположение о параллельности векторов $\operatorname{Re} \mathbf{k}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{k}$. В нелинейном проводнике волны малой амплитуды, имеющие фазовую скорость, не могут быть чисто продольными, так что величина $\mathbf{vs}$ оказывается строго положительной.

Используя тождество

$$\operatorname{Re} k \operatorname{Im} k = {}^1/_2 \operatorname{Im} k^2$$

приведем неравенства (1.13) к более удобному виду

$$\Omega \operatorname{Im} \varkappa_p^2 > 0 \tag{1.15}$$

$$(\Omega = \omega/4\pi\sigma, \ \varkappa_p^2 = c^2 k_p^2/16\pi^2\sigma^2)$$

Из дисперсионного уравнения (1.7) определяются два возможных значения $\varkappa^2$: $\varkappa_1^2$ — из условия $P_2(\xi; \varkappa^2) = 0$, $\varkappa^2_2$ — из условия $P_3(\xi; \varkappa^2, \alpha) = 0$, где $\xi = -i\Omega$. Для величины $\Omega\varkappa^2_1$ получим выражение

$$\Omega\varkappa_1^2 = \Omega^3 + i\Omega^2$$

удовлетворяющее неравенству (1.15). Величина $\Omega\varkappa_2^2$ определяется формулой

$$\Omega\varkappa_2^2 = [\Omega^2 + (\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha)^2]^{-1} \ \{\Omega^5 + (\sin^2\alpha + \lambda^2\cos^2\alpha)\, \Omega^3 + \\ + i\, [(\cos^2\alpha + \lambda\sin^2\alpha)\, \Omega^4 + \lambda\, (\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha)\, \Omega^2]\}$$

Из последнего выражения следует, что условие (1.15) всегда выполнено при $\lambda > 0$. Поэтому требование $\sigma_d > 0$ является достаточным условием поглощения волн в среде. С другой стороны, при $\sigma_d < 0$ и $\alpha = {}^1/_2\pi$ требование (1.15) нарушается, и амплитуда колебаний будет нарастать по ходу волны.

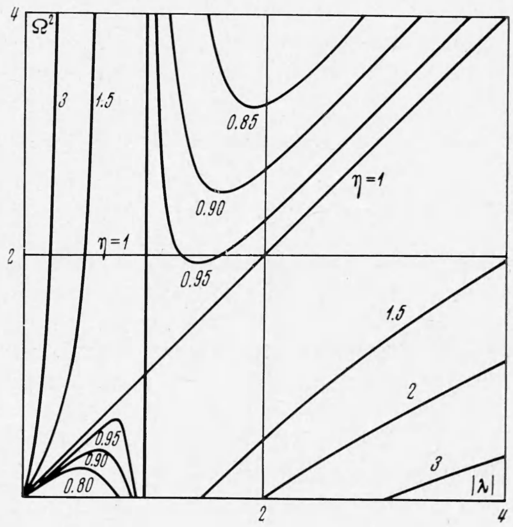
Таким образом, требование $\sigma_d > 0$ одновременно является и критерием устойчивости однородного состояния, и критерием поглощения волн, распространяющихся от источника периодических колебаний. Вместе с тем область направлений $\mathbf{n}$, в которой происходит поглощение колебаний заданной частоты, в случае $\sigma_d < 0$ отличается от области направлений, определенной в (1.11) и соответствующей затуханию во времени периодических вдоль $\mathbf{n}$ возмущений с заданной длиной волны. Действительно, при $\lambda < 0$ неравенства (1.15) выполняются в следующем диапазоне значений α:

$$0 \leqslant \alpha < \alpha_0, \quad \pi - \alpha_0 < \alpha \leqslant \pi \tag{1.16}$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tg} [(\lambda^2 + \Omega^2)^{1/2}\, |\lambda|^{-1/2} (1 + \Omega^2)^{-1/2}]$$

