

область упругоупругого деформирования при данной нагрузке.

Зависимости величины максимального прогиба пластины  $w$  от давления  $p$  для упругой 1 и остаточной 2 деформации построены на фиг. 3. Графики свидетельствуют о линейном характере упругого деформирования и нелинейном процессе накопления остаточных деформаций на начальном этапе пластического деформирования.

Высокая чувствительность метода голографической интерферометрии ограничивает диапазон измеряемых величин перемещений на одной ступени нагружения. При значительной величине упругой деформации можно фиксировать интерферограммы только на отдельных ступенях, но обязательно при постоянном приращении нагрузки.

В заключение необходимо отметить, что рассмотренный метод позволяет исследовать процесс деформирования деталей с учетом их конструктивных особенностей, механических свойств материала и технологии изготовления.

Поступила 22 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Щепинов В. П., Морозов Б. А., Аистов В. С. Разделение упругих и остаточных деформаций методом голографической интерферометрии. III Всесоюзный семинар «Оптико-геометрические методы исследования деформаций и напряжений» (тезисы докладов). Днепропетровск, 1978.
2. Voone P. M. Measurement of displacement, strain and stress by holography. The engineering uses of coherent optics. Cambridge, 1976.
3. Сапунов В. Т., Селезнев В. Г., Щепинов В. П., Яковлев В. В. Использование голографической интерферометрии для определения напряженного и деформированного состояния твердых тел. — В кн.: Проблемы голографии. Вып. 3. М., 1973.
4. Hariharan P., Hegedus Z. S. Simple multiplexing technique for double-exposure hologram interferometry. — «Opt. Commun.», 1973, vol. 9, N 2.

УДК 534.222.2

### УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Н. С. Козин, Ю. С. Степанов, Н. Н. Холин

(Красноярск, Москва)

Проводятся теоретические исследования неупругого поведения поликристаллических металлических материалов на основе дислокационных представлений, развиваемых в работах [1—3]. Кинетические уравнения для одномерного деформирования среды были получены в работах [1, 2]. В работе описывается возможный вариант обобщения одномерных уравнений движения среды с дефектами структуры на случай трехмерного деформирования.

1. В широком диапазоне изменения скоростей деформации и температур микроструктурные механизмы динамики дислокаций определяют неупругое поведение металлических материалов. В общем случае плот-

ность дислокаций описывается тензором второго ранга [4]. Однако для сред с хаотической ориентацией монокристаллов зерен можно принять, что плотность описывается скалярным параметром  $n$ . Таким образом, кроме определяющих параметров среды ( $\varepsilon_e$  — тензор упругих деформаций и  $s$  — энтропия), используемых в термодинамике упругих сред, вводятся внутренние параметры, характеризующие изменения структуры в процессе деформирования. Если не рассматривать образование дефектов сплошности материала (трещин, микропор), то для поликристаллических металлических агрегатов изменение структуры можно охарактеризовать средней плотностью дислокаций (среднее число  $n$  дислокационных линий, пересекающих единичную площадку) и параметром, характеризующим зернистость материала  $\kappa$ . При таком выборе определяющих параметров среды в качестве термодинамического потенциала удобно выбрать функцию внутренней энергии

$$U = U(\widehat{\varepsilon}_e, s, n, \kappa).$$

Первое начало термодинамики запишется в виде [5]

$$(1.1) \quad dU = \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} d\widehat{\varepsilon} + dq^e,$$

где  $\widehat{\sigma}$  — тензор напряжений;  $\rho$  — текущая плотность материала;  $\widehat{\varepsilon}$  — тензор полных деформаций;  $q^e$  — внешний приток тепла. Далее будем предполагать аддитивность скоростей упругих и пластических деформаций

$$d\widehat{\varepsilon}/dt = d\widehat{\varepsilon}_e/dt + d\widehat{\varepsilon}_p/dt,$$

а также несжимаемость пластических деформаций

$$\text{Sp} \widehat{\varepsilon}_p = 0.$$

Второе начало термодинамики запишется в виде

$$(1.2) \quad Tds = dq' + dq^e,$$

где  $q'$  — некомпенсированное тепло. Примем

$$(1.3) \quad dq' = \beta \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} d\widehat{\varepsilon}_p,$$

