

УДК 532.527

ИНВАРИАНТЫ И АСИМПТОТИКИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ

В. В. Жвик

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Россия
Московский физико-технический институт (государственный университет),
141700 Долгопрудный, Россия
E-mail: vladzhvick@yandex.ru

Исследуется осесимметричная ламинарная закрученная струя вязкой несжимаемой жидкости, истекающая из вращающейся полубесконечной трубы в пространство, заполненное той же жидкостью. Внутренняя поверхность трубы вращается с постоянной угловой скоростью, внешняя поверхность либо неподвижна, либо вращается с той же угловой скоростью. Показано, что в первом случае поле течения на больших расстояниях от отверстия трубы описывается асимптотическим решением Лойцянского, во втором случае (при создании слабого спутного потока) — автомодельным решением Лонга — Гольдштика — Зубцова. Обобщен на случай произвольных осесимметричных закрученных струй скрытый инвариант Гольдштика и изучено его влияние на асимптотику струи. Проведены расчеты сильно закрученных струй и рассмотрена зависимость параметров зоны рециркуляционного течения (распад вихря в закрученной струе) от параметра закрутки и числа Рейнольдса.

Ключевые слова: закрученная струя, инвариант, асимптотика, циркуляция, рециркуляционное течение.

DOI: 10.15372/PMTF20200209

Точные решения уравнений Навье — Стокса [1–12], описывающие затопленные струи, можно рассматривать в качестве асимптотик реальных струйных течений. Для того чтобы сформировать струю, которая на большом расстоянии от источника выходит на определенный асимптотический режим, можно использовать инвариант, сохранение которого обеспечивает заданную асимптотику. Например, сохранение потока осевой компоненты импульса через поперечное сечение струи обеспечивает затухание осевой скорости по закону z^{-1} , т. е. приводит к реализации решения Шлихтинга — Ландау — Сквайра [1–4].

При сохранении потока осевой компоненты момента импульса через поперечное сечение струи выполняется квадратичный закон затухания окружной скорости z^{-2} , т. е. решение Лойцянского — Цуккера [5, 6].

Помимо решения [5, 6] существует точное решение Лонга — Гольдштика — Зубцова [7–9], описывающее закрученную струю, в которой окружная скорость затухает по закону z^{-1} . Доказательство того, что это решение является асимптотикой сильно закрученной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00163).

струи [8, 13], основано на существовании скрытого инварианта, представляющего собой поток бокового импульса через верхнюю полуплоскость поперечного сечения струи (поток бокового импульса через все сечение равен нулю), причем необходимо, чтобы этот инвариант был универсальным, т. е. сохранялся для любых осесимметричных течений. В этом случае при ненулевом значении инварианта в закрученной струе всегда реализуется решение [7–9], а решение [5, 6] при ненулевом значении потока момента импульса возникает во втором приближении по малой переменной z^{-1} [14].

Еще одним инвариантом затопленной струи является расход жидкости через произвольную замкнутую поверхность, включающую источник. Этот инвариант полностью определяет второе приближение $O(z^{-2})$ для незакрученной струи в рамках уравнений пограничного слоя [5]. В рамках уравнений Навье — Стокса второе приближение впервые построено в [15]. Однако при ненулевом расходе решение [15] имеет особенность на оси струи. Данная проблема решена в [14], где показана необходимость наряду со степенным слагаемым z^{-2} учитывать логарифмическое слагаемое $z^{-2} \log z$. При этом коэффициенты в слагаемых зависят от двух констант: расхода и скрытого инварианта, имеющего смысл потока боковой компоненты момента импульса через поверхность полусферы с кольцевым участком дна.

В струе Шнайдера [10, 11], вытекающей из отверстия в плоскости, на которой выполняются условия прилипания, поток осевой компоненты импульса не является инвариантом, а асимптотика дальнего поля струи определяется расходом [13].

Дальнейшее развитие теории проводилось для неосесимметричных струй [16–19]. В работе [17] построено второе приближение для неосесимметричной закрученной струи с неколлинеарными векторами потоков импульса и момента импульса. С использованием теоретических данных работы [16] найдена асимптотика продольной завихренности в дальнем поле двух параллельных противоположно закрученных струй [18]. Исследованию скрытых инвариантов и точных решений для пристенных струй посвящены работы [12, 19].

В настоящей работе показано, что скрытый инвариант [8, 13] не является универсальным, так как не учитывает поток бокового импульса через донную область, который в случае произвольного закрученного осесимметричного течения не равен нулю. Получен универсальный инвариант и исследовано его влияние на асимптотику закрученной струи. В отличие от работ [8, 13] показано, что универсальный инвариант не определяет конкретный показатель степени в асимптотике окружной скорости. Наиболее существенным инвариантом решения [9] является циркуляция или поток продольной завихренности через поперечное сечение. Закрученная струя с нулевой циркуляцией выходит на асимптотику [5, 6] при любом значении параметра закрутки. Рассмотрена возможность создания струи с ненулевой постоянной циркуляцией.

1. Точные решения для закрученных струй. Введем масштаб длины R_0 и масштаб скорости U , которые в дальнейшем будем связывать с радиусом трубы и максимальной продольной скоростью в ней. Рассмотрим эти величины как некоторые произвольные единицы измерения длины и скорости и с их помощью введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_1}{R_0}, & z &= \frac{z_1}{R_0}, & V_r &= \frac{V_{r_1}}{U}, & V_\varphi &= \frac{V_{\varphi_1}}{U}, & V_z &= \frac{V_{z_1}}{U}, \\ p &= \frac{p_1 - p_{1\infty}}{\rho U^2}, & \text{Re} &= \frac{UR_0}{\nu}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где V_{r_1} , V_{φ_1} , V_{z_1} — компоненты размерного вектора скорости в цилиндрической системе координат (r_1, φ, z_1) ; $p_{1\infty}$ — давление в невозмущенной области; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости. Источник струи находится в начале координат $z = 0$,

струя распространяется вдоль оси z . Аналогичным образом проводится обезразмеривание в сферической системе координат (R_1, θ, φ) (θ — угол между радиус-вектором и осью z).

Наряду с решениями уравнений Навье — Стокса приведены решения, полученные с помощью уравнений пограничного слоя. Эти решения представляют собой главные члены разложения решений уравнений Навье — Стокса по малому обратному числу Рейнольдса $\text{Re}^{-1} \rightarrow 0$.

В рассматриваемых решениях сохраняется поток полного осевого импульса через поперечное сечение струи

$$J_z = 2\pi \int_0^\infty (V_z^2 + p)r \, dr. \quad (1.2)$$

В приближении пограничного слоя струя занимает узкую область в окрестности оси z . Пусть δ — толщина струи. В безразмерном виде $J_z \sim O(1)$, так как параметры струи в начальном сечении совпадают с параметрами течения в трубе. При $x \gg \text{Re}$ из (1.2) следует, что $J_z \sim V_z^2 \delta^2$, поэтому $V_z \sim 1/\delta$. Из условия баланса вязких и инерционных членов в уравнении продольного импульса ($V_z^2/z \sim \text{Re}^{-1} V_z/\delta^2$) следует, что $\delta \sim z/\text{Re}$. Автомодельную переменную введем следующим образом: $\eta = \text{Re} r/z$, чтобы внутри струи выполнялось условие $\eta \sim O(1)$.