Область направлений поглощения существует при любых $\sigma_d < 0$ и заполняет внутренность конуса, ось которого параллельна вектору $\mathbf{E}_0$, а угол в осевом сечении равен α_0. При фиксированном $\lambda \neq -1$ угол α_0 будет монотонной функцией от Ω^2, причем с увеличением Ω^2 от 0 до ∞ величина α_0 изменяется от значения $\alpha_0 = \alpha_* = \operatorname{arc\,tg}\,(\,|\,\lambda\,|^{1/2})$ до значения $\alpha_0 = {}^1/_2\pi - \alpha_*$. С ростом частоты поле направлений усиления колебаний сжимается, если $|\,\lambda\,| < 1$, и расширяется при $|\,\lambda\,| > 1$. Линии постоянного значения величины $\eta = \operatorname{tg}^2 \alpha_0$ на плоскости параметров $(|\lambda|, \Omega^2)$ изображены на фигуре.

2. Задача об устойчивости в случае ограниченной области. Энергетические соотношения. Рассмотрим вопрос об устойчивости состояния (1.3) в цилиндрической области $D \equiv \equiv \{(x_1, x_2) \in G,\ |\,x_3\,| < h\}$, где x_i — декартовы координаты, G — произвольная односвязная двумерная область.



Состояние (1.3) реализуется при пропускании через проводник постоянного тока от внешнего источника. Будем считать торцовые поверхности цилиндра идеально проводящими, а его боковую поверхность и внешнюю цепь окруженными непроводящей средой, близкой по своим диэлектрическим свойствам к вакууму. Электрическое поле вне области D и индуцированное магнитное поле во всем пространстве в принципе могут быть определены однозначно из уравнений стационарного поля при обычных краевых условиях на границах раздела сред и на бесконечности.

При исследовании проблемы устойчивости стационарного состояния в ограниченной области естественно рассматривать флуктуации, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) начальные условия вместе с физическими условиями на границах раздела сред однозначно определяют поле возмущений во всем пространстве при $t > 0$;

2) рассматриваемые возмущения не могут возникнуть в области D при $t > 0$, если они отсутствуют при $t = 0$.

Возмущения, удовлетворяющие перечисленным условиям, будем называть допустимыми. Чтобы обеспечить выполнение требований 1) и 2), будем рассматривать задачу Коши для возмущений во всем пространстве, предполагая, что начальные распределения

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \delta\mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \qquad \delta\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \delta\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

достаточно гладкие функции, тождественно равные нулю вне области D и на ее границе S.

Возмущения полей $\delta\mathbf{E}^-$, $\delta\mathbf{H}^-$ внутри D и $\delta\mathbf{E}^+$, $\delta\mathbf{H}^+$ вне D должны удовлетворять условиям непрерывности тангенциальных составляющих на границах области

$$\delta\mathbf{E}_\tau^- = \delta\mathbf{E}_\tau^+ = 0 \qquad (\mathbf{x} \in S_1) \tag{2.2}$$

$$\delta\mathbf{E}_\tau^- = \delta\mathbf{E}_\tau^+, \qquad \delta\mathbf{H}_\tau^- = \delta\mathbf{H}_\tau^+ \qquad (\mathbf{x} \in S_2)$$

Здесь S_1 — торцовые электроды, S_2 — боковая поверхность цилиндра.

При такой постановке задачи возмущения, сосредоточенные при $t = 0$ в области D, при $t > 0$ могут распространяться в окружающее пространство. Поле возмущений будет равно нулю во внешности переменной области D_*, ограниченной расширяющимся со скоростью света передним волновым фронтом S_*. Замкнутая поверхность S_* является характеристической и в момент времени t представляет собой огибающую семейства сферических фронтов радиуса ct с центрами в точках границы S. Вследствие непрерывности начальных распределений (2.1), равных нулю на S, возмущения поля на волновом фронте S_* обращаются в нуль

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{x}_*, t) = \delta\mathbf{H}(\mathbf{x}_*, t) = 0 \qquad (\mathbf{x}_* \in S_*) \tag{2.3}$$