где  $\beta$  — доля работы на пластических деформациях, перешедшая в тепло, причем  $0 < \beta < 1$ . Уравнение (1.1) с учетом (1.2), (1.3) можно переписать в виде

$$(1.4) \quad dU = \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} d\widehat{\varepsilon}_e + \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} d\widehat{\varepsilon}_p - \beta \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} d\widehat{\varepsilon}_p.$$

Запишем соотношение (1.4) в форме

$$\text{Sp} \frac{\partial U}{\partial \widehat{\varepsilon}_e} d\widehat{\varepsilon}_e + \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{\partial U}{\partial n} dn + \frac{\partial U}{\partial \kappa} d\kappa = \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} d\widehat{\varepsilon}_e + Tds + (1 - \beta) \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} d\widehat{\varepsilon}_p.$$

Из последнего равенства следуют уравнения состояния

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma} &= \partial U / \partial \widehat{\varepsilon}_e, \quad T = \partial U / \partial s, \\ 1 - \beta &= \rho \left( \frac{\partial U}{\partial n} \frac{dn}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{dt} \right) \text{Sp} \frac{\widehat{\sigma}}{\rho} \frac{d\widehat{\varepsilon}_p}{dt}, \end{aligned}$$

где  $(1 - \beta)$  — доля работы на пластических деформациях, затраченная на образование дефектов, их рост и движение [3].

Для определения доли работы на пластических деформациях, затраченной на образование дефектов структуры и их динамику, необходимо на основе определенных физических соображений записать кинетические уравнения

$$dn/dt = f_n(\hat{\epsilon}_e, s, n, \kappa), \quad d\kappa/dt = f_\kappa(\hat{\epsilon}_e, s, n, \kappa)$$

и уравнение для тензора скоростей пластических деформаций

$$(1.5) \quad \hat{d}\epsilon_p/dt = \hat{J}(\hat{\epsilon}_e, s, n, \kappa).$$

Одномерный анализ квазистатического и динамического деформирования, ползучести и сверхпластичности поликристаллических металлических материалов, проведенный в работах [1, 2], позволяет записать кинетическое уравнение для средней плотности дислокаций  $n$  в виде

$$(1.6) \quad dn/dt = mbnu_s - a_dbnu_d,$$

где  $m = m(T, \kappa)$  — коэффициент размножения;  $b$  — вектор Бюргера для единичной трансляции;  $u_s = u_s(\tau, T, n, \kappa)$  — средняя консервативная скорость скольжения дислокаций;  $a_d = a_d(T, \kappa)$  — коэффициент аннигиляции дислокаций разных знаков вследствие диффузии;  $u_d = u_d(\tau, T, n, \kappa)$  — средняя неконсервативная скорость движения дислокаций (диффузионная компонента скорости). Первый член в правой части уравнения (1.6) описывает размножение дислокаций вследствие множественного поперечного скольжения и определяет упрочнение материала, а второй член описывает аннигиляцию дислокаций разного знака вследствие диффузии на короткие расстояния и определяет возврат механических свойств материала (отдых),  $\tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$  [2],  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — компоненты тензора напряжений.

В процессе деформирования поликристаллических материалов в условиях высоких температур может происходить рост зерен. Согласно теории роста зерен, развиваемой в [6], имеем

$$d\kappa/dt = \frac{1}{2} G\theta b^2 u_d \left( \frac{1}{\kappa_c} - \frac{1}{\kappa} \right),$$

где  $\theta$  — числовой коэффициент ( $\theta = 0,5-1$ );  $G$  — модуль упругого сдвига;  $\kappa_c$  — критический радиус зерна, после которого происходит его рост. В широком диапазоне изменения скоростей деформации и температур можно полагать  $\kappa = \text{const}$ .

Для случая трехмерного деформирования поликристаллических материалов кинетические уравнения примем в виде

$$(1.7) \quad dn/dt = m(T, \kappa) bnu_s(\tau_m, T, n, \kappa) - a_d(T, \kappa) bnu_d(\tau_m, T, n, \kappa);$$

$$(1.8) \quad d\kappa/dt = \frac{1}{2} G\theta b^2 u_d(\tau_m, T, n, \kappa) \left[ \frac{1}{\kappa_c} - \frac{1}{\kappa} \right],$$

где  $\tau_m = \sqrt{\frac{1}{2} \text{Spr}\hat{\tau}^2}$  — интенсивность максимальных напряжений сдвига, причем в случае одномерного деформирования  $\tau_m = \tau$ ,  $\hat{\tau}$  — тензор максимальных напряжений сдвига.