Решение [1] описывает незакрученную струю, создаваемую точечным источником импульса, в приближении пограничного слоя ($\text{Re} \rightarrow \infty$):

$$V_z^{(1)} = \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2\eta^2/4)^2} \frac{\text{Re}}{z}, \quad V_r^{(1)} = \frac{\alpha^2\eta(1 - \alpha^2\eta^2/4)}{(1 + \alpha^2\eta^2/4)^2} \frac{1}{z}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} J_z. \quad (1.3)$$

Решение этой задачи при произвольном значении Re имеет вид [2–4]

$$V_R = \frac{2\text{Re}^{-1}}{R} \left(\frac{A^2 - 1}{(A - s)^2} - 1 \right), \quad V_\theta = -\frac{2\text{Re}^{-1}}{R} \frac{\sqrt{1 - s^2}}{A - s}, \quad p = \frac{4\text{Re}^{-2}}{R^2} \frac{As - 1}{(A - s)^2} \quad (1.4)$$

($s = \cos \theta$). Константа A связана с интегралом (1.2) соотношением [13, 14]

$$J_z = 16\pi \text{Re}^{-2} A \left(1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \left(\frac{A + 1}{A - 1} \right) \right). \quad (1.5)$$

Расход жидкости в струе через поперечное сечение $z = 0$ равен нулю [1–4]. В приближении пограничного слоя [5] рассмотрена неавтомодельная задача истечения струи из источника конечного диаметра. В этом случае решение (1.3) является главным членом обратного координатного разложения вдали от источника. Следующий член разложения обеспечивает конечный расход

$$V_z^{(2)} = -\frac{1}{2} \beta \alpha^2 \frac{1 - 3\alpha^2\eta^2/4}{(1 + \alpha^2\eta^2/4)^3} \frac{\text{Re}^2}{z^2}, \quad V_r^{(2)} = -\frac{1}{2} \beta \alpha^2 \eta \frac{1 - 3\alpha^2\eta^2/4}{(1 + \alpha^2\eta^2/4)^3} \frac{\text{Re}}{z^2}, \quad (1.6)$$

где $\beta = Q/(2\pi)$; Q — объемный расход через сечение $z = 0$.

Решение (1.6) можно получить из решения [14], выполнив предельный переход $\text{Re} \rightarrow \infty$. Установлено, что построение следующих приближений в рамках уравнений пограничного слоя является некорректным [14].

Кроме того, в приближении пограничного слоя [5] рассмотрена закрученная струя, в которой сохраняется ненулевой поток осевого момента импульса через поперечное сечение

$$L_z = 2\pi \int_0^\infty V_z V_\varphi r^2 \, dr. \quad (1.7)$$

Параметры закрученных струй

Вариант решения	Re	S	J_z (1.2)	L_z (2.9)	$-J_x$ (2.6)	A (1.5)	d (1.10)
1	100	0,500 00	0,845	0,252	0,130	1,0039	1,1536
2	100	1,062 50	0,319	0,544	0,265	1,0103	6,3839
3	100	1,068 75	0,313	0,548	0,266	1,0105	6,5487
4	100	1,250 00	0,381	0,645	0,285	1,0086	6,3845
5	100	1,500 00	0,492	0,821	0,328	1,0067	6,3530
6	100	2,000 00	0,612	1,222	0,459	1,0054	7,6556
7	200	1,068 75	0,310	0,546	0,261	1,0027	6,8700
8	200	1,250 00	0,430	0,649	0,276	1,0019	5,9201
9	200	1,500 00	0,534	0,810	0,316	1,0016	5,9679
10	200	2,000 00	0,642	1,215	0,450	1,0013	7,4626

Выражения для продольной и радиальной скоростей в первых двух приближениях совпадают с выражениями (1.3), (1.6). Окружная скорость не равна нулю во втором приближении:

$$V_\varphi^{(2)} = \gamma \frac{\alpha\eta}{(1 + \alpha^2\eta^2/4)^2} \frac{\text{Re}}{z^2}, \quad \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{64\pi\sqrt{\pi}} L_z \sqrt{J_z} \text{Re}. \quad (1.8)$$

Решение [6] описывает неавтономную закрученную струю при $R \gg 1$ и произвольном значении Re:

$$V_\varphi = \frac{\text{Re}^{-1} d}{R^2} \frac{\sqrt{1-s^2}}{(A-s)^2}. \quad (1.9)$$

Компоненты скорости V_R , V_θ в главном приближении описываются соотношениями (1.4). Константа d связана с интегралом (1.7) соотношением [13, 14]

$$L_z = 4\pi \text{Re}^{-2} d \left(\frac{4}{3(A^2-1)} + A \ln \left(\frac{A+1}{A-1} \right) - 2 \right). \quad (1.10)$$

В таблице приведены значения интегралов J_z , L_z для рассматриваемых струй. При $\text{Re} = 100$ в решении (1.3) значение осевой скорости занижено по сравнению с решением (1.4) в конусе $z > 0$, $\eta < 16$ не более чем на 2 %, в решении (1.8) значения окружной скорости завышены по сравнению с решением (1.9) в конусе $z > 0$, $\eta < 16$ не более чем на 7 %, причем максимальные значения окружной скорости при $\eta \approx 5 \div 8$ различаются менее чем на 3 %.

В [7–9] рассмотрена автономная струя с постоянной циркуляцией $\Gamma_0 = rV_\varphi$ при $r \rightarrow \infty$. В приближении пограничного слоя продольная и радиальная скорости описываются формулами (1.3), окружная скорость равна [9]

$$V_\varphi^{(1)} = \Gamma_0 \frac{\alpha^2\eta/4}{1 + \alpha^2\eta^2/4} \frac{\text{Re}}{z}. \quad (1.11)$$

В работе [8] сформулирована краевая задача для автономной закрученной струи. Струя выдувается из полубесконечной вихревой нити $r = 0$, $z < 0$, на которой задаются условия постоянной циркуляции и отсутствия источников. На оси струи $r = 0$, $z > 0$ задаются условия нулевой циркуляции, отсутствия источников и конечности продольной скорости. Кроме того, задается конечный интеграл (1.2).

Решение [8] имеет особенности в выражениях для окружной и осевой скоростей при приближении к вихревой нити. В работе [20] рассмотрена задача об автономном истечении струи из вершины конуса, на поверхности которого заданы постоянная циркуляция и

условие непротекания. В этом случае скорость не имеет особенности на поверхности конуса за исключением вершины. Следует отметить, что в соответствии с законом сохранения импульса осевая скорость на поверхности конуса не обращается в нуль.

2. Инварианты. В соответствии с [14] будем полагать, что струя генерируется сферой радиусом R_0 с центром в начале координат, на которой задано осесимметричное распределение компонент скорости V_R, V_θ, V_φ . Найдем интегралы течения, связывающие гидродинамические параметры на сфере радиусом R_0 и на сфере с произвольным радиусом $R > R_0$.

Стационарные уравнения Навье — Стокса в декартовой системе координат (x, y, z) принимают вид

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \Pi_{ij} = V_i V_j + p \delta_{ij} - \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.1)$$

где Π_{ij} ($i, j = x, y, z$) — тензор плотности потока импульса (поток j -й компоненты импульса через единичную площадку с нормалью i).

Согласно теореме Гаусса — Остроградского из (2.1) следует, что поток j -й составляющей импульса через произвольную замкнутую поверхность S , внутри которой отсутствуют источники импульса, равен нулю:

$$\iint_S (\Pi_{xj} n_x + \Pi_{yj} n_y + \Pi_{zj} n_z) dS = 0 \quad (2.2)$$

($\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$) — единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности dS).

Запишем подынтегральное выражение в сферической системе координат:

$$\Pi_{Rj}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_R) + \Pi_{\theta j}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\theta) + \Pi_{\varphi j}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\varphi). \quad (2.3)$$

Здесь $j = x, y, z$; $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ — орты сферических координат, декартовы компоненты которых равны $\mathbf{e}_R = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, $\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$, $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$; скалярные произведения — компоненты вектора внешней нормали \mathbf{n} в сферической системе координат.

Величины $\Pi_{Rj}, \Pi_{\theta j}, \Pi_{\varphi j}$ запишем в сферических координатах:

$$\Pi_{\bullet j} = \Pi_{\bullet R}(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_j) + \Pi_{\bullet \theta}(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_j) + \Pi_{\bullet \varphi}(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_j),$$

где скалярные произведения представляют собой декартовы j -компоненты векторов $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$; вместо символа “ \bullet ” можно подставить координаты R, θ, φ .