Для малых возмущений можно получить результат, аналогичный теореме Пойнтинга в обычной электродинамике [14]

$$\begin{gathered}\int\limits_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int\limits_V \delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E} dV - \frac{c}{4\pi}\int\limits_\Sigma (\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H})\,\mathbf{v} d\Sigma \\ w = [(\delta\mathbf{E})^2 + (\delta\mathbf{H})^2]\,/\,8\pi\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь V — произвольный объем, ограниченный поверхностью Σ, $\mathbf{v}$ - внешняя нормаль к Σ. При выводе формулы (2.4) используются первые два уравнения системы (1.4) и условия непрерывности (2.2). Пусть V — объем полного поля возмущений D_*. Тогда из (2.3) следует обращение в нуль поверхностного интеграла в (2.4). Пренебрегая диссипацией возмущений во внешней цепи ввиду относительно высокой проводимости ее элементов, распространим объемный интеграл в правой части (2.4) только на область D. В результате получим

$$\int\limits_{D_*} \frac{\partial w}{\partial t} dD = -\int\limits_D \delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E} dD$$

Используя формулу дифференцирования по времени интегралов, взятых по подвижному объему D_*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_*} f dD = \int\limits_{D_*} \frac{\partial f}{\partial t} dD + c\int\limits_{S_*} f dS \tag{2.5}$$

полагая в ней $f = w$ и учитывая условия (2.3), придем к уравнению

$$\frac{dW_*}{dt} = -\int\limits_D [\sigma_d(\delta\mathbf{E}_\parallel)^2 + \sigma(\delta\mathbf{E}_\perp)^2]\, dD \tag{2.6}$$

$$W_* = \int\limits_{D_*} w dD, \quad \delta\mathbf{E}_\parallel = (\mathbf{l}\delta\mathbf{E})\,\mathbf{l}, \quad \delta\mathbf{E}_\perp = \delta\mathbf{E} - \delta\mathbf{E}_\parallel, \quad \mathbf{l} = \mathbf{E}_0\,/\,E_0$$

Вследствие линейности задачи (2.1), (2.2) для возмущений непрерывное решение единственно, если задача с нулевыми начальными условиями (2.1) имеет только тривиальное решение. Из (2.6) следует

$$dW_*\,/\,dt \leqslant 8\pi\sigma_m W_*, \quad \sigma_m = \max(\sigma, |\sigma_d|)$$

Интегрируя это неравенство, получим $W_*(t) \leqslant W_*(0) \exp 8\pi\sigma_m t$. При $W_*(0) = 0$ функция $W_*(t)$ остается равной нулю в последующие моменты времени, следовательно, решение поставленной задачи единственно. Этот результат останется справедливым и в случае неоднородного стационарного состояния, когда расположение электродов или геометрия области D не допускают решения (1.3). Для неоднородного распределения тока вместо константы σ_m нужно взять $\max \sigma_m(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in D$.

Определим стационарное состояние в области D как устойчивое в среднем, если энергия допустимых возмущений в этой области удовлетворяет при $t \to \infty$ условию

$$W(t) = \int_D w dD \leqslant W(0) \tag{2.7}$$

Под неустойчивостью стационарного состояния в D будем понимать возможность нарастания допустимых возмущений со временем. При $\sigma_d < 0$ всегда существуют возмущения, энергия которых возрастает в течение некоторого начального интервала времени. Действительно, рассматривая возмущения, у которых $\delta E_{\perp} = 0$ при $t = 0$, из (2.6) получим $dW / dt > 0$ при $t = 0$.

Существование в случае $\sigma_d < 0$ нарастающих при $t \to \infty$ возмущений $\delta\mathbf{E}$, потенциальных в D, легко устанавливается для однородного состояния (1.3), так как система (1.4) допускает в D решения вида

$$\delta\mathbf{E} = \delta E_0(x_3) \exp(-4\pi\sigma_d t)\, \mathbf{e}_3, \qquad \delta\mathbf{H} \equiv 0$$

удовлетворяющие условию $\delta E_\tau = 0$ на электродах. Заметим, что для потенциальных в D возмущений $\delta\mathbf{E}$ условие $\delta E_0(\mathbf{x}) = 0$ на полной границе S ставить не нужно, иначе задача об определении потенциала станет некорректной.

