УДК 532. 54

К ОБОСНОВАНИЮ ТЕОРИИ НЕЛОКАЛЬНО-УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е. Ф. Афанасьев

(Москва)

Предложенная [1-3] нелокальная формулировка гипотезы о постоянстве горного давления при нестационарной напорной фильтрации в глубинном упругом пласте выводится из уравнений равновесия системы пористый пласт — кровля. При этом кровля рассматривается как пластина [4], а подошва пласта считается жесткой. Устанавливается выражение для масштаба зоны влияния на распределение напряжения и давления в точке.

1. Согласно теории нелокально-упругого режима фильтрации однородной жидкости в глубинном пласте [1-3] линейное уравнение нестационарного фильтрационного течения

$$(a_\rho + a)\frac{\partial p}{\partial t} - b\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{k_0}{m_0\mu_0}\nabla^2 p + \frac{G}{m_0\rho_0} \tag{1.1}$$

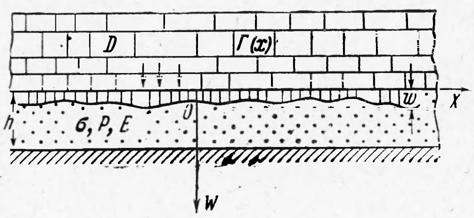
гипотетически дополняется интегральным условием постоянства горного давления $\Gamma(x_1, x_2)$ в каждой точке пласта

$$\sigma(x_1, x_2, t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \Phi\left(\frac{x_1-\xi_1}{d}, \frac{x_2-\xi_2}{d}\right) p(\xi_1, \xi_2, t)\, d\xi_1 d\xi_2 = \Gamma(x_1, x_2) \tag{1.2}$$

Здесь ρ, μ — плотность и вязкость фильтрующейся жидкости; k, m — проницаемость и пористость пласта; p — поровое давление, σ — эффективное напряжение в скелете пласта, при этом

$$\rho/\rho_0 = 1 + a_\rho(p - p_0), \qquad m/m_0 = 1 + a(p - p_0) - b(\sigma - \sigma_0)$$

индекс 0 относится к невозмущенному состоянию; a_ρ, a, b, k_0 — постоянные; G — интенсивность источников или стоков, имитирующих работу скважин; Φ — функция влияния, в качестве которой принята функция Гаусса



$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi d^2}\exp\{-(x_1^2 + x_2^2)\}$$

Если масштаб d зоны влияния гораздо меньше характерного размера области изменения давления p, то условие (1.2) переходит в обычное локальное условие постоянства горного давления [5]. Если же масштаб d относительно велик, то условие (1.2) сводится к равенству $d\sigma / dt = 0$ или $\sigma = \sigma_0$ [1, 2].

Уравнение (1.2) принимает вид

в одномерном плоскопараллельном случае

$$\sigma(x, t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x-\xi}{d}\right) p(\xi, t)\, d\xi = \Gamma(x) \tag{1.3}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{d} G(x), \qquad G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$$

в осесимметричном плоскорадиальном случае

$$\sigma(r, t) + \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(\frac{r}{d}, \frac{\rho}{d}\right) p(\rho, t)\, \rho d\rho = \Gamma(r) \tag{1.4}$$

$$\Phi(r, \rho) = \frac{1}{d^2} G(r, \rho), \qquad G(r, \rho) = 2I_0(2r\rho) \exp\{-(r^2 + \rho^2)\}$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

2. Рассмотрим одномерный плоскопараллельный случай. Толщу породы, лежащую над пористым пластом мощности h, будем моделировать бесконечной упругой пластиной (фигура), характеризующейся жесткостью D.

Пренебрегая инерционным членом и обозначая через w перемещение пластины, составим уравнение изгиба пластины

$$D\, d^4w / dx^4 = \Gamma - \sigma - p \tag{2.1}$$

Согласно закону Гуке

$$\sigma = Ew / h, \qquad w = \sigma h / E$$

где E — модуль Юнга скелета пласта.

Отметим, что в работе [4] решалась непосредственно система уравнений (1.1) и (2.1), выраженная относительно w и гидравлического напора, для случая нестационарного притока к галерее. Из-за аналитических сложностей авторы ограничились построением приближенной зависимости размера воронки депрессии от времени.

Преобразуем уравнение (2.1) к интегральному соотношению типа (1.3). Положим

$$\eta = \left(\frac{E}{hD}\right)^{1/4} x, \qquad u(\eta) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \qquad f(\eta) = -\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (2.1) после дифференцирования обеих частей по t можно представить в виде

$$d^4u / d\eta^4 + u = f \tag{2.3}$$

Используя уравнение (2.3), выразим функцию $u(\eta)$ через $f(\eta)$. Для этого применим интегральное преобразование Фурье [6], обозначая

$$U(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\eta)\, e^{i\lambda\eta} d\eta, \qquad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)\, e^{i\lambda\eta} d\eta \tag{2.4}$$

Тогда из (2.3) получим

$$U(\lambda) = F(\lambda) / (\lambda^4 + 1) \tag{2.5}$$

Отметим, что [7]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\eta\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^4 + 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(\eta\lambda)}{\lambda^4 + 1} d\lambda = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{|\eta|}{\sqrt{2}}\right) \sin \times$$

$$\times \left(\frac{|\eta|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.6}$$

Применяя к (2.5) обратное образование Фурье и теорему о свертке [6], будем иметь

$$u(\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{|\eta-\xi|}{\sqrt{2}}\right\}\sin\left(\frac{|\eta-\xi|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) f(\xi)\, d\xi \qquad (2.7)$$

Учитывая (2.2), из (2.7) после интегрирования по t получим

$$\sigma(x, t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right) p(\xi, t)\, d\xi = \Gamma(x) \qquad (2.8)$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\delta} G_1(x), \quad G_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|x|}\sin\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right), \quad \delta = \left(\frac{4hD}{E}\right)^{1/4} \qquad (2.9)$$

Отметим, что функция $G_1(x)$ нормирована в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и ее численные значения почти совпадают со значениями функции $G(x)$, определенной согласно (1.3).

Из (2.6) и (2.9) следует, что

$$G_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}\, x\lambda)}{\lambda^4 + 1}\, d\lambda \qquad (2.10)$$

Аппроксимируем функцию $(\lambda^4 + 1)^{-1}$, входящую в (2.10) экспонентой

$$(\lambda^4 + 1)^{-1} = \exp\left(-{}^1/_2\nu^2\lambda^2\right) \qquad (2.11)$$

где постоянная ν будет определена ниже. Тогда согласно (2.10) получим [7]

$$G_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\nu} \exp\frac{-x^2}{\nu^2}$$

Отсюда, учитывая (2.9), имеем

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\nu\delta)} \exp\frac{-x^2}{\nu^2} \qquad (2.12)$$

В результате из (1.3) и (2.12) имеем

$$\Phi\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d} \exp\frac{-x^2}{d^2}, \quad \Phi_1\left(\frac{x}{\delta}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\nu\delta)} \exp\frac{-x^2}{(\nu\delta)^2} \qquad (2.13)$$

Из (2.12) следует, что интегральное условие постоянства горного давления (1.3), предложенное как гипотеза, и уравнение (2.8), полученное на основании уравнений теории упругости, совпадут, если положить

$$d = \nu\delta \qquad (2.14)$$

Отметим, что выбор функции $\Gamma(x)$ в правой части соотношения (2.8) для решения обычных для теории фильтрации задач несуществен, так как в нестационарном случае важно соотношение между производными по времени $\partial\sigma / \partial t$ и $\partial p / \partial t$, а не между функциями σ и p. Традиционно эта функция интерпретируется как горное давление.

Постоянную ν, использованную при аппроксимации функции $(\lambda^4 + 1)^{-1}$ можно найти, например, из равенства

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4 + 1} = \int\limits_0^{\infty} \exp\frac{-\nu^2\lambda^2}{2}\, d\lambda \qquad (2.15)$$

Тогда ν и неизвестный параметр d будут равны

$$\nu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \qquad d = 2\left(\frac{4hD}{\pi^2 E}\right)^{1/4} \tag{2.16}$$

3. Рассмотрим осесимметричный плоскорадиальный случай. Обозначим через r радиальную координату и сохраним обозначения п. 2.

В осесимметричном случае уравнение изгиба пластины будет иметь вид

$$D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{dr}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]\right\} - \Gamma - \sigma - p \tag{3.1}$$

$$(\sigma = Ew/h, \qquad w = \sigma h/E)$$

Как и в плоском случае, преобразуем уравнение (3.1) к интегральному соотношению. Положим

$$\eta\left(\frac{E}{hD}\right)^{1/4} r, \qquad u(\eta) = \frac{\partial\sigma}{\partial t}, \qquad f(\eta) = -\frac{\partial p}{\partial t} \tag{3.2}$$

Тогда уравнение (3.1) после дифференцирования обеих частей по t можно представить в виде

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left\{\eta\frac{d}{d\eta}\left[\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{du}{d\eta}\right)\right]\right\} + u = f \tag{3.3}$$

Применим к (3.3) интегральное преобразование Ханкеля [6] с ядром $J_0(\lambda, \eta)$, здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Обозначим

$$U(\lambda) = \int_0^\infty u(\eta) J_0(\lambda\eta)\,\eta\, d\eta, \qquad F(\lambda) = \int_0^\infty f(\eta) J_0(\lambda\eta)\,\eta\, d\eta \tag{3.4}$$

Умножая обе части уравнения (3.3) на $J_0(\lambda, \eta)\eta$ и интегрируя по η от 0 до ∞, получаем [7]

$$U(\lambda) = F(\lambda) \,/\, (\lambda^4 + 1) \tag{3.5}$$

Применяя к (3.4) формулу обращения и учитывая (3.5), будем иметь

$$u(\eta) = \int_0^\infty f(\xi)\,\xi\, d\xi \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\lambda) J_0(\xi\lambda)}{\lambda^4 + 1}\, d\lambda \tag{3.6}$$

Учитывая (3.2), из (3.6) после интегрирования по t получим

$$\sigma(r, t) + \int_0^\infty \Phi_1\left(\frac{r}{\delta}, \frac{\rho}{\delta}\right) p(\rho, t)\,\rho\, d\rho = \Gamma(r) \tag{3.7}$$

$$\Phi_1(r, \rho)\frac{1}{\delta^2} G_1(r, \rho), \quad G_1(r, \rho) = 2\int_0^\infty \frac{J_0(\sqrt{2}\, r\lambda) J_0(\sqrt{2}\,\rho\lambda)}{\lambda^4 + 1}\, d\lambda \tag{3.8}$$

Отметим, что функция $G_1(r, \rho)$ нормирована по обоим аргументам в промежутке $(0, \infty)$.

Аппроксимируем функцию $(\lambda^4 + 1)^{-1}$, входящую в (3.8) экспонентой (2.11).

Тогда, согласно (3.8), получим [7]

$$G_1(r, \rho) = \frac{2}{\nu^2} I_0\left(\frac{2r\rho}{\nu^2}\right) \exp\frac{-(r^2 + \rho^2)}{\nu^2}$$

Отсюда, учитывая (3.8), имеем

$$\Phi_1(r, \rho) = \frac{2}{(\delta\nu)^2} I_0\left(\frac{2r\rho}{\nu^2}\right) \exp\frac{-(r^2 + \rho^2)}{\nu^2} \tag{3.9}$$

В результате из (1.4) и (3.9) имеем

$$\Phi\left(\frac{r}{d}, \frac{\rho}{d}\right) = \frac{2}{d^2} I_0\left(\frac{2r\rho}{d^2}\right) \exp\frac{-(r^2+\rho^2)}{d^2} \tag{3.10}$$

$$\Phi_1\left(\frac{r}{\delta}, \frac{\rho}{\delta}\right) = \frac{2}{(\nu\delta)^2} I_0\left(\frac{2r\rho}{(\nu\delta)^2}\right) \exp\frac{-(r^2+\rho^2)}{(\nu\delta)^2}$$

Из (3.10) видим, что гипотетическое условие (1.4) и выведенное здесь уравнение (3.7) совпадут, если принять (2.14), откуда имеем приближенное значение $\nu = 2 / \sqrt{\pi}$. Тогда, согласно (3.8) и (3.11), ранее неопределенный параметр d выражается формулой (2.16). Отсюда следует важный результат, заключающийся в том, что в плоскопараллельном и плоскорадиальном случаях значение параметра d, входящего в нелокальное условие постоянства горного давления (1.2), одинаково.

Отметим, что если постоянную аппроксимации ν определять из условия минимума среднеквадратичного отклонения функции $(\lambda^4 + 1)^{-1}$ от $\exp(-\nu^2\lambda^2 / 2)$, то для ν получается уравнение

$$V_{3/2}(\nu^2, 0) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\nu^3} = 0$$

где $V_{3/2}(x, y)$ — функция Ломмеля двух переменных [7].

4. Из проведенных исследований следует, что интегральное условие (1.2) постоянства горного давления в каждой точке пласта, ранее введенное гипотетически при помощи функции Гаусса, очень хорошо согласуется с уравнениями (2.8) и (3.7), которые получаются из уравнений равновесия системы пористый пласт — толща породы, лежащая над пластом.

Постоянная d, входящая в условие (1.2), с большой точностью равна

$$d = 2\,(4hD / E)^{1/4}$$

При решении конкретных задач теории нелокально-упругого режима фильтрации можно пользоваться уравнением постоянства горного давления (3.8) или (3.7), полученным на основании уравнения теории упругости, при этом ядро, входящее в уравнение, будет иметь различный вид в зависимости от того, плоскопараллельная или плоскорадиальная задача. Проще использовать условие постоянства горного давления (1.2), в которое входит хорошо изученная функция Гаусса, как это сделано в работах [1,2], взяв в качестве параметра d определенное выше значение.

Автор благодарит В. Н. Николаевского за ряд полезных замечаний.

Поступила 25 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. К изучению нелокальных эффектов при упругом режиме фильтрации в глубинных пластах. ПМТФ, 1968, № 4.
2. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. Нелокально-упругий режим фильтрации и восстановление давления в глубинных пластах. ПМТФ, 1969, № 5.
3. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
4. Engelund F., Fage S. The effect of upper stratum rigidity on pumping from elastic artesian aquifers. Techn. Univ. Denmark. Coastal Engng laboratory. Hydraulic Lab. Basic Res. Progr. Rept., 1969, No. 19.
5. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой среде. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2.
6. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.