Рассмотрим две концентрические сферы: внутренняя имеет радиус R_0 и является источником струи, внешняя имеет произвольный радиус $R > R_0$. Поскольку между сферами выполняется соотношение (2.1), в силу (2.2) сохраняется поток j -компоненты импульса через каждую сферу:

$$J_j = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \Pi_{Rj} R^2 \sin \theta d\theta.$$

В случае если струя выдувается из источника в направлении z , выражение J_z представляет собой поток полного продольного импульса в этом направлении:

$$J_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\Pi_{RR} \cos \theta - \Pi_{R\theta} \sin \theta) R^2 \sin \theta d\theta, \quad (2.4)$$

$$\Pi_{RR} = V_R^2 + p - 2 \text{Re}^{-1} \frac{\partial V_R}{\partial R}, \quad \Pi_{R\theta} = V_R V_\theta - \text{Re}^{-1} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} + R \frac{\partial}{\partial R} \frac{V_\theta}{R} \right).$$

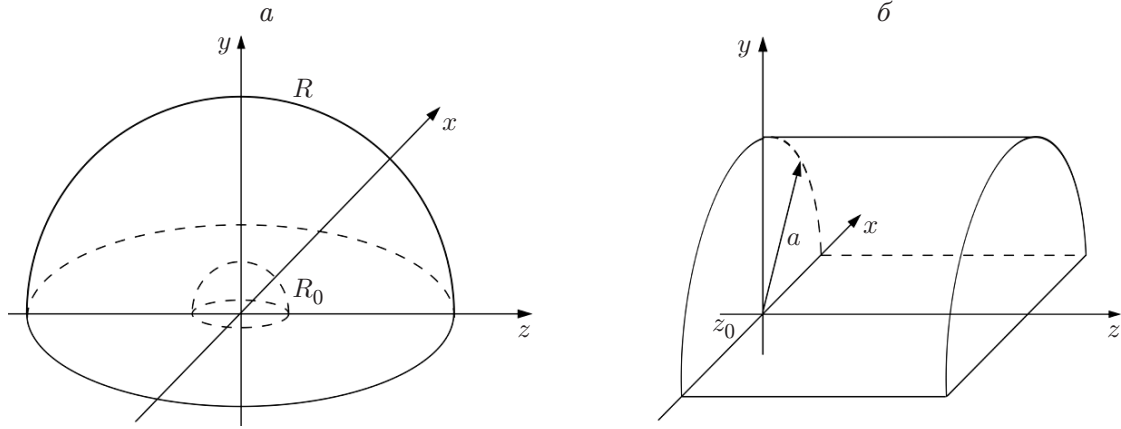


Рис. 1. Поверхность интегрирования при построении скрытого инварианта:
 а — в сферических координатах, б — в цилиндрических координатах

Рассмотрим поток x -компоненты импульса через поверхность сферы:

$$J_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\Pi_{RR} \sin \theta \cos \varphi + \Pi_{R\theta} \cos \theta \cos \varphi - \Pi_{R\varphi} \sin \varphi) R^2 \sin \theta d\theta.$$

Выполняя интегрирование по φ с учетом осевой симметрии течения, получаем $J_x = 0$.

В работе [8] построен ненулевой инвариант J_x путем выбора в качестве поверхности интегрирования полусферы $0 < \varphi < \pi$. В случае двух concentрических полусфер поток x -компоненты импульса через внутреннюю полусферу не равен потоку x -компоненты импульса через внешнюю полусферу, поэтому данная величина не является инвариантом. При этом поток через внутреннюю полусферу равен сумме потоков через внешнюю полусферу и кольцевой участок дна между ними. Тогда можно говорить о сохранении скрытого инварианта, введенного М. А. Гольдштиком [8].

Согласно [8] поток x -импульса через кольцевой участок дна равен нулю вследствие осевой симметрии течения. Это утверждение является ошибочным, и полученный в [8] скрытый инвариант не сохраняется в общем случае неавтономной осесимметричной струи. В работе [13] этот скрытый инвариант получен другим способом, однако при выводе также допущены ошибки.

Приведем правильный вывод скрытого инварианта. Рассмотрим замкнутую поверхность, состоящую из двух concentрических полусфер с радиусами R_0 и $R > R_0$ при $0 < \varphi < \pi$ и кольца в плоскости (x, z) , соединяющего их основания (рис. 1, а). Из (2.2) следует, что поток x -компоненты импульса через полусферу R_0 равен потоку x -компоненты импульса через полусферу R и кольцевое дно:

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)}, \quad J_x^{(1)} = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Pi_{Rx} R^2 \sin \theta d\theta, \quad J_x^{(2)} = \sum_{\varphi=0, \pi} \int_{R_0}^R R dR \int_0^{\pi} \Pi_{\varphi x}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_{\varphi}) d\theta.$$

Выполняя интегрирование по φ в $J_x^{(1)}$, получаем

$$J_x^{(1)} = -2R^2 \int_0^{\pi} \Pi_{R\varphi} \sin \theta d\theta = -2R^2 \int_0^{\pi} \left(V_R V_{\varphi} - \text{Re}^{-1} R \frac{\partial}{\partial R} \frac{V_{\varphi}}{R} \right) \sin \theta d\theta.$$

Подставим $\Pi_{\varphi x}$ в $J_x^{(2)}$:

$$J_x^{(2)} = \sum_{\varphi=0,\pi} \int_{R_0}^R R dR \int_0^\pi (\Pi_{\varphi R} \sin \theta \cos \varphi + \Pi_{\varphi \theta} \cos \theta \cos \varphi - \Pi_{\varphi \varphi} \sin \varphi)(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\varphi) d\theta$$

и выполним суммирование по φ :

$$J_x^{(2)} = -2 \int_{R_0}^R R dR \int_0^\pi (\Pi_{\varphi R} \sin \theta + \Pi_{\varphi \theta} \cos \theta) d\theta.$$

Согласно [8, 13] интеграл $J_x^{(1)}$ (скрытый инвариант J_φ или M) является универсальным инвариантом, т. е. должен сохраняться в любой закрученной осесимметричной струе при любом значении R . Это утверждение неверно, так как в общем случае необходимо учитывать поток $J_x^{(2)}$ через донную кольцевую поверхность. Универсальным инвариантом является интеграл

$$J_x = -2R^2 \int_0^\pi \Pi_{R\varphi} \sin \theta d\theta - 2 \int_{R_0}^R R dR \int_0^\pi (\Pi_{R\varphi} \sin \theta + \Pi_{\varphi\theta} \cos \theta) d\theta, \quad (2.5)$$

где

$$\Pi_{R\varphi} = V_R V_\varphi - \text{Re}^{-1} R \frac{\partial}{\partial R} \frac{V_\varphi}{R}, \quad \Pi_{\varphi\theta} = V_\varphi V_\theta - \text{Re}^{-1} \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{V_\varphi}{\sin \theta}.$$

Для дальнейшего анализа получим инвариант J_x в цилиндрических координатах (r, φ, z) . Рассмотрим цилиндр (рис. 1, б), основаниями которого являются два параллельных плоскости (x, y) полукруга $r < a$, $0 < \varphi < \pi$. Первый полукруг имеет координату z_0 , второй — $z > z_0$. В силу (2.2) поток импульса через основание z_0 равен потоку через основание z и боковую поверхность. В случае если струя выдувается из трубы, в качестве z_0 естественно принять координату выходного сечения трубы.

Запишем выражение (2.3) при $j = x$ в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \Pi_{rx}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_r) + \Pi_{\varphi x}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\varphi) + \Pi_{zx}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z), \\ \Pi_{\bullet x} = \Pi_{\bullet r} \cos \varphi - \Pi_{\bullet \varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

(вместо символа “ \bullet ” можно подставить r, φ, z).