2. Согласно теореме Гамильтона — Келли [5], тензорную функцию (1.5) можно представить следующим образом:

$$(2.1) \quad \hat{J} = A\hat{I} + B\hat{\epsilon}_e + C\hat{\epsilon}_e^2,$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  зависят от базисных инвариантов тензора  $\hat{\epsilon}_e$  и параметров  $s$ ,  $n$ ,  $\kappa$ . Вследствие малости упругих деформаций третьим

членом в соотношении (2.1) можно пренебречь

$$(2.2) \quad \hat{J} = A\hat{I} + B\hat{\varepsilon}_e.$$

Далее будем полагать, что в малом физическом объеме содержится одинаковое число дислокаций противоположного знака, так что суммарное поле напряжений, создаваемое этими дислокациями, равно нулю. Для малых упругих деформаций ограничимся главной линейной частью уравнения состояния [3]

$$(2.3) \quad \hat{\varepsilon}_e = \frac{1+\nu}{E} \hat{\sigma} - \frac{\nu}{E} \hat{I} \text{Sp} \hat{\sigma} + \alpha(T - T_0),$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения. Используя соотношение (2.3), из (2.2) получим

$$(2.4) \quad \hat{J} = A'\hat{I} + B'\hat{\sigma}, \quad A' = A - \frac{B\nu}{E} \text{Sp} \hat{\sigma} + B\alpha(T - T_0), \quad B' = \frac{B(1+\nu)}{E}.$$

С учетом пластической несжимаемости материала из (2.4) получим связь между коэффициентами  $A'$  и  $B'$

$$(2.5) \quad A' = B'p.$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим

$$(2.6) \quad d\hat{\varepsilon}_p/dt = \hat{\sigma}'/\mu, \quad \mu = 1/B',$$

где  $\hat{\sigma}'$  — девиаторная часть тензора напряжений;  $\mu$  — коэффициент сдвиговой вязкости. Вводя интенсивность скоростей максимальных пластических сдвигов

$$d\gamma_m^p/dt = \sqrt{\frac{1}{2} \text{Sp} \hat{\gamma}_p^*},$$

где  $\hat{\gamma}_p^*$  — тензор скоростей максимальных пластических сдвигов, из соотношения (2.6) получим выражение для  $\mu$

$$(2.7) \quad \mu = \tau_m / (d\gamma_m^p/dt).$$

Подставляя (2.7) в (2.6), получим

$$(2.8) \quad d\hat{\varepsilon}_p/dt = \frac{\hat{\sigma}'}{\tau_m} (d\gamma_m^p/dt).$$

Соотношения типа (2.8) в различных теориях пластичности получены на основе других предположений [7]. Здесь используются предположения о малости упругих деформаций, несжимаемости пластических деформаций и постулируется связь (1.5).

В случае одноосного деформирования образцов из поликристаллического металлического материала в [1, 2] принималось, что плоскость скольжения дислокаций совпадает с плоскостью действия максимальных напряжений сдвига, а уравнение Орована, связывающее скорость максимальных пластических сдвигов с максимальным напряжением сдвига и кинетическими параметрами, записывалось в виде [1]

$$d\gamma_m^p/dt = bnu_s(\tau, T, n, \kappa), \quad \gamma_m^p = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p}),$$

где  $\varepsilon_{1p}$  и  $\varepsilon_{2p}$  — компоненты тензора пластических деформаций. Для случая трехмерного деформирования поликристаллических материалов примем обобщение уравнения Орована в виде

$$d\gamma_m^p/dt = bnu_s(\tau_m, T, n, \kappa).$$

3. Рассмотрим тело, находящееся под действием внешних сил в состоянии равновесия и занимающее в евклидовом пространстве  $(x_1, x_2, x_3)$  малый односвязный объем. Пусть напряженное состояние тела получено деформацией  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a})$ ,  $\det(\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{a}) > 0$  из некоторого начального состояния. В момент времени  $t$  упруго разгрузим тело. При этом оно претерпевает деформацию  $\xi = \xi(\mathbf{x})$ . В терминах бесконечно малых векторов касательных пространств в точках  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\xi$  можем написать

