

УДК (091.2)/548.0

**РОЛЬ РУССКИХ УЧЕНЫХ В ОТКРЫТИИ РЕНТГЕНОСТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА
В НАЧАЛЕ НАУЧНОЙ РЕВОЛЮЦИИ XX ВЕКА****В.С. Урусов**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: urusov@geol.msu.ru

Статья поступила 5 февраля 2014 г.

В связи со столетием открытия явления дифракции рентгеновских лучей кристаллами (Макс фон Лауэ, 1912) и основ рентгеноструктурного анализа (Лоуренс Брэгг, 1913) отмечаются основные вехи этого выдающегося события в истории науки. Особое внимание уделяется роли российских ученых (Е.С. Фёдорова, Г.В. Вульфа) в появлении и первых шагах становления этого открытия, одной из основ научной революции первой половины прошлого века.

Ключевые слова: открытие Лауэ, основы рентгеноструктурного анализа, работы Л. и Г. Брэггов, работы Вульфа, симметрия кристаллической решетки, работы Федорова.

Когда в прошлом году научный мир отмечал 100-летний юбилей выдающегося открытия дифракции кристаллами рентгеновских лучей, сделанного Максом фон Лауэ (1879—1960), и заложения в следующем году основ рентгеноструктурного анализа Уильямом Лоуренсом Брэггом (1890—1971), этим событиям был посвящен специальный объединенный выпуск двух основных международных кристаллографических журналов — *Acta Crystallographica* и *Zeitschrift für Kristallographie*. Этот первый номер тома **A68** (2012) содержал тексты основных докладов, представленных на Лауэ-симпозиуме, который состоялся в марте 2012 г. в Мюнхене (Германия). Вводная статья номера W.W. Schmahl & W. Steurer "Laue centennial" [1] и особенно статья M. Eckert "Disputed discovery: the beginnings of X-ray diffraction in crystals in 1912 and its repercussions" [2], опубликованная параллельно в обоих журналах, излагают историю открытия Лауэ. В этой связи следует отметить, что версии этой истории, изложенной ниже и в указанных выше статьях, во многом различаются. Во-первых, в последних ни словом не упоминается о роли в подготовке открытия не только выдающихся русских кристаллографов (Евграфа Степановича Федорова (1853—1919) и Георгия Викторовича Вульфа (1863—1925)), но даже и крупнейшего немецкого кристаллографа того времени — Пауля фон Грота (1843—1927), работавшего в том же Мюнхенском университете, где было сделано это выдающееся открытие. Это прямо противоречит свидетельству самого М. Лауэ в его "Истории физики" [3] о том, что он видел модели кристаллических решеток и слушал лекции Грота, в которых тот много говорил о решетчатом строении кристаллов (см. ниже). Вместо этого автор работы [2] предпочитает версию, приведенную Лауэ в его Нобелевской лекции о том, что решающий момент ("flash of inspiration") произошел "одним вечером в феврале 1912 г.", когда его посетил известный в будущем кристаллограф Пауль Эвальд (1888—1985), работавший над своей диссертацией под руководством известного физика Арнольда Зоммерфельда (1868—1951), и между ними произошла дискуссия относительно темы этой диссертации, посвященной отражению света от сетки диполей в ромбическом кристалле. Однако воспоминания об этом событии в существенных деталях различаются: Зоммерфельд в 1924 г. заметил, что он был третьим участником этой бе-

седы. В связи с таким разногласием между своими коллегами, Лауэ попросил Эвальда вмешаться, так как он не хотел, чтобы возникали различные версии об истоках его открытия, и тот сообщил в письме Зоммерфельду, что его (Эвальда) собственная "плохая историческая память" дисквалифицирует его как свидетеля. Как бы то ни было, историкам науки известно, что А. Зоммерфельд был против участия своего ассистента Вальтера Фридриха в этом эксперименте, и Лауэ пришлось проявить немалое дипломатическое искусство, чтобы склонить его и Пауля Книппинга продолжать предложенный им эксперимент. С другой стороны, известно, что П. Эвальд уже в середине 1913 г. изложил в печати [4] свой метод, объединивший подходы Лауэ [5] и Брэгга к анализу дифракционной картины, с помощью перехода к "обратному пространству", известному сейчас как "сфера Эвальда". Таким образом, Эвальд по праву оказался одним из пионеров нового метода и в дальнейшем внес немалый вклад в развитие рентгеноструктурного анализа.