Поток импульса через основание z равен

$$J_x^{(1)}(z) = \int_0^\pi d\varphi \int_0^a (\Pi_{zr} \cos \varphi - \Pi_{z\varphi} \sin \varphi) r dr = -2 \int_0^a \Pi_{z\varphi} r dr,$$

поток импульса через плоское дно —

$$J_x^{(2)} = \sum_{\varphi=0,\pi} \int_{z_0}^z dz \int_0^a (\Pi_{\varphi r} \cos \varphi - \Pi_{\varphi \varphi} \sin \varphi)(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\varphi) dr = -2 \int_{z_0}^z dz \int_0^a \Pi_{\varphi r} dr,$$

поток импульса через крышку $r = a$ —

$$J_x^{(3)} = \int_0^\pi d\varphi \int_{z_0}^z (\Pi_{zr} \cos \varphi - \Pi_{z\varphi} \sin \varphi) a dz = -2 \int_{z_0}^z \Pi_{z\varphi} a dz.$$

Пусть $\Pi_{z\varphi} = o(1/a)$ при $a \rightarrow \infty$. Тогда скрытый инвариант можно представить в виде

$$J_x = -2 \int_0^{+\infty} \Pi_{z\varphi} r \, dr - 2 \int_{z_0}^z dz \int_0^{+\infty} \Pi_{\varphi r} \, dr, \quad (2.6)$$

где

$$\Pi_{z\varphi} = V_z V_\varphi - \operatorname{Re}^{-1} \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \quad \Pi_{\varphi r} = V_\varphi V_r - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \frac{V_\varphi}{r}.$$

Рассмотрим тензор плотности потока момента импульса

$$M_{ij} = e_{jnm} x_n \Pi_{im},$$

где e_{jnm} — символ Леви-Чивиты. Из уравнений импульса (2.1) и условия симметричности тензора напряжений следуют уравнения сохранения момента импульса

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_i} = 0.$$

Согласно теореме Гаусса — Остроградского

$$\iint_S (M_{xj} n_x + M_{yj} n_y + M_{zj} n_z) \, dS = 0.$$

Запишем подынтегральное выражение в сферических координатах

$$M_{Rj}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_R) + M_{\theta j}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\theta) + M_{\varphi j}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\varphi), \quad (2.7)$$

$$M_{\bullet j} = R(\Pi_{\bullet\theta} \mathbf{e}_\varphi - \Pi_{\bullet\varphi} \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_j)$$

($j = x, y, z$; вместо символа “ \bullet ” можно подставить R, θ, φ). Рассмотрим поток z -компоненты момента импульса через сферу радиусом R :

$$L_z = 2\pi \int_0^\pi \Pi_{R\varphi} R^3 \sin^2 \theta \, d\theta = 2\pi \int_0^\pi \left(V_R V_\varphi - \operatorname{Re}^{-1} R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \frac{V_\varphi}{R} \right) R^3 \sin^2 \theta \, d\theta. \quad (2.8)$$

Выражения (2.7) запишем в цилиндрических координатах

$$M_{rj}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_r) + M_{\varphi j}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\varphi) + M_{zj}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z),$$

$$M_{\bullet j} = (-z \Pi_{\bullet\varphi} \mathbf{e}_r + (z \Pi_{\bullet r} - r \Pi_{\bullet z}) \mathbf{e}_\varphi + r \Pi_{\bullet\varphi} \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_j)$$

(вместо символа “ \bullet ” можно подставить r, φ, z). При $\Pi_{r\varphi} = o(r^{-2})$, $r \rightarrow \infty$ получаем

$$L_z = 2\pi \int_0^{+\infty} \Pi_{z\varphi} r^2 \, dr = 2\pi \int_0^{+\infty} \left(V_z V_\varphi - \operatorname{Re}^{-1} \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) r^2 \, dr. \quad (2.9)$$

В [13, 14] построен еще один скрытый инвариант, имеющий смысл потока x -компоненты момента импульса через поверхность полусферы $0 < \varphi < \pi$. При выводе учитывался поток через кольцевой участок дна.

3. Асимптотика закрученной струи. Инварианты содержат информацию об асимптотическом поведении течения. Рассмотрим осесимметричную, в общем случае неавтономную струю, вытекающую из произвольного источника. Будем полагать, что затухание скорости по сферическому радиусу при $R \rightarrow \infty$ является степенным:

$$V_R = \frac{A(\theta)}{R^n} + \dots, \quad V_\theta = \frac{B(\theta)}{R^m} + \dots, \quad V_\varphi = \frac{C(\theta)}{R^k} + \dots \quad (3.1)$$

Из уравнения неразрывности (2.1) следует, что $n = m$. Подставим (3.1) в инвариант (2.4). Сохранение ненулевого инварианта при любом R возможно только при $n = m = 1$.

Подставим (3.1) в инвариант (2.5). При $k = 1$ имеем

$$J_x = -2 \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta - 2 \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \int_0^\pi (f(\theta) \sin \theta + g(\theta) \cos \theta) d\theta, \quad (3.2)$$

где

$$f(\theta) = A(\theta)C(\theta) + \operatorname{Re}^{-1}(k+1)C(\theta), \quad g(\theta) = B(\theta)C(\theta) - \operatorname{Re}^{-1} \sin \theta \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta}.$$

При $k \neq 1$ имеем

$$J_x = J_1 + J_2, \quad (3.3)$$

где

$$J_1 = -\frac{2}{R^{k-1}} \int_0^\pi \left(\frac{k-2}{k-1} f(\theta) \sin \theta - \frac{1}{k-1} g(\theta) \cos \theta \right) d\theta,$$

$$J_2 = -\frac{2}{R_0^{k-1}} \frac{1}{k-1} \int_0^\pi (f(\theta) \sin \theta + g(\theta) \cos \theta) d\theta.$$

Нетрудно показать, что при $k = 1$ интеграл (3.2) сохраняется при условии

$$\int_0^\pi (f(\theta) \sin \theta + g(\theta) \cos \theta) d\theta = 0, \quad (3.4)$$

при $k = 2$ интеграл (3.3) сохраняется при условии

$$\int_0^\pi g(\theta) \cos \theta d\theta = 0.$$

Таким образом, инвариант (2.5) не определяет показатель степени в асимптотике окружной скорости.

Ненулевой интеграл (2.8) на решении (3.1) сохраняется только при $k = 2$. При $k = 1$ интеграл (2.8) обращается в нуль:

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin^2 \theta d\theta = 0. \quad (3.5)$$

Условия (3.4), (3.5) являются необходимыми условиями существования автомодельного решения [7–9].

Вычислим значение инварианта (2.5) на решении (1.4), (1.9). Находим первое слагаемое в формуле (2.5):

$$\Pi_{R\varphi} = V_R V_\varphi - \operatorname{Re}^{-1} R \frac{\partial}{\partial R} \frac{V_\varphi}{R} = \frac{\operatorname{Re}^{-2} d \sqrt{1-s^2}}{R^3 (A-s)^2} \left(2 \frac{A^2-1}{(A-s)^2} + 1 \right),$$

$$J_x^{(1)}(R) = -\frac{2\pi \operatorname{Re}^{-2} d}{R} \left(\frac{A^3}{(A^2-1)^{3/2}} - 1 \right).$$

Поскольку $\Pi_{\varphi\theta} = 0$ на решении (1.4), (1.9), получаем

$$J_x^{(2)} = J_x^{(1)}(R_0) - J_x^{(1)}(R).$$

Скрытый инвариант (2.5) на решении [6] равен $J_x^{(1)}(R_0)$, следовательно,

$$J_x = -\frac{2\pi \operatorname{Re}^{-2} d}{R_0} \left(\frac{A^3}{(A^2 - 1)^{3/2}} - 1 \right). \quad (3.6)$$

Таким образом, скрытый инвариант J_x может служить альтернативной мерой закрученности струи.