$$d\mathbf{x} = \hat{X}d\mathbf{a}, \quad d\mathbf{x} = \hat{X}_e d\xi,$$

где  $\hat{X} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{a}$  и  $\hat{X}_e = \partial\mathbf{x}/\partial\xi$  — матрицы преобразований. Остаточная деформация характеризуется матрицей

$$\hat{X}_p = \hat{X}_e \hat{X}.$$

Тогда матрица полного преобразования представляется в виде произведения матриц упругой и пластической деформаций

$$\hat{X} = \hat{X}_e \hat{X}_p.$$

Из последнего равенства следует уравнение для эволюции разгруженного состояния в процессе релаксации ( $d\hat{X}/dt = 0$ )

$$(3.1) \quad d\hat{X}_e/dt = \hat{\Omega}_p \hat{X}_e, \quad \hat{\Omega}_p = -\hat{X}_e \frac{d\hat{X}}{dt} \hat{X}_p^{-1} \hat{X}_e^{-1}.$$

Метрический тензор упругих деформаций определяется соотношением

$$\hat{g} = (\hat{X}_e^{-1})^* (\hat{X}_e^{-1}).$$

Предполагая пластическую несжимаемость материала, для плотности материала имеем

$$\rho = \rho_0 / \sqrt{\det \hat{g}}.$$

Следствием уравнения для  $\hat{X}_e$  (3.1) является уравнение для метрического тензора

$$d\hat{g}/dt = -(\hat{g}\hat{\Omega}_p)^* - (\hat{g}\hat{\Omega}_p).$$

Далее обозначим через  $\hat{\varepsilon}_p$  и  $\hat{\omega}_p$  симметричную и антисимметричную части

$$\hat{\varepsilon}_p = \frac{1}{2} [\hat{\Omega}_p + (\hat{\Omega}_p)^*], \quad \hat{\omega}_p = \frac{1}{2} [\hat{\Omega}_p - (\hat{\Omega}_p)^*],$$

где  $\hat{\omega}_p$  — тензор скоростей пластических поворотов. Используя анализ, аналогичный анализу, проведенному для функции  $\hat{J}$  (1.5), можно показать, что для изотропного материала  $\hat{\omega}_p = 0$ .

В эйлеровой системе координат запишем замкнутую систему уравнений движения среды с дефектами структуры:

уравнение сохранения массы

$$(3.2) \quad \rho = \rho_0 / \sqrt{\det \hat{g}};$$

уравнение импульсов  $\rho d\mathbf{v}/dt + \operatorname{div} \hat{\sigma} = 0$ ,

где  $\mathbf{v}$  — вектор массовой скорости;

уравнение для метрического тензора

$$d\hat{g}/dt = -\hat{g} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\hat{\sigma}'}{\mu} \right] + \left[ \hat{g} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\hat{\sigma}'}{\mu} \right) \right]^*;$$

уравнение для тензора напряжений

$$\hat{\sigma} = \rho \partial U / \partial \hat{\varepsilon}_e;$$

уравнение для сдвиговой вязкости

$$\mu = \hat{\tau} / b n u_s (\tau_m, T, n, \kappa);$$

соотношение для тензора упругих деформаций

$$d\hat{\varepsilon}_e/dt = -d\hat{g}/dt;$$

уравнение Орована

$$d\gamma_m^p/dt = b n u_s (\tau_m, T, n, \kappa);$$

уравнение для энтропии

$$ds/dt = \left[ \text{Sp} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_p - \rho \left( \frac{\partial U}{\partial n} f_n + \frac{\partial U}{\partial \kappa} f_\kappa \right) \right] / \rho T;$$

уравнение для температуры

$$T = \partial U / \partial s.$$

Если заданы кинетические уравнения (1.7), (1.8), а также функция внутренней энергии, то система (3.2) оказывается замкнутой и может служить для определения параметров  $\rho$ ,  $\hat{g}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\hat{\sigma}$ ,  $\mu$ ,  $\gamma_m^p$ ,  $\hat{\varepsilon}_p$ ,  $s$ ,  $T$ ,  $\hat{\varepsilon}_e$ .