Остается добавить, что вполне объективный и краткий анализ истории открытия М. Лауэ содержится во введении к книге Мартина Бургера [6], где упомянуты все основные действующие лица этого события, во главе с выдающимися учеными того времени, работавшими в Мюнхене (главой кристаллографов Паулем Гротом, открывшим новые лучи его имени Вильгельмом Конрадом фон Рентгеном (1845—1923) и классиком атомной спектроскопии Арнольдом Зоммерфельдом), а также решающий вклад в подготовке открытия, сделанный в конце XIX века примерно в одно и то же время русским Е.С. Фёдоровым, немцем Артуром Шенфлисом (1853—1928) и англичанином Уильямом Барлоу (1845—1934), друг за другом и разными методами создавшими теорию пространственного строения кристаллических решеток*. Среди более молодых членов этого могучего сообщества первоклассных физиков в первую очередь упоминаются М. Лауэ, Петер Дебай (1884—1966) и Пауль Эвальд (ассистенты Зоммерфельда). Темой работы последнего было изучение оптических свойств кристаллов, а именно поведение упорядоченной сетки диполей в анизотропной среде ромбического кристалла. Когда Эвальд знакомил Лауэ с содержанием своей работы, у того впервые возник вопрос, что может произойти при пропускании через кристалл света с длиной волны, соизмеримой с расстояниями между диполями. Такой свет был представлен рентгеновскими лучами. Вероятно, именно это и было побудительным толчком для постановки в скором времени исторических опытов Макса Лауэ, Пауля Книппинга и Вальтера Фридриха.

Вполне закономерно, что это открытие, всколыхнувшее весь научный мир и положившее начало рентгеновской кристаллографии и кристаллохимии (науки о законах атомного строения кристаллов), было сделано в Мюнхенском университете. Именно здесь Вильгельм Рентген открыл в 1895 г. новое коротковолновое излучение, названное им X-лучами и впоследствии получившее его имя. Здесь работал самый известный кристаллограф того времени Пауль Грот, который основал в 1876 г. первый международный кристаллографический журнал *Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie*** . Одним из наиболее активных авторов этого журнала с 1891 по 1915 г. был наш великий ученый Евграф Степанович Фёдоров, опубликовавший в нем 115 статей, среди которых были и работы монографического характера. Немецкого и русского кристаллографов, Грота и Фёдорова, связывали не только профессиональные, но и дружеские отношения. Именно Грот представил Фёдорова в 1896 г. к избранию членом-корреспондентом Баварской Академии наук***. Издана их переписка [8], содержащая 196 писем Фёдорова Гро-

* Е.С. Фёдоров и А. Шенфлис находились в переписке друг с другом, и хотя книга Шенфлиса, содержащая вывод 230 пространственных групп симметрии, вышла в 1891 г., он знал о том, что Федоров изложил по-русски свои основные выводы в 1890 г., и признал приоритет Фёдорова. Барлоу, вероятно, был знаком с работами Шенфлиса перед своим выводом в 1894 г. [7].

** *Zeitschrift für Kristallographie* издается до сих пор, с десятилетним перерывом в 1945—1955 годы; в 2013 г. вышел 228 том. С 1924 по 1945 г. М. Лауэ был редактором этого журнала.