Пример неограниченно нарастающих вихревых возмущений легко построить для случая проводящего слоя между двумя бесконечными плоскими электродами $|x_3| < h$. Вихревое решение для $\delta\mathbf{E}$ будем искать в виде

$$\delta\mathbf{E} = u(x_1, x_2)\, g(t)\, \mathbf{e}_3$$

При этом граничные условия $\delta E_\tau = 0$ будут выполнены автоматически. Кроме того, в рассматриваемом случае внутренняя задача для возмущений полностью отделяется от внешней. Исключая из системы (1.4) вектор $\delta\mathbf{H}$, придем к уравнениям

$$\nabla^2 u - \mu u = 0, \qquad g'' + 4\pi\sigma_d g' - c^2\mu g = 0$$

Ограниченное и затухающее на бесконечности решение уравнения Гельмгольца можно взять в виде

$$u = u(r) = J_0(\sqrt{-\mu}\, r), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \mu < 0$$

Уравнение для функции $g(t)$ имеет следующее общее решение:

$$g = C_1 \exp \zeta_1 t + C_2 \exp \zeta_2 t$$

$$\zeta_{1,2} = -2\pi\sigma_d \pm (4\pi^2\sigma_d^2 + c^2\mu)^{1/2}$$

Поскольку $\operatorname{Re} \zeta_{1,2} > 0$ при $\sigma_d < 0$, то найденные решения возрастают при $t \to \infty$.

Из (2.6) следует, что для допустимых возмущений $dW_* / dt \leqslant 0$, если $\sigma_d > 0$. Поэтому $W_*(t) \leqslant W_*(0) = W(0)$, и условие (2.7) в этом случае выполняется благодаря неравенству $W(t) \leqslant W_*(t)$. Для стационарных распределений тока, не обязательно однородных, можно установить более сильный результат — асимптотическую устойчивость этих распределений при $\sigma_d > 0$, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} W_E(t) = 0, \quad W_E(t) = \frac{1}{8\pi} \int_D (\delta\mathbf{E})^2 dD \tag{2.8}$$

При выполнении (2.8) возмущения $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{j}$ стремятся к нулю при $t \to \infty$ почти всюду в области D.

Перейдем к доказательству утверждения (2.8). Предположим, что поля возмущений $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{H}$ дважды непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$ и t внутри и вне области D. Если на идеально проводящих участках границы S возникают разрывы компонент δE_ν или $\delta\mathbf{H}_\tau$, будем предполагать, что это не приводит к нарушению обычных правил дифференцирования по времени интегралов от поля, взятых по неподвижному объему. (В большинстве случаев эти правила сохраняются и для пространственно разрывных распределений.) Функция $W_*(t)$ в случае $\sigma_d > 0$ является невозрастающей и ограничена снизу ($W_* \geqslant 0$). Поэтому при $t \to \infty$ существует $\lim W_*(t) = W_*(\infty)$. Следовательно, сходится несобственный интеграл

$$I = \int_0^\infty (dW_* / dt)\, dt = W_*(\infty) - W_*(0) \tag{2.9}$$

Из (2.6) для допустимых возмущений вытекает оценка

$$0 \leqslant W_E \leqslant (8\pi\sigma_*)^{-1} \,|\, dW_* / dt \,|, \qquad \sigma_* = \min_{\mathbf{x}\in D} (\sigma, \sigma_d)$$

Поэтому вместо (2.8) достаточно доказать, что

$$\lim_{t\to\infty} dW_* / dt = 0 \tag{2.10}$$

Условие (2.10) будет иметь место, если наряду со сходимостью интеграла I равномерно ограничена производная от подынтегральной функции

$$|\, d^2W_* / dt^2 \,| < \mathrm{const} \qquad (0 < t < \infty) \tag{2.11}$$

Установим справедливость неравенства (2.11). Дифференцируя по t уравнение (2.6) получим

$$\frac{d^2W_*}{dt^2} = -2\int_D \left(\sigma_d \delta\mathbf{E}_\parallel \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_\parallel + \sigma\delta\mathbf{E}_\perp \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_\perp\right) dD$$