4. Рассмотрим одномерное движение среды и запишем систему уравнений, описывающую это движение. Пусть среда движется параллельно оси, которую будем обозначать индексом 1, со скоростью  $v = v(x, t)$ , где  $x$  — эйлерова координата. Заметим, что такая деформация является деформацией в главных осях и в изотропной среде тензоры напряжений и упругих деформаций соосны. Пусть  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — соответственно упругие удлинения и напряжения вдоль главных осей, причем  $\lambda_2 = \lambda_3$  и  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Для метрического тензора и тензора напряжений имеем [8]

$$\hat{g} = \begin{vmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{vmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

Вводя вместо удлинений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  компоненты тензора упругих деформаций

$$\varepsilon_{1e} = \ln \lambda_1, \quad \varepsilon_{2e} = \ln \lambda_2, \quad \varepsilon_{3e} = \ln \lambda_3,$$

получим, что для одномерного случая система уравнений движения запишется в следующем виде:

(4.1) уравнение для плотности материала

$$\rho = \rho_0 \exp(-\varepsilon_{1e} - 2\varepsilon_{2e});$$

(4.2) уравнение импульсов

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = 0;$$

(4.3) уравнения для компонент тензора упругих деформаций

$$\frac{\partial \varepsilon_{1e}}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon_{1e}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\sigma_1'}{\mu}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{2e}}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon_{2e}}{\partial x} = -\frac{\sigma_2'}{\mu},$$

(4.4) соотношение для сдвиговой вязкости

$$\mu = \tau / b n u_s(\tau, T, n, \kappa);$$

(4.5) уравнение для энтропии

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \text{Sp} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_p - \rho \left( \frac{\partial U}{\partial n} f_n \right);$$

(4.6) уравнения состояния

$$\sigma_1 = \rho \partial U / \partial \varepsilon_{1e}, \quad \sigma_2 = \rho \partial U / \partial \varepsilon_{2e}, \quad T = \partial U / \partial s.$$

Здесь предполагается, что  $\kappa = \text{const}$ . Для больших скоростей дислокаций, которые реализуются при высокоскоростном деформировании материалов, можно использовать зависимость между средней скоростью дислокаций  $u_s$ , максимальным напряжением сдвига  $\tau$  и средней плотностью дислокаций  $n$ , предложенную в работе [9]:

$$(4.7) \quad u_s = c_s \exp \left( -\frac{\tau_*}{\tau} - \frac{n}{n_*} \right),$$

где  $c_s$  — упругая поперечная скорость звука;  $\tau_*$  и  $n_*$  — кинетические параметры, зависящие от предварительной обработки материала (отжиг, радиационное облучение и т. д.), температуры и зернистости. В случае высокоскоростного нагружения на стадии активного нагружения (на фронте ударной волны) диффузионные механизмы движения дислокаций не успевают развиться в достаточной степени и кинетическое уравнение (1.7) запишется в виде

$$(4.8) \quad dn/dt = m(T, \kappa) b n u_s(\tau, T, n, \kappa).$$

Зависимости кинетических параметров от зернистости и температуры определяются из анализа одномерных задач аналогично [1]. Если эти зависимости известны, то система (4.1) — (4.8) оказывается замкнутой. В случае  $T = \text{const}$  и  $\kappa = \text{const}$  в работах [1, 2] проводится численный расчет системы (4.1) — (4.8) применительно к задачам плоского соударения пластин.

Поступила 1 III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И., Холин Н. Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
2. Нигматулин Р. И., Холин Н. Н. Дислокационная кинетика сверхпластичности и ползучести. — Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 2.
3. Козин Н. С., Тузовский А. А., Холин Н. Н. Определяющие уравнения динамической пластичности. — ПМТФ, 1978, № 1.
4. Mura T. Continuum theory of dislocations and plasticity. Springer. Berlin, 1967.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М., Наука, 1970.
6. Гольденблатт И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М., ГИТТЛ, 1955.
7. Grandal S. H., Dahl N. C. An introduction to the mechanics of solids. McGraw — Hill. N. J., 1959.
8. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М., Наука, 1978.
9. Gilman J. Dislocation mobility in crystals. — J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, N 10.