Во всех случаях заметна тенденция к образованию локализованных волн из различных начальных возмущений. Эти волны обладают определенной устойчивостью и достаточно долгое время сохраняют индивидуальность после взаимодействия с себе подобными. Процесс сброса начальным возмущением «лишней энергии» аналогичен тому, который демонстрируют некоторые точно интегрируемые системы [1, 2].

В целом результаты численного анализа позволяют считать, что поведение локализованных волн в рассматриваемой системе имеет основные характерные особенности распространения солитонов, по крайней мере, на относительно больших интервалах времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Теория** солитонов: метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
2. **Солитоны** в действии.— М.: Мир, 1981.
3. **Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.** Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ.— 1976.— Т. 71, вып. 2(8).
4. **Thielheim K. O.** Solitons in distensible tubes // J. Appl. Phys.— 1983.— V. 54, N 6.

Поступила 24/IV 1986 г.

УДК 517.9 : 533.9

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ПОРШНЯ В ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ С СОХРАНЕНИЕМ ЭНЕРГИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

Р. Г. Даутов, Е. В. Ермолин

(Казань)

В работе рассматривается задача о движении сферического поршня с заданным на нем теплоотводом по теплопроводной среде с распределенной плотностью, в которой в начальный момент времени произошел точечный взрыв с выделением конечной энергии E_0. При этом изучается случай, когда теплоотвод компенсирует работу поршня, т. е. полная энергия среды остается постоянной и равной выделенной энергии E_0.

В результате анализа численно найденных автомодельных решений обнаружены следующие закономерности.

Для решений, имеющих одну и ту же полную энергию, с увеличением скорости поршня и теплоотвода на нем уменьшаются массовая скорость распространения переднего фронта волны, разность между скоростями переднего фронта возмущений и идущей за ней ударной волны, доля тепловой энергии.

С увеличением E_0 происходит, во-первых, усиление вышеперечисленных закономерностей, во-вторых, для двух предельных задач — чистый взрыв [1, 2], максимальный теплоотвод — обнаруживаются интересные в сопоставлении закономерности: процент кинетической энергии взрыва в задаче без поршня (чистый взрыв) падает, процент кинетической энергии взрыва в задаче с максимальным теплоотводом (температура на поршне равна нулю) возрастает.

Запишем систему уравнений газовой динамики в лагранжевой массовой системе координат [3]:

$$
\frac{\partial r}{\partial t} = v,\ \frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{\rho r^2},\ \frac{\partial v}{\partial t} = -r^2\frac{\partial p}{\partial m},\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial (r^2 v)}{\partial m},
$$
$$
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial (r^2 v)}{\partial m} - \frac{\partial (r^2 w)}{\partial m},\ W = -r^2\rho\varkappa\frac{\partial T}{\partial m},
$$
$$
\varepsilon = \frac{RT}{\gamma - 1},\ p = R\rho T,\ \varkappa = aT^{5/2},\ \gamma = \frac{5}{3}. \tag{1}
$$

Здесь r — радиус; m — лагранжева массовая переменная; t — время; v — скорость; ρ — плотность; p — давление; ε — внутренняя энергия; T — температура; W — тепловой поток; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, характерный для высокотемпературной водородной плазмы.

Из размерностного анализа [4] следует, что задача о мгновенном точечном взрыве с последующим движением сферического поршня имеет автомодельное решение при выполнении:

граничных условий на поршне ($m = 0$)

(2) $$v(0,\ t) = v_0 t^{-1/4},\ W(0,\ t) = -v(0,\ t)p(0,\ t);$$

граничных условий на переднем фронте волны возмущений $m_N(t)$

(3) $$\rho\,(m_N,\ t) = \rho_0 m_N^{-7/2},\ v\,(m_N,\ t) = T\,(m_N,\ t) = W\,(m_N,\ t) = 0;$$

условия сохранения полной энергии среды

(4) $$4\pi \int\limits_0^{m_N} \left(\frac{T}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2}\right) dm = E_0.$$