Оценим модуль правой части последнего равенства

$$\left|\frac{d^2W_*}{dt^2}\right| \leqslant 2\sigma^* \int_D |\,\delta\mathbf{E}\,| \left|\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right| dD \leqslant 2\sigma^* \left(\int_D (\delta\mathbf{E})^2\, dD\right)^{1/2} \left(\int_D \left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right)^2 dD\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sigma^* \sqrt{8\pi W(0)} \left(\int_D \left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right)^2 dD\right)^{1/2}, \qquad \sigma^* = \max_{\mathbf{x}\in D}(\sigma, \sigma_d) \tag{2.12}$$

Здесь использовалось неравенство Коши — Буняковского, а также условие $W_E(t) \leqslant W_*(t) \leqslant W_*(0) = W(0)$. Осталось доказать, что объемный интеграл от $(\partial\delta\mathbf{E} / \partial t)^2$ равномерно ограничен по t. Для этой цели исключим дифференцированием вектор $\delta\mathbf{H}$ из системы (1.4). В результате придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\mathbf{E} + c^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\delta\mathbf{E} + 4\pi\left(\sigma_d \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_\parallel + \sigma\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_\perp\right) = 0 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) рассматривается в проводящей области D и в заполненной возмущениями части вакуума, где следует положить $\sigma = \sigma_d = 0$. Умножая уравнение (2.13) скалярно на $\partial\delta\mathbf{E} / \partial t$ и интегрируя получившееся равенство по области D_*, придем к формуле

$$\frac{1}{8\pi}\int_{D_*} \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right)^2 + c^2(\operatorname{rot}\delta\mathbf{E})^2\right] dD = -\int_D \left[\sigma_d\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_\parallel\right)^2 + \sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_\perp\right)^2\right] dD -$$

$$-\frac{c}{4\pi}\int_{S_*}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E} \times \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\nu}\, dS \tag{2.14}$$

Если произвести полное дифференцирование по времени условий на волновом фронте (2.3) и использовать следствия уравнений Максвелла в вакууме для точек поверхности S_*, то можно получить соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{H}\right)\mathbf{v}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{H}\right)^2\right],\qquad \mathbf{x}\in S_* \tag{2.15}$$

Используя теперь (2.15) и формулу (2.5), в которой положим

$$f=\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right)^2+c^2(\operatorname{rot}\delta\mathbf{E})^2\right]=\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{H}\right)^2\right]$$

приведем уравнение (2.14) в виду

$$\frac{dR}{dt}=-\int\limits_D\left[\sigma_d\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_{\parallel}\right)^2+\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}_{\perp}\right)^2\right]dD$$

$$R(t)=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{D_*}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{E}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{H}\right)^2\right]dD$$

Из последнего уравнения следует: $R(t)\leqslant R(0)$ при $t>0$. Тогда из (2.12) получим требуемую оценку

$$|d^2W_*/dt^2|\leqslant 16\pi\sigma^*\sqrt{W(0)R(0)}$$

Константы $W(0)$ и $R(0)$ определяются заданием начальных распределений (2.1)

Рассмотрим поведение интегральной джоулевой диссипации в области D при наложении на однородное состояние (1.3) малых возмущений. Прежде всего выясним условия, при которых стационарное состояние характеризуется минимумом интегральной диссипации по сравнению с нестационарным состоянием, вызванным наложением начальных возмущений. Чтобы функционал

$$Q=\int\limits_D\mathbf{E}\mathbf{j}(\mathbf{E})\,dD\equiv\int\limits_D q(E)\,dD$$