*** В 1901 г. Е.С. Фёдоров был избран адъюнктом Императорской Академии наук по кафедре минералогии. Однако отказ Академии от организации Минералогического института заставил Фёдорова через несколько лет уйти из Академии, что он и сделал в резком письме на имя Президента академии великого князя К.К. Романова.

ту и 27 избранных писем Грота — Федорову. Грот глубоко усвоил и убежденно разделял взгляды Фёдорова на внутреннее строение кристаллов, основанные на фёдоровской теории 230 пространственных групп симметрии. Поэтому легко понять, что со "стороны кристаллографии" Грот, а значит и Фёдоров, оказали решающее влияние на постановку опытов Лауэ и последовавшее за ними открытие.

Справедливости ради надо упомянуть, что только в третьей статье номера [9], носящей исторический характер, упомянута роль Е.С. Фёдорова как пионера теории пространственных групп симметрии. Вместе с тем автор статьи [9] много внимания уделяет работам английского кристаллографа У. Барлоу, независимо от Фёдорова и частично от Шенфлиса, но позже них установившему 230 пространственных групп и создавшему первые модели кристаллов, которые хранятся ныне в Королевском Институте Лондона. Остается только сожалеть, что зарубежному читателю осталась неизвестной выдающаяся историческая трилогия ("кристаллографическая сага") Иллариона Илларионовича Шафрановского (1907—1994) [7], в которой наиболее подробно и объективно рассмотрена история кристаллографии от ее рождения до последних дней жизни автора.

Так или иначе, именно в "Мекке физики" — Мюнхене — образовался тот клуб ученых, который собрал все важнейшие знания того времени и в котором создалась та мощная творческая среда, которая необходима для рождения новых идей. В Институте теоретической физики Мюнхенского университета, созданного знаменитым Арнольдом Зоммерфельдом, физик-теоретик Макс фон Лауэ выдвинул гипотезу и вместе со своими помощниками Вальтером Фридрихом и Паулем Книппингом экспериментально доказал, что пучок рентгеновских лучей, проходя через кристалл, испытывает дифракцию (отражение от атомных плоских сеток), и на фотографической пластинке, помещенной за кристаллом, образуется картина, состоящая в результате интерференции отраженных кристаллом волн из закономерно расположенных темных пятен. Лауэ дал первое теоретическое объяснение этим фактам, принимая во внимание еще гипотетические в то время представления о внутреннем строении кристалла, в котором атомы занимают строго регулярные позиции в трехмерной пространственной решетке. Он предположил также, что дифракция происходит благодаря взаимодействию первичных рентгеновских лучей с атомами, которые становятся центрами колебаний, а волны испускаемого ими характеристического излучения интерферируют между собой. Однако для опыта он и его ученики взяли кристалл медного купороса (халькантита) низшей триклинной симметрии, и дифракционная картина на фотопластинке не давала прямых указаний на симметрию кристалла.

В 1914 г. за открытие дифракции рентгеновских лучей М. Лауэ был удостоен Нобелевской премии (денежную часть премии он разделил со своими помощниками в постановке эксперимента). В своей "Истории физики" [3] Лауэ так писал об этом времени: "Особенное значение для меня имело то, что в Мюнхене была еще жива традиция исследования пространственной решетки кристаллов... В коллекциях университетского института можно было видеть модели решеток. Большая роль принадлежит также минералогу Паулю Гроту, который в своих лекциях постоянно говорил о решетках".

О впечатлении, которое произвело на Е.С. Фёдорова открытие дифракции рентгеновских лучей, тот написал в письме от 2 октября 1912 г. революционеру, ученому и поэту Н.А. Морозову: "Для нас, кристаллографов, это открытие первоклассной важности, потому что теперь впервые с полной наглядностью воспроизведено то, что нами лишь теоретически кла-лось в основу представления о структуре кристаллов, на чем, в частности, основан и кристаллохимический анализ" [7].