Найдем связь констант A , d с интегралами J_z , J_x , L_z при $\operatorname{Re} \gg 1$. Для этого перейдем к пределу $A \rightarrow 1 + 0$ в формулах (1.5), (1.10), (3.6) при $J_z \sim J_x \sim L_z \sim O(1)$. Получаем

$$J_z \approx \frac{32\pi}{3} \frac{\operatorname{Re}^{-2}}{A-1}, \quad L_z \approx \frac{8\pi}{3} \frac{\operatorname{Re}^{-2} d}{A-1}, \quad J_x \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{Re}^{-2} d}{R_0(A-1)^{3/2}}.$$

4. Численное моделирование струй. Заметим, что при одинаковых интегральных характеристиках поле скорости в начальном сечении генерируемой струи может быть различным. Кроме того, на эволюцию струи оказывают влияние твердые поверхности. В настоящей работе струя формируется при вращении с постоянной угловой скоростью Ω внутренней поверхности прямой трубы, сечение которой представляет собой окружность [18, 21, 22]. Внешняя поверхность трубы либо не вращается, либо вращается с той же угловой скоростью. Введем цилиндрическую систему координат, ось z_1 которой направлена вдоль оси трубы, r_1 — расстояние до оси, φ — азимутальный угол. Начало координат $z_1 = 0$ совместим с выходным сечением трубы. В начальном сечении ($z = z_b$) трубы задаются осесимметричные профили осевой V_{z1} , радиальной V_{r1} и окружной $V_{\varphi1}$ компонент скорости

$$V_{z1}(r_1, \varphi) = U(1 - r_1^2/R^2), \quad V_{r1}(r_1, \varphi) = 0, \quad V_{\varphi1}(r_1, \varphi) = \Omega r_1, \quad 0 \leq r_1 \leq R. \quad (4.1)$$

Заметим, что условия (4.1) являются точным решением уравнений Навье — Стокса для течения внутри длинной вращающейся трубы, давление на концах которой различается. Проведем обезразмеривание (1.1). Тогда в начальном сечении $V_z = 1 - r^2$, $V_r = 0$, $V_\varphi = \Omega R_0 r / U$, $0 \leq r \leq 1$. Выдув закрученной струи осуществляется в затопленную область с невозмущенным давлением $p_{1\infty} = \rho U^2 p_\infty$.

Будем полагать, что при удалении на бесконечное расстояние от выходного сечения давление стремится к p_∞ , а скорость к нулю. На внутренней и внешней поверхностях трубы ставится условие прилипания. Течение жидкости полагается ламинарным.

Решение задачи об эволюции струи зависит от двух параметров: параметра закрутки потока $S = \Omega R_0 / U$ и числа Рейнольдса $\operatorname{Re} = U R_0 / \nu$.

Вычислим приближенно интегралы (1.2), (2.6), (2.9) по параметрам в выходном сечении трубы при $\operatorname{Re} \gg 1$. Будем полагать, что в выходном сечении трубы ($z = 0$, $r \leq 1$) выполняются условия (4.1), вне выходного сечения ($z = 0$, $r > 1$) — условие $V_z = V_\varphi = p = 0$. Распределение давления в выходном сечении находим из уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_\varphi^2}{r}, \quad p(1) = 0,$$

откуда следует $p(r) = -S^2(1 - r^2)/2$. Тогда

$$J_z = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi S^2}{4}, \quad L_z = \frac{\pi S}{6}, \quad J_x = -\frac{4S}{15}, \quad (4.2)$$

где в интеграле (2.6) $z_0 = 0$.

Численное решение уравнений Навье — Стокса, записанных в цилиндрических координатах (r, z) при условии, что имеет место осевая симметрия, получено с помощью метода конечных объемов. При $-80 \leq z \leq 0$ расчетная область имеет форму прямоугольника $0 \leq r \leq 160$, при $0 \leq z \leq 2660$ — форму трапеции с основаниями $0 \leq r \leq 160$ (при $z = 0$) и $0 \leq r \leq 954$ (при $z = 2660$). Стенка трубы характеризуется следующими параметрами: $r = 1$, $-80 \leq z \leq 0$. Линейное по z увеличение радиуса расчетной области необходимо для того, чтобы на боковой границе расчетной области скорость струи была существенно меньше, чем на оси. Использовалась структурированная сетка с количеством ячеек $1,5 \cdot 10^6$. На оси z располагалось 2200 ячеек, причем 200 — вдоль трубы. Количество ячеек в поперечном сечении расчетной области равно 650, из них 50 приходится на радиус трубы. Размер ячейки в выходном сечении трубы составляет $0,0010 \times 0,0005$. В направлении отверстия трубы сетка сгущается с коэффициентом геометрической прогрессии 1,05.

На границах расчетной области, кроме входного отверстия трубы и оси, задавались “мягкие” граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial r} \Big|_{r=r_{\max}} = \frac{\partial V_r}{\partial r} \Big|_{r=r_{\max}} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_{\max}} = \frac{\partial V_z}{\partial z} \Big|_{z=z_{\max}} = \\ = \frac{\partial V_r}{\partial z} \Big|_{z=z_{\max}} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=z_{\max}} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Использовались схема второго порядка точности с разностями против потока для интерполяции компонент скорости на гранях ячеек и центрально-разностная схема второго порядка точности для дискретизации диффузионных членов и давления. Также использовался алгоритм совместного решения уравнений импульса и неразрывности. Процедура установления обеспечивалась решением по неявной схеме линеаризованных дискретизованных уравнений переноса, дополненных нестационарной производной с фиксированным значением псевдовременного шага.

Для того чтобы ускорить установление поля течения, сначала проводился расчет с большим шагом по псевдовремени. При установлении постоянного расхода через дальнее поперечное сечение струи выполнялся расчет с малым шагом для уточнения решения. Максимальное значение невязки уравнения для окружной скорости не превышало 10^{-8} .

Верификация проводилась путем сравнения результатов расчета на сетке, используемой в данной работе, и на более грубой сетке с уменьшенным в два раза числом ячеек в направлениях r и z (за исключением числа ячеек вдоль трубы, которое осталось прежним). Различие осевой и окружной компонент скорости в струе, полученных в расчетах на двух сетках, составляло не более 1 %.

Валидация численной схемы проводилась путем контроля за совпадением с погрешностью, не превышающей 1 %, расчетного поля скорости в длинной вращающейся трубе с решением Пуазейля, а также скорости в дальнем поле незакрученной струи с решением [3, 4]. Кроме того, проверялось выполнение точных законов сохранения (1.2), (2.9), (2.6) на всех полученных численных решениях.

5. Закрученная струя в отсутствие циркуляции. Следуя [23], слабо закрученной будем называть струю, осевая компонента скорости которой при любом z монотонно убывает с увеличением расстояния от оси r , а сильно закрученной — струю с областью возвратного течения.