Краевая задача (1)—(4) имеет автомодельное решение, для которого справедливы следующие формулы перехода к одной независимой безразмерной переменной s:

(5) $$m = t^{1/2}R^{7/16}\rho_0^{1/4}a^{-1/8}s,\ r\,(m,\ t) = t^{3/4}R^{21/32}\rho_0^{1/24}a^{-3/16}\lambda\,(s),$$

$$v\,(m,\ t) = t^{-1/4}R^{21/32}\rho_0^{1/24}a^{-3/16}\alpha\,(s),\ \rho\,(m,\ t) = t^{-7/4}R^{-49/32}\rho_0^{1/8}a^{7/16}\delta\,(s),$$

$$T\,(m,\ t) = t^{-1/2}R^{5/16}\rho_0^{1/12}a^{-3/8}f\,(s),\ W\,(m,\ t) = t^{-5/2}R^{7/16}\rho_0^{1/4}a^{-1/8}\varphi\,(s).$$

Используя эти формулы перехода, поставим краевую задачу для безразмерных функций, зависящих от s:

система уравнений

(6) $$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\delta\lambda^2},\ \frac{s}{2}\frac{d\lambda}{ds} - \frac{3}{4}\lambda = -\alpha,\ \frac{s}{2}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\alpha}{4} = \lambda^2\frac{d\,(\delta f)}{ds},$$

$$\frac{s}{2}\frac{d\delta}{ds} + \frac{7}{5}\delta = \delta^2\frac{d\,(\lambda^2\alpha)}{ds},\ \frac{0{,}5}{\gamma - 1}\frac{d\,(sf)}{ds} = \delta f\frac{d\,(\lambda^2\alpha)}{ds} + \frac{d\,(\lambda^2\varphi)}{ds},$$

$$\varphi = -\lambda^2\delta f^{5/2}\frac{df}{ds},\ \gamma = \frac{5}{3};$$

условие на поршне ($s = 0$)

(7) $$\alpha(0) = \alpha_0;$$

условия на переднем фронте возмущений s_N

(8) $$\lambda\,(s_N) = \frac{2}{3}s_N^{3/2},\ \delta\,(s) = s_N^{-7/2},\ \alpha\,(s_N) = f\,(s_N) = \varphi\,(s_N) = 0;$$

условие сохранения энергии

(9) $$4\pi \int\limits_0^{s_N} \left(\frac{f}{\gamma - 1} + \frac{\alpha^2}{2}\right) ds = e_0.$$

Здесь значения безразмерных констант следующие:

(10) $$\alpha_0 = v_0 R^{-21/32}\rho_0^{-1/24}a^{3/16},\ e_0 = E_0 R^{-3/4}\rho_0^{-1/3}a^{1/2}.$$

Система (6) имеет первые интегралы

(11) $$\alpha(s) = 0{,}75\lambda(s) - s/(2\delta(s)\lambda^2(s)),$$

$$0{,}5s(f/(\gamma - 1) + \alpha^2/2) - \lambda^2(\delta f\alpha + \varphi) = \mathrm{const},$$

где с учетом (8) константа во втором интеграле равна нулю.

Соотношения Гюгонио [3] на изотермической ударной волне:

(12) $$\delta_2 = \delta_1/\psi,\ \psi = (2\lambda_1^2\delta_1/s_1)^2 f_1,\ f_2 = f_1,$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + (1 - \psi)\frac{0{,}5s_1}{\delta_1\lambda_1^2},\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{s_1}{4\lambda_1^2}\left(\frac{0{,}5s_1}{\delta_1\lambda_1^2}\right)^2(\psi^2 - 1)$$

(индексами 1 и 2 отмечены значения функции перед и за ударной волной соответственно).

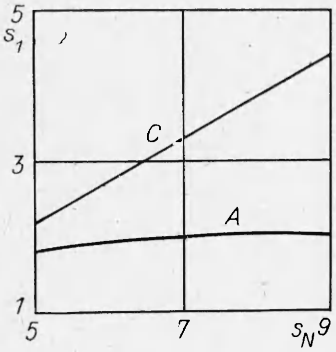

Рис. 1

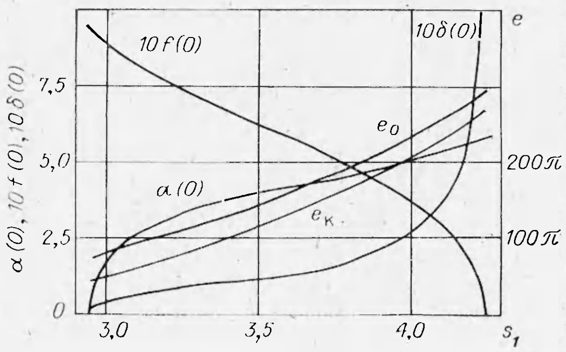

Рис. 2

Аналогично [1, 2, 5] можно показать, что в данной задаче скорость переднего фронта возмущений конечна, т. е. в условиях (8) имеем $s_N < \infty$, а между поршнем и передним фронтом возмущений должен быть изотермический сильный разрыв, т. е. существует точка $s_1 \in (0, s_N)$, где выполняются условия (12).

Значения s_N, s_1 являются своеобразными собственными значениями краевой задачи — каждой допустимой паре величин e_0, α_0 взаимооднозначно соответствует пара величин s_N, s_1.

В окрестности переднего фронта возмущений s_N решение имеет вид $(s \leqslant s_N)$

$$(13)\quad \lambda(s) = \lambda_N + \frac{3\lambda_N}{2s_N}(s_N - s) + \ldots, \quad \alpha(s) = \frac{2\lambda_N^2\delta_N}{s_N} a_1 (s_N - s)^{2/5} + \ldots,$$

$$\delta(s) = \delta_N + \frac{4\delta_N^3\lambda_N^4}{s_N^2} a_1 (s_N - s)^{2/5} + \ldots, \quad f(s) = a_1 (s_N - s)^{2/5} + \ldots,$$

$$\varphi(s) = \frac{3}{4}\frac{s_N}{\lambda_N^2} a_1 (s_N - s)^{2/5} + \ldots, \quad a_1 = \left(\frac{15}{8}\frac{s_N}{\delta_N\lambda_N^2}\right)^{2/5}.$$

Если заранее известны положения особых точек s_N, s_1 в искомом решении, то это решение находится численным интегрированием системы (6) от точки $s = s_N - \tau$, в которой значения функций вычисляются по формулам (13), до поршня $s = 0$ с использованием в точке разрыва s_1 соотношений (12).

В результате численных экспериментов обнаружено, что для каждого значения энергии взрыва e_0 существует критическое значение скорости поршня $\overset{*}{\alpha}_0(e_0)$ такое, что в задачах с $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \overset{*}{\alpha}_0(e_0)$ при интегрировании в сторону поршня в окрестности $s = 0$ появляется неустойчивость численного решения, наиболее характерная для поведения скорости $\alpha(s)$. Эта неустойчивость имеет ту же природу, что и неустойчивость численного решения в решениях типа ТВ II* задачи о поршне [5], а также в решениях задачи о чистом взрыве [2]. Кстати, в [2] проведено исследование поведения интегральных кривых и изложены итерационные методы решения задачи о чистом взрыве, позволяющие избежать неустойчивости численного решения.

Для краткости дальнейшего изложения назовем задачу о чистом взрыве ($\alpha_0 = 0$) задачей A, а с максимальным теплоотводом ($\alpha_0 \neq 0$, $f(0) = 0$) — задачей C, промежуточную ($\alpha_0 \neq 0$, $f(0) \neq 0$) — задачей B.