Почти немедленно с большим энтузиазмом откликнулся на открытие Лауэ другой выдающийся русский кристаллограф Георгий (Юрий) Викторович Вульф. Уже в январе 1913 г., т.е. через полгода после открытия нового явления, он опубликовал в журнале "Природа" статью [10], где подробно описал и проиллюстрировал опыты Лауэ с учениками и первые попытки теоретического объяснения полученных ими результатов. Его оценка этого события дана в следующих словах: "В июле прошлого года в физической лаборатории Мюнхенского университета была сделана замечательная работа, давшая блестящее подтверждение гипотезы о сетчатом

строении кристаллов, такое блестящее, что при некотором преувеличении можно было бы, пожалуй, сказать, что теперь мы увидели решетчатое строение кристаллов не только нашим умственным, но и материальным взором". Заканчивает Вульф эту свою статью следующими словами: "Открытие действия кристаллов на рентгеновские лучи принадлежит к одному из самых блестящих открытий последнего времени и замечательных по простоте идеи, лежащей в его основе. Недаром оно овладело вниманием всех физиков и кристаллографов. Теперь во всех научных центрах мира повторяют и видоизменяют опыты Лауэ, Фридриха и Книппинга, и мы, по всей вероятности, скоро услышим вести о многих интересных работах и открытиях, порожденных замечательным открытием мюнхенских физиков. Уже мы читаем известия, что английский физик Брэгг получил подобное же явление, отразив пучок рентгеновских лучей от листочка слюды".

Действительно, события стали развиваться стремительно, и Уильям Лоуренс Брэгг-младший, параллельно с Г.В. Вульфом, быстро продвигался к цели. Брэгг сообщил в Кембридже о своей интерпретации опытов Лауэ 11 ноября 1912 г., а уже в феврале 1913 г. Вульф отправляет в печать статью "О рентгенограммах кристаллов", которая вышла в *Physikalische Zeitschrift* [11]. В ней он подробно объяснил происхождение пятен на рентгенограммах Лауэ, используя законы отражения света от атомных плоскостей (сеток) в кристаллической структуре. Он, независимо от Брэгга и лишь на 2-3 месяца позже него, выводит основную формулу рентгеноструктурного анализа, связывающую длину волны, угол отражения и межплоскостное расстояние: $n\lambda = 2d_{hkl}\sin\theta$ (λ — длина волны рентгеновского излучения; d_{hkl} — межплоскостное расстояние для плоскостей с индексами hkl ; n — порядок; θ — угол отражения).

Очень скоро, в июне 1913 г., в журнале "Природа" появилась вторая статья Г.В. Вульфа [12], в которой он более подробно и популярно излагает сущность открытия Лауэ и свою теорию дифракции рентгеновских лучей. В заключение он пишет: "Статья эта представляет переосмысление исследования, опубликованного автором в немецком физическом журнале (*Physikalische Zeitschrift*). В то время как статья уже заканчивалась, автор получил от английского физика Брэгга письмо и отдельный оттиск его работы, опубликованной в трудах Кембриджского философского общества. В этой работе Брэгг приходит совершенно к тем же выводам, как и автор этой статьи. Кроме того, в английском журнале "Природа" (*Nature*) появилась заметка японского физика Терада, в которой он также приходит к тем же самым результатам, но особый интерес его заметки заключается в том, что он наблюдал отражение рентгеновских лучей не на фотопластинке, а непосредственно на флюоресцирующем экране, так что, вращая кристалл, он мог непосредственно наблюдать изменения в расположении светлых пятен, вызываемых этим вращением. Все это показывает, с одной стороны, как велик интерес, возбужденный вновь открытыми явлениями отражения рентгеновских лучей на молекулярных плоскостях кристаллов, с другой же стороны, это указывает на правильность полученных результатов". Добавим, что в этом же 1913 г. Г.В. Вульф опубликовал еще 5 статей на ту же тему в различных немецких научных журналах, в том числе в *Zeitschrift für Kristallographie* [13], а также в отечественном журнале "Физика" [14].