В таблице приведены значения числа Рейнольдса Re и параметра закрутки S для моделируемых струй. Кроме того, приведены значения интегралов (1.2), (2.9), (2.6), определенные по расчетным параметрам в выходном сечении трубы, и константы A , d , вычисленные по значениям интегралов с помощью формул (1.5), (1.10). Результаты расчета свидетельствуют о сохранении этих интегралов с погрешностью не более 3 % вплоть до

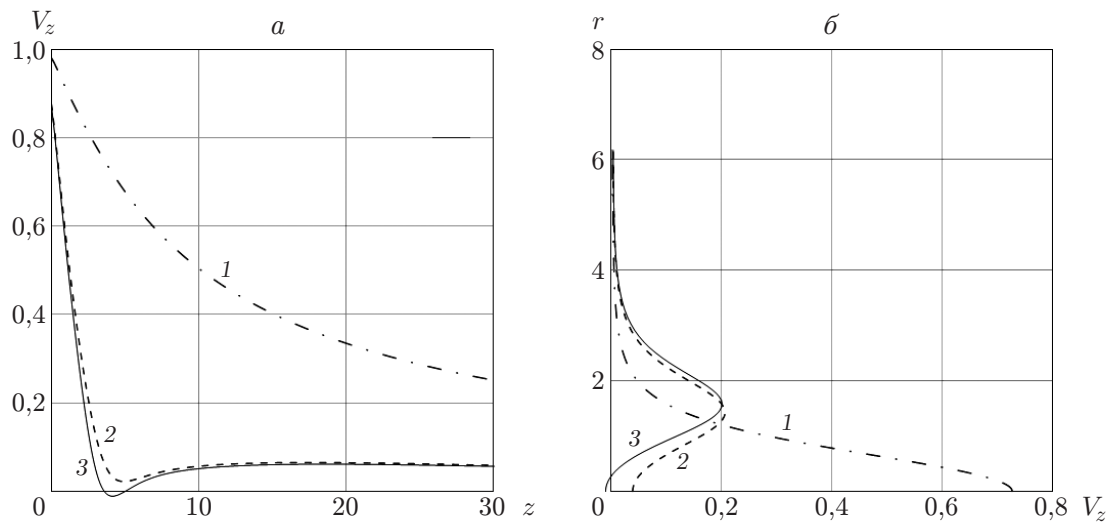


Рис. 2. Расчетное распределение осевой скорости на оси струи (а) и в сечении $z = 4$ (б) при $Re = 100$ и различных значениях S :
 1 — $S = 0,5$, 2 — $S = 1,0625$, 3 — $S = 1,06875$

сечения $z = 320$. Одним из источников погрешности является интегрирование на интервале $r < r_{\max}$. Погрешность определения L_z по приближенной формуле (4.2) не превышает 5 % при $S \leq 1,5$. Для J_x погрешность не превышает 2 % при $Re = 100$, $S \leq 1$, для J_z — менее 1 % при $Re = 100$, $S = 0,5$, в остальных случаях погрешность составляет не менее 10 %. Оценка (4.2) приводит к отрицательным значениям J_z при $S \geq 1,25$. В расчетах всегда получалось $J_z > 0$.

Таким образом, формулы (4.2) пригодны для оценки интегралов в слабо закрученной струе и приводят к большим погрешностям в сильно закрученной струе. Это обусловлено тем, что отклонение осевой скорости в выходном сечении трубы от решения (4.1) для слабо закрученной струи 1 (см. таблицу) составляет 2 %, для сильно закрученной струи 4 — несколько десятков процентов вследствие образования вблизи трубы рециркуляционной зоны. Профиль осевой скорости в выходном сечении трубы для струи 4 близок к однородному. Однако при $z \leq -1$ отклонение осевой скорости в трубе от решения (4.1) составляет менее 0,1 %. Это расстояние существенно меньше длины трубы, поэтому будем считать, что течение внутри трубы не зависит от ее длины и ее можно продлить до сколь угодно больших по модулю отрицательных значений z .

При различных значениях параметра S возможны различные режимы течения (рис. 2). Первый режим характеризуется малыми значениями параметра закрутки $S < S_1(Re)$. Осевая компонента скорости при всех значениях z принимает максимальное значение на оси течения, монотонно убывающее с увеличением z . Вторым режимом $S_1(Re) \leq S < S_2(Re)$ характеризуется немонотонным поведением максимальной осевой скорости при увеличении z . При этом осевая компонента скорости всюду положительна. При $S > S_2(Re)$ на оси течения появляется точка, в которой осевая скорость равна нулю. Дальнейшее увеличение параметра закрутки приводит к появлению области возвратных течений (рис. 3). С увеличением числа Рейнольдса точка торможения появляется при меньших значениях параметра закрутки и на большем расстоянии от выходного сечения ($S_2(Re_2) < S_2(Re_1)$) при $Re_2 > Re_1$. Представляет интерес исследование топологии течения при дальнейшем увеличении параметра закрутки. Так, при $S = 2$, $Re = 200$ часть рециркуляционной области располагается внутри трубы, рециркуляционная область силь-

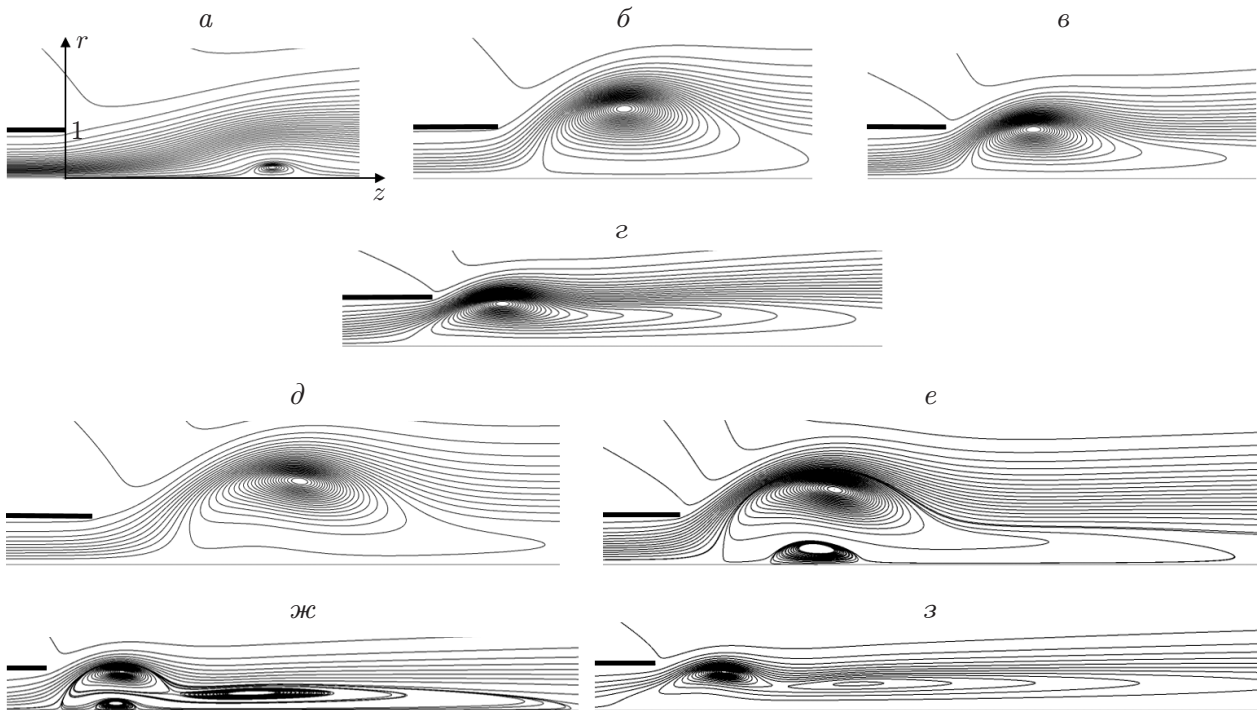


Рис. 3. Зависимости размера и формы рециркуляционной области от числа Рейнольдса Re и параметра закрутки S :

a — $S = 1,069$, $Re = 100$, $б$ — $S = 1,250$, $Re = 100$, $в$ — $S = 1,500$, $Re = 100$, $г$ — $S = 2,000$, $Re = 100$, $д$ — $S = 1,069$, $Re = 200$, $е$ — $S = 1,250$, $Re = 200$, $ж$ — $S = 1,500$, $Re = 200$, $з$ — $S = 2,000$, $Re = 200$; жирная линия — стенка трубы

но вытягивается вниз по потоку и состоит не из одного, а из нескольких вихрей. Аналогичные вихревые структуры наблюдаются в расчетах турбулентных закрученных струй с помощью метода прямого численного моделирования [21, 22].