В окрестности поршня каждая из названных задач имеет свой вид разложения решения в степенные ряды:

задача A

$$(14)\qquad \lambda(s) = \left(\frac{3}{\delta_0}\right)^{1/3} s^{1/3} + \ldots, \quad \alpha(s) = \frac{7}{12}\left(\frac{3}{\delta_0}\right)^{1/3} s^{1/3} + \ldots,$$

* ТВ II — температурная волна второго рода [5].

$$\delta(s)=\delta_0+\frac{1}{f_0}\left(\frac{35}{96}-\frac{\delta_0}{2f_0^{3/2}}\right)\left(\frac{\delta_0}{3}\right)^{1/3}s^{2/3}+\ldots,$$

$$f(s)=f_0+\frac{1}{2f_0^{3/2}}\left(\frac{\delta_0}{3}\right)^{1/3}s^{2/3}+\ldots,$$

$$\varphi(s)=-\frac{2}{3}f_0\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}s^{1/3}+\ldots;$$

задача B

$$\lambda(s)=\lambda_0+\frac{1}{\delta_0\lambda_0^2}s+\ldots, \tag{15}$$

$$\alpha(s)=\frac{3}{4}\lambda_0+\frac{1}{4\delta_0\lambda_0^2}s+\ldots,\ \delta(s)=\delta_0+\frac{3}{4}\frac{1}{\lambda_0 f_0}\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta_0}{f_0^{3/2}}\right)s+\ldots,$$

$$f(s)=f_0+\frac{3}{4\lambda_0 f_0^{3/2}}s+\ldots,\ \varphi(s)=-\frac{3}{4}\lambda_0\delta_0 f_0+\ldots;$$

задача C

$$\lambda(s)=\lambda_0+\frac{5}{7}\frac{1}{\lambda_0^2\delta_1}s^{7/5}+\ldots, \tag{16}$$

$$\alpha(s)=\frac{3}{4}\lambda_0+\frac{1}{28}\frac{1}{\lambda_0^2\delta_1}s^{7/5}+\ldots,$$

$$\delta(s)=\delta_1 s^{-2/5}+\ldots,\ f(s)=f_1 s^{2/5}+\ldots,$$

$$\varphi(s)=-\frac{2}{5}\lambda_0^2\delta_1 f_1^{7/2}+\ldots$$

Здесь δ_0, f_0 и δ_1, f_1 — неизвестные параметры.

Разложения (14)—(16) используются в ходе итерационного процесса [2] нахождения решения в задачах $0\leqslant\alpha_0\leqslant\alpha_0^*(e_0)$.

На рис. 1 приводятся графики положения точки разрыва s_1 в зависимости от положения s_N в решениях задач A и C. Точки разрыва в решениях B находятся между кривыми A и C, так как при закрепленном s_N максимальное значение s_1 достигается на решении задачи C, а минимальное — задачи A. Это показано на рис. 2, где даны значения газодинамических и тепловых функций на поршне в зависимости от s_1 в решениях, имеющих одинаковое положение переднего фронта возмущений $s_N=7$. Здесь же приводятся зависимости от положения s_N значений полной и кинетической энергии в указанных решениях.

Изображенная на рис. 2 зависимость от s_1 качественно сохраняется и для других s_N. Об этом свидетельствуют графики изменения полной

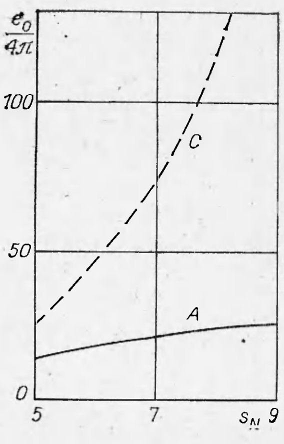

Рис. 3

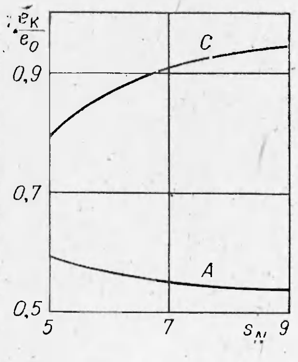

Рис. 4

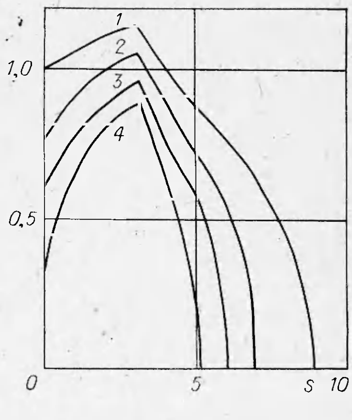

Рис. 5

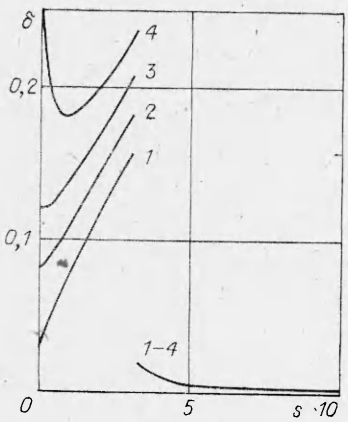

Рис. 6

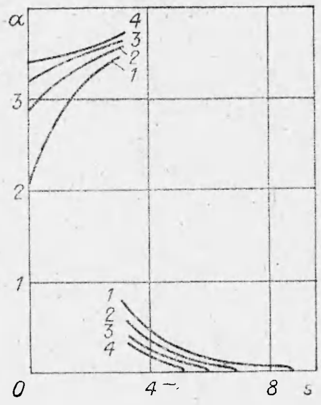

Рис. 7

энергии (рис. 3) в решениях задач A (сплошная линия) и C (штриховая) в зависимости от s_N. В решениях задач A и C интересны закономерности (рис. 4) изменения доли кинетической энергии $e_к/e_0$: в решениях задачи C она монотонно увеличивается с ростом s_N, а следовательно, с ростом энергии взрыва e_0, тогда как в решениях задач A уменьшается.

На рис. 5—7 приводятся решения задачи B о мгновенном выделении энергии $e_0 = 4\pi\ 25{,}5$ с одновременным движением теплоотводящего поршня со скоростями $\alpha_0 = 1{,}88;\ 2{,}90;\ 3{,}22;\ 3{,}40$ (линии *1—4*).

Как видим, с ростом скорости движения поршня и соответственно теплоотвода на нем уменьшается скорость переднего фронта возмущений, увеличивается скорость ударной волны, значит, уменьшается область прогрева перед ударной волной. При этом относительное изменение скорости ударной волны мало, а скорости переднего фронта волны возмущений довольно существенно.

Особого внимания заслуживает факт близости значений давлений (графики не приводятся) непосредственно за ударными волнами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коробейников В. П.** О распространении сильной сферической взрывной волны в теплопроводном газе // ДАН СССР.— 1957.— Т. 113, вып. 1.
2. **Неуважаев В. Е.** Распространение сферической взрывной волны в теплопроводном газе // ПММ.— 1962.— Т. 26, № 6.
3. **Самарский А. А., Попов Ю. П.** Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1975.
4. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1965.
5. **Волосевич П. П., Леванов Е. И.** Автомодельные решения уравнений газовой динамики с учетом нелинейной теплопроводности.— Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977.

Поступила 3/III 1986 г.

УДК 539.374, 620.178.7

К МИКРОМЕХАНИКЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

А. К. Диваков, Л. С. Коханчик, Ю. И. Мещеряков, М. М. Мышляев

(Ленинград)

Как показано в [1—4], динамическое деформирование и разрушение материалов протекает в условиях существенного распределения частиц по скоростям. Это распределение определяет не только зависимость механических свойств от скорости деформации, но и откольную прочность материала. Статистический характер протекания процессов динамического деформирования и разрушения на микроуровне позволяет по аналогии с механикой жидкости и газа использовать для характеристики этих про-