Тем временем Брэгг-младший подтвердил свою интерпретацию дифракции рентгеновских лучей в опыте с пластинкой слюды. 8 декабря 1912 г. он посылает и публикует короткое сообщение об этом эксперименте в *Nature*. Затем последовали экспериментальные определения кристаллических структур алмаза, цинковой обманки, флюорита и др. В 1915 г. оба Брэгга — отец и сын — получили свою Нобелевскую премию "за их заслуги в анализе кристаллических структур с помощью рентгеновских лучей".

В 1914 г. в статье, опубликованной по-русски [15] и по-немецки [16], Е.С. Фёдоров подчеркивает значение открытия Лауэ и развитие этого нового направления в работах английских физиков — отца и сына Брэггов: "Применение рентгеновских лучей дало в руках У.Л. Брэгга (и его отца) средства привести к заключениям, чрезвычайно важным для теории структуры кристаллов. Отчасти эти заключения неожиданны, по крайней мере, в том отношении, что ожидалось видеть в точках правильных систем центры химических частиц, тогда как опыты назван-

ного ученого привели к выводу, что это центры атомов". Далее Фёдоров указывает на приоритет своего вывода пространственных групп: "Не могу воздержаться от заявления, что я никак не думал дожить до действительного определения расположения атомов, предусмотренных в указанных мной сочинениях. В письме к проф. Гроту я писал, что, пожалуй, детальные применения (этих) систем ... начнут совершаться через 100 лет".

В протоколе заседания Минералогического общества от 11 февраля 1914 г. сообщается: "Проф. Е.С. Фёдоров, указав на огромные заслуги М. Лауэ и У.Л. Брэгга в деле изучения кристаллического строения вещества с помощью рентгеновских лучей, предложил собранию избрать названных ученых почетными членами Общества... Оба ученых, М. Лауэ и У.Л. Брэгг, *par acclamation* избраны почетными членами Общества" [7]. Сохранилось письмо У.Л. Брэгга от 17 февраля 1914 г. [7], где он выражает признательность Фёдорову за его замечания и советы: "Я очень благодарен Вам за письмо, в котором Вы даете рекомендации относительно способов описания пространственного расположения точек. Я с тем большим интересом рассмотрел Ваш метод, что для меня бывает весьма трудно описать структуру, после того как я ее надлежащим образом изучу. Если уже существует признанный способ определения положений атомов в кристаллах, я был бы Вам весьма обязан, если бы Вы согласились сообщить мне его. Я попытаюсь описывать при помощи Вашего способа все те многочисленные кристаллы, с которыми мне приходится иметь дело, хотя они могут оказаться и чересчур сложными". Много позже в письме от 14 мая 1958 г. к историку науки Г.Н. Кованько [7] У.Л. Брэгг так вспоминал о начале рентгеноструктурного анализа: "Фёдоров был в то время для меня почти легендарной личностью, разработавшей 230 классов кристаллов. Тот интерес, который существовал в то время, был интересом к внешней форме кристаллов, а не к их внутренней структуре. Когда я начал анализировать кристаллы X-лучами, я ничего вообще не знал об их геометрии. Для нас было поистине удивительным открытием, что великие люди, подобные Фёдорову и Барлоу, которого я тоже знал, изучили внутреннюю геометрию кристаллов и дали твердое обоснование нашей работе".