Расчетные распределения осевой и окружной компонент скорости в поперечном сечении струи, а также результаты аналитических решений (1.4), (1.9) представлены на рис. 4 для слабо закрученной струи 1 и сильно закрученной струи 4. В первом случае погрешность составляет не более 1 % при $z/Re \geq 7,2$, во втором случае — не более 3 % при $z/Re \geq 11,2$. Таким образом, решение [5, 6] адекватно описывает асимптотику слабо и сильно закрученных струй.

Струя также индуцирует течение вдоль неподвижной поверхности трубки. Максимальная осевая скорость составляет порядка 0,02 при $Re = 100$, $S = 0,50 \div 1,25$.

Рассматриваемые течения неустойчивы к воздействию малых возмущений. Об этом свидетельствует как неустойчивость Кельвина — Гельмгольца осевого и азимутального слоев смешения в ближнем поле струи [24, 25], так и неустойчивость решения Ландау в дальнем поле при $Re = 100, 200$ [26–28]. Наличие достаточно протяженного ламинарного участка в таких течениях обусловлено низкими инкрементами роста возмущений. Согласно экспериментальной работе [29] протяженность ламинарного участка при $Re \approx 600$ составляет $L \approx 200$ калибров. Теоретическая оценка длины ламинарного участка [28], полученная в рамках линейной теории устойчивости решения Ландау и согласующаяся с экспериментальными данными [29], при $Re = 200$ дает значение $L \approx 3282$ калибра, что превышает размер расчетной области, используемой в настоящей работе.

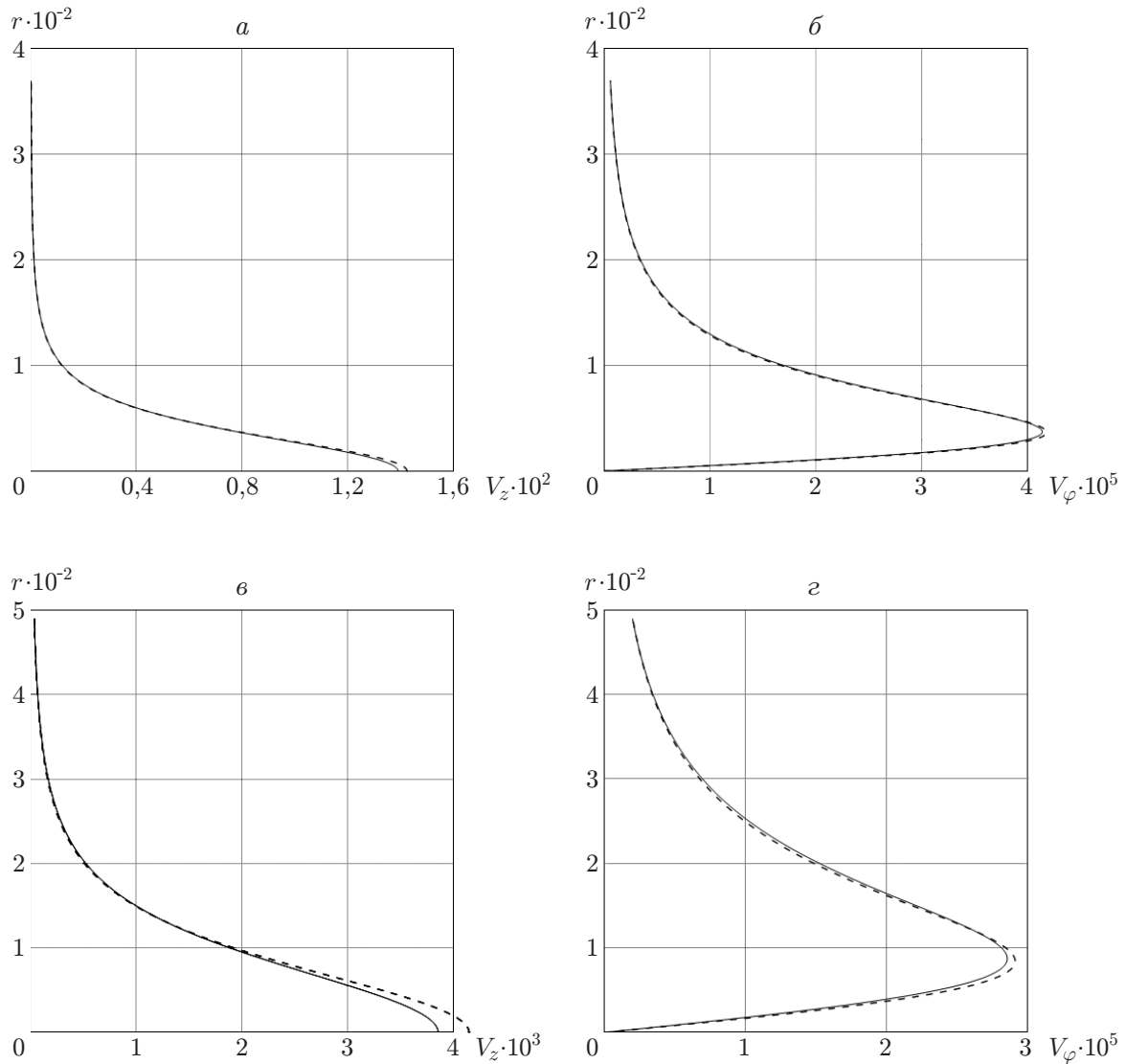


Рис. 4. Расчетные распределения осевой (*а, в*) и окружной (*б, г*) компонент скорости в поперечном сечении струи (сплошные линии), а также решения (1.4), (1.9) (штриховые линии):

а, б — слабо закрученная струя ($Re = 100, S = 0,5, z/Re = 7,2$), *в, г* — сильно закрученная струя ($Re = 100, S = 1,25, z/Re = 11,2$)

В работе [30] с использованием прямого численного моделирования проведен расчет закрученных струй при малых значениях числа Рейнольдса в трехмерной нестационарной постановке. В качестве начального условия использовалось стационарное осесимметричное решение с зоной рециркуляции [31]. Установлено, что при $Re = 200, S \geq S_c$ стационарное решение неустойчиво к неосесимметричным возмущениям в следе пузыревидной зоны рециркуляции, вследствие чего происходит распад вихря по спиральному типу. При этом параметр S_c в значительной степени зависит от начального профиля скорости. Для однородного профиля осевой скорости показана устойчивость стационарных решений при $Re = 200, S = 0,8944$ и $Re = 100, S = 1,3000$.

С учетом сделанных замечаний можно получить экспериментальные данные, соответствующие найденным решениям, по крайней мере, при небольших значениях параметра закрутки.

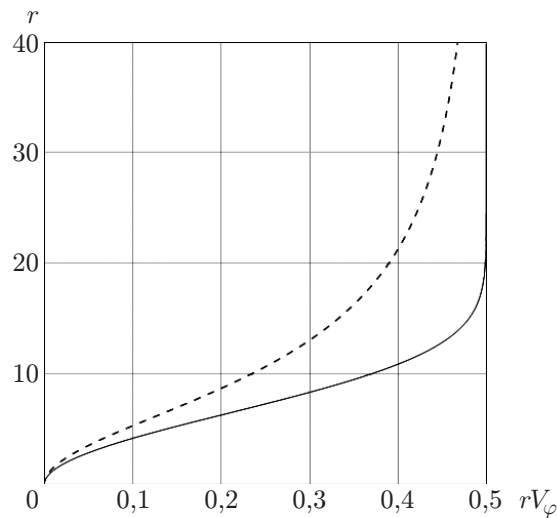


Рис. 5. Расчетное распределение циркуляции в поперечном сечении струи (сплошная линия) и решение (1.11) при $Re = 100$, $S = \Gamma_0 = 0,5$, $z = 120$ (штриховая линия)

6. Струя с циркуляцией. Математическая возможность возникновения струи с циркуляцией при точном решении уравнений Навье — Стокса не вызывает сомнений, однако не ясно, каким образом такую струю можно создать физически.

Пусть внешняя поверхность трубы вращается с той же угловой скоростью, что и внутренняя. В случае если труба имеет конечную длину, циркуляция $\Gamma = V_\varphi r$ при $r \rightarrow +\infty$ равна нулю при любом z , если труба является полубесконечной ($-\infty < z \leq 0$), то циркуляция может быть не равна нулю. Если труба помещена в слабый спутный поток $V_z = V_0 \ll 1$, то циркуляция струи равна циркуляции на стенке трубы S . При этом возможна реализация решения [7–9] в качестве промежуточной асимптотики при $Re \ll z \ll z_{\max}$, где z_{\max} — расстояние, на котором скорость спутного потока равна скорости на оси струи.

Рассматривалась конечная труба, длина которой равна 160 ее радиусам. На левой границе расчетной области вне трубы задавались поле скоростей бесконечного цилиндрического вихря и спутный поток вдоль оси z . На боковой и правой границах задавались “мягкие” условия (4.3). Конечная длина трубы налагает ограничения на скорость спутного потока. В результате вращения внешней поверхности трубы давление на ее поверхности меньше, чем в выходном сечении, поэтому на поверхности трубы возникает тороидальная зона рециркуляции. Размер зоны рециркуляции не должен превышать длину трубы, что возможно только при задании достаточно сильного спутного течения. Это ограничение не позволяет точно задать условия, в которых реализуется автомодельная закрученная струя. На рис. 5 видно, что расчетное распределение циркуляции и решение (1.11) при $Re = 100$, $S = \Gamma_0 = 0,5$, $V_0 = 0,1$ согласуются только качественно.

Заключение. При стационарном истечении струи из вращающейся трубы конечной длины циркуляция скорости по бесконечно большому контуру, охватывающему поперечное сечение струи, равна нулю. Вдали от выходного сечения реализуется решение Лойцянского — Цуккера, даже если струя сильно закручена и содержит область рециркуляционного течения. Ненулевую циркуляцию можно создать путем вращения полубесконечной трубы. Струя, выдуваемая из такой трубы, при наличии слабого спутного потока обладает ненулевой сохраняющейся циркуляцией и описывается решением, близким к решению Лонга — Гольдштика — Зубцова, точный физический смысл которого пока не ясен. Опровергну-

та точка зрения, что дальнейшей асимптотикой струи с ненулевым скрытым инвариантом Гольдштика всегда является решение Лонга — Гольдштика — Зубцова. Данная точка зрения возникла вследствие ошибки при построении скрытого инварианта. В настоящей работе эта ошибка исправлена.

Автор выражает благодарность А. М. Гайфуллину за постановку задачи и замечания, а также Р. И. Мулляджанову и П. В. Чувахову за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Schlichting H.** Laminare Strahlausbreitung // *Z. angew. Math. Mech.* 1933. Bd 13, N 4. S. 260–263.
2. **Слезкин М. А.** Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // *Учен. зап. Моск. гос. ун-та.* 1934. Вып. 2. С. 89–90.
3. **Ландау Л. Д.** Об одном точном решении уравнений Навье — Стокса // *Докл. АН СССР.* 1944. Т. 43, № 7. С. 299–301.
4. **Squire H. V.** The round laminar jet // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1951. V. 4, pt 3. P. 321–329.
5. **Лойцянский Л. Г.** Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // *Прикл. математика и механика.* 1953. Т. 17, вып. 1. С. 3–16.
6. **Цуккер М. С.** Закрученная струя, распространяющаяся в пространстве, затопленном той же жидкостью // *Прикл. математика и механика.* 1955. Т. 19, вып. 4. С. 500–503.
7. **Long R. R.** A vortex in an infinite viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 11, pt 4. P. 611–625.
8. **Гольдштик М. А.** О закрученных струях // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1979. № 1. С. 26–35.
9. **Зубцов А. В.** Об одном автомодельном решении для слабо закрученной струи // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1984. № 4. С. 45–50.
10. **Schneider W.** Flow induced by jets and plumes // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 108. P. 55–65.
11. **Schneider W.** Decay of momentum flux in submerged jets // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 154. P. 91–110.
12. **Акатнов Н. И.** Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та.* 1953. № 5. С. 24–31.
13. **Гольдштик М. А.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, Н. И. Яворский. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
14. **Гольдштик М. А., Яворский Н. И.** О затопленных струях // *Прикл. математика и механика.* 1986. Т. 50, вып. 4. С. 573–583.
15. **Румер Ю. Б.** Задача о затопленной струе // *Прикл. математика и механика.* 1952. Т. 16, вып. 2. С. 255–256.
16. **Яворский Н. И.** Неосесимметричные затопленные струи // *Прикл. математика и механика.* 1988. Т. 52, вып. 5. С. 760–772.
17. **Мулляджанов Р. И., Яворский Н. И.** Решение задачи об истечении неосесимметричной закрученной затопленной струи // *ПМТФ.* 2013. Т. 54, № 2. С. 46–51.
18. **Гайфуллин А. М., Жвик В. В.** Взаимодействие двух противоположно закрученных затопленных струй // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2019. № 3. С. 48–57.
19. **Krechetnikov R., Lipatov I.** Hidden invariances in problems of two-dimensional and three-dimensional wall jets for Newtonian and non-Newtonian fluids // *SIAM J. Appl. Math.* 2002. V. 62, N 6. P. 1837–1855.
20. **Yih C.-S., Wu F., Garg A. K., Leibovich S.** Conical vortices: A class of exact solutions of the Navier — Stokes equations // *Phys. Fluids.* 1982. V. 25, N 12. P. 2147–2158.

21. **Luginsland T.** How the nozzle geometry impacts vortex breakdown in compressible swirling-jet flows // AIAA J. 2015. V. 53, N 10. P. 2936–2950.
22. **Luginsland T., Gallaire F., Kleiser L.** Impact of rotating and fixed nozzles on vortex breakdown in compressible swirling jet flows // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2016. V. 57. P. 214–230.
23. **Ахмедов Р. Б.** Аэродинамика закрученной струи / Р. Б. Ахмедов, Т. Б. Балагула, Ф. К. Рашидов, А. Ю. Сакаев. М.: Энергия, 1977.
24. **Batchelor G. K., Gill A. E.** Analysis of the stability of axisymmetric jets // J. Fluid Mech. 1962. V. 14, N 4. P. 529–551.
25. **Loiseleux T., Chomaz J.-M.** Breaking of rotational symmetry in a swirling jet experiment // Phys. Fluids. 2003. V. 15, N 2. P. 511–523.
26. **Лихачев О. А.** Анализ устойчивости автотельной круглой струи с учетом эффектов непараллельности // ПМТФ. 1990. № 4. С. 118–124.
27. **Shtern V., Hussain F.** Effect of deceleration on jet instability // J. Fluid Mech. 2003. V. 480. P. 283–309.
28. **Мулладжанов Р. И., Яворский Н. И.** Линейная гидродинамическая устойчивость дальнего поля затопленной ламинарной струи // Науч.-техн. ведомости С.-Петербур. гос. политехн. ун-та. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 11, № 3. С. 108–121.
29. **Леманов В. В., Терехов В. И., Шаров К. А., Шумейко А. А.** Экспериментальное исследование затопленных струй при низких числах Рейнольдса // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39, вып. 9. С. 34–40.
30. **Ruith M. R., Chen P., Meiburg E., Maxworthy T.** Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes: direct numerical simulation // J. Fluid Mech. 2003. V. 486. P. 331–378.
31. **Grabowski W., Berger S.** Solutions of the Navier — Stokes equations for vortex breakdown // J. Fluid Mech. 1976. V. 75. P. 525–544.

*Поступила в редакцию 24/IV 2019 г.,
после доработки — 10/IX 2019 г.
Принята к публикации 30/IX 2019 г.*