рассматриваемый в некотором классе полей, имел минимум на стационарном решении $\mathbf{E}_0$, его первая вариация должна обращаться в нуль

$$\delta Q=\int\limits_D(\sigma+\sigma_d)\,\mathbf{E}_0\delta\mathbf{E}\,dD=0$$

Из уравнения (2.13) можно получить соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta Q+4\pi\sigma_d\frac{d}{dt}\delta Q=c^2(\sigma+\sigma_d)\int\limits_S(\mathbf{E}_0\times\operatorname{rot}\delta\mathbf{E})\,\mathbf{v}\,dS$$

которое показывает, что требованию $\delta Q=0$ нельзя удовлетворить, рассматривая произвольные допустимые при анализе устойчивости возмущения. Условие $\delta Q=0$ выполняется для потенциальных возмущений $\delta\mathbf{E}=-\nabla\delta\varphi$ в случае, когда стационарное поле $\mathbf{E}_0$ однородно, а на электродах поддерживается постоянная разность потенциалов. Действительно, при этих условиях

$$\delta Q=-(\sigma+\sigma_d)\int\limits_D\operatorname{div}(\mathbf{E}_0\delta\varphi)\,dD=(\sigma+\sigma_d)\,E_0G\delta(\varphi_+-\varphi_-)=0$$

Здесь G — площадь электрода, $\delta(\varphi_+ - \varphi_-)$ — возмущение разности потенциалов между электродами. Если $\delta Q = 0$, то минимум Q реализуется на стационарном решении (1.3) при условии

$$\delta^2 Q = \frac{1}{2}\int\limits_D \left(\frac{\partial^2 q}{\partial E_i \partial E_j}\right)\delta E_i \delta E_j dD = \frac{1}{2}\int\limits_D \left[\frac{d^2 q}{dE^2}(\delta \mathbf{E}_{\parallel})^2 + \frac{1}{E}\frac{dq}{dE}(\delta \mathbf{E}_{\perp})^2\right] dD > 0$$

Входящие сюда производные вычисляются при $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. Условие $\delta^2 Q > 0$ выполняется для произвольных возмущений, если в точке $E = E_0$ имеют место неравенства

$$d^2 q / dE^2 = E d^2 j / dE^2 + 2 dj / dE > 0, \quad dq / dE = E dj / dE + j > 0 \qquad (2.16)$$

Если потребовать выполнения условия $\delta^2 Q > 0$ на любом стационарном решении, то неравенства (2.16) должны выполняться во всех точках вольт-амперной характеристики. Тогда локальная диссипация $q(E)$ будет монотонно возрастающей выпуклой функцией.

Для потенциальных возмущений $\delta \mathbf{E} = -\nabla \delta\varphi$, $\delta \mathbf{H} = 0$ в цилиндрической области с торцовыми электродами должно быть $\delta \mathbf{E}_{\perp} = 0$, так что в рассмотрении второго неравенства (2.16) нет необходимости.

Выполнение первого условия (2.16) во всех точках вольт-амперной характеристики является более жестким ограничением на вид зависимости $j(E)$, чем требование устойчивости $\sigma_d(E) > 0$.

Покажем, что для однозначной зависимости $j(E)$ из условия положительности функции $d^2 q / dE^2$ следует положительность функции $\sigma_d(E)$. Предположим, что $j(E)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\sigma(0) > 0$. Допустим, что первое неравенство (2.16) выполнено всюду, но существует значение $E = E_1$, для которого $\sigma_d(E_1) \leqslant 0$. Поскольку $\sigma_d(0) = \sigma(0) > 0$, то $\sigma_d(E) > 0$ на некотором интервале $0 < E < E_\delta$. Множество значений E_δ ограничено сверху, так как $\sigma_d(E_1) \leqslant 0$. Следовательно, оно имеет точную верхнюю грань E_2. Из непрерывности функции $\sigma_d(E)$ и свойств верхней грани следует, что $\sigma_d(E_2) = 0$. Для любых E из интервала $(0, E_2)$ имеем

$$-\sigma_d(E) = \sigma_d(E_2) - \sigma_d(E) = \left(\frac{d\sigma_d}{dE}\right)_{E=E_*}(E_2 - E), \quad E_* \in (E, E_2)$$

Отсюда заключаем, что в произвольно малой левой окрестности точки E_2 имеются точки E_*, в которых $d\sigma_d / dE = d^2 j / dE^2 < 0$. Тогда из непрерывности функции $d^2 j / dE^2$ в точке E_2 следует:

$$(d^2 j / dE^2)_{E=E_2} \leqslant 0,$$

Но при $E = E_2$, по предположению, выполнено первое неравенство (2.16), которое ввиду условия $\sigma_d(E_2) = 0$ принимает вид

$$(d^2 j / dE^2)_{E=E_2} > 0$$

Полученное противоречие означает невозможность существования точки E_1.

Утверждение, обратное доказанному, не имеет места. Нетрудно построить примеры зависимостей $j(E)$, для которых $\sigma_d > 0$, но $q(E)$ не будет всюду выпуклой функций.

В работе [9] была предпринята попытка установить эквивалентность между условием устойчивости $\sigma_d > 0$ и принципом минимального производства энтропии в стационарном состоянии. При этом последний, по существу, заменялся в случае однозначной зависимости $j(E)$ принципом минимума джоулевой диссипации при условии постоянства напряжения на электродах. Применение специальных моделей кинетики показывает, что стационарное состояние не характеризуется минимальным производством энтропии [2].

В рамках рассмотренной модели нелинейно проводящей среды условие устойчивости $\sigma_d > 0$ следует из требования минимума Q в любом стационарном состоянии (1.3) в классе возмущений, обращающих в нуль первую вариацию δQ. Однако указанный экстремальный принцип, вообще говоря, не имеет места для сред с произвольной положительной дифференциальной проводимостью. В связи с этим заметим, что вывод о совпадении знаков величин $\delta^2 Q$ и σ_d, сделанный в [9], ошибочен: при вычислении приращения ΔQ для случая $\delta E = \delta E_\parallel$ было потеряно слагаемое, имеющее в принятых выше обозначениях вид $^1/_2 E\, (d^2 j \,/\, dE^2)\, (\delta E_\parallel)^2$ и связанное с кривизной вольт-амперной характеристики. Интегральный вклад этого слагаемого в $\delta^2 Q$ полностью балансируется в случае нелинейной среды второй вариацией потока энергии и не влияет на скорость изменения энергии возмущений.

Автор благодарит Г. А. Любимова, С. А. Регирера за обсуждение основных результатов и А. Г. Куликовского за полезные замечания.

Поступила 7 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Керреброк Дж. Электропроводность газов при повышенной электронной температуре. Сб. «Инженерные вопросы магнитной гидродинамики», М., «Мир», 1965.
2. Волков А. Ф., Коган Ш. М. Физические явления в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. Усп. физ. н., 1968, т. 96, вып. 4.
3. Емец Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
4. Куликовский А. Г., Регирер С. А. Об устойчивости и эволюционности распределения электрического тока в среде с нелинейной проводимостью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Бучин В. А. Определение джоулевой диссипации при движении жидкости с переменной проводимостью в неоднородном магнитном поле. ПМТФ, 1968, № 6.
6. Глушков И. С., Карпухин В. Т., Недоспасов А. В. Распределение тока в E × H разряде с секционированными электродами при неравновесной проводимости плазмы. Теплофизика высоких температур, 1969, № 2.
7. Руткевич И. М. Об одной двумерной задаче электродинамики стационарных токов в нелинейно проводящей среде. ПМТФ, 1970, № 6.
8. Soldatenkov T. R. Penetration of an electromagnetic field into a plasma in the case of a non-linear Ohm's law. Nucl. fusion, 1970, vol. 10, No. 1.
9. Riedley B. K. Specific negative resistance in solids. Proc. Phys. Soc., 1963, vol. 82, pt 6, No. 530.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
11. Ахиезер А. И., Половин Р. В. Критерии нарастания волн. Усп. физ. н., 1971, т. 104, вып. 2.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
13. Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л. Несколько замечаний о распространении электромагнитных волн в анизотропной, диспергирующей среде. Изв. вузов, Радиофизика, 1962, т. 5, № 1.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.