В указанных выше русской и немецкой версиях своей работы [15, 16], Фёдоров обратил внимание на то, что уже в первых рентгеноструктурных определениях были найдены структуры кристаллов (пирит, алмаз, корунд), которые описываются асимморфными пространственными группами. Сам Фёдоров в своих ранних работах считал их маловероятными, поскольку эти группы содержат плоскости скольжения вместо обычных плоскостей отражения и винтовые оси вместо осей вращения, т.е. элементы симметрии, включающие в себя одновременное отражение или вращение и перенос (трансляцию) в пространстве. Таким группам симметрии не соответствуют структуры, которые Фёдоров описывал как заполняющие пространство без промежутков параллельные укладки многогранников, названных им параллелоэдрами. Именно на таких правильных укладках Фёдоров и его ученики строили свой "дорентгеновский" кристаллохимический анализ. Первые успехи рентгеноструктурного анализа заставили его отказаться от столь ортодоксальной точки зрения. Сейчас достоверно установлено, что кристаллические структуры неорганических веществ и минералов с такими асимморфными пространственными группами, как $P2_1/c$ и $Pnma$, являются лидерами распространенности: к ним относится в сумме почти 12 % всех изученных структур [17]. Еще более велико преимущество в распространенности асимморфных пространственных групп для молекулярных органических кристаллов: почти 2/3 структурно изученных кристаллов описываются несколькими (около десятка) такими группами, а на одну пространственную группу — $P2_1/c$ — приходится почти 29 % всех структур [18].

Наиболее подробный анализ первых достижений рентгеноструктурного анализа кристаллов Е.С. Фёдоров дал в статье, опубликованной в мартовском номере журнала "Природа" за 1915 г. [19]. В начале статьи он пишет: "Нельзя не считать великим завоеванием человеческого ума то обстоятельство, что он и до открытия этих способов привел к перечислению всех возможных расположений; но то, что было сделано до сих пор, было лишь введением в новую область, экспериментальным методом которой теперь положено прочное обоснование. Однако, как это почти всегда и бывает, вводная часть новой науки, ясно поставив ближайшие вопросы и

задачи, само собой наталкивала на открытие новых методов, когда это оказалось вообще возможным по ходу развития физических наук”.

На следующих страницах Е.С. Фёдоров подробно разъясняет читателю основные геометрические принципы строения некоторых кристаллов, которые были рентгенографически изучены к тому времени Брэггами: среди них кристаллы типа поваренной соли NaCl, флюорита CaF₂ и сфалерита ZnS. Он делает это с помощью заполнения пространства такими параллелоэдрами, как кубы и ромбододекаэдры, и последующего заселения части (или всех) вершин этих многогранников атомами разного сорта. Фёдоров отдает должное вкладу в общую работу Брэгга-отца, который предложил заменить “белый” рентгеновский луч, состоящий из волн разной длины, на монохроматический, полученный от Pd-антикатада, что значительно упростило задачу интерпретации результатов эксперимента. За этим следует объяснение принципов дифракции и интерференции рентгеновских лучей, отраженных плоскими атомными сетками в кристаллах. Он по существу повторяет вывод знаменитой формулы Брэгга-сына, не упоминая, правда, о вкладе Г.В. Вульфа.

На последних страницах статьи Е.С. Фёдоров, вероятно, впервые в отечественной литературе, уделяет значительное внимание вопросу об относительных интенсивностях измеренных рентгеновских отражений разного порядка. Он связывает их с отношениями атомных весов и числом входящих в химическую формулу атомов, что было вполне логично для того времени, когда только начинает создаваться квантовая теория атомной структуры в трудах Нильса Бора (1913), Генри Мозли (1913) и др. Например, в структуре KCl (тип галита — поваренной соли) интенсивности отражений 1-го порядка от граней куба (100) очень слабые из-за интерференции (погашения) отражений от соседних сеток, заполненных ионами K⁺ и Cl⁻ со сдвигом относительно друг друга (ион K⁺ над ионом Cl⁻, и наоборот), что связано с их соседством в Периодической системе элементов и близостью их атомных весов (Cl 35,5, K 39). Наоборот, отражения 2-го порядка отличаются наибольшей интенсивностью из-за наложения отражений от одинаково заселенных плоскостей, расположенных через один друг от друга в этой ориентации. Аналогичным образом для флюорита CaF₂ почти полностью погашаются отражения 1-го порядка от граней куба, на которых чередуются плоскости, заполненные ионами Ca²⁺ (атомный вес 40) и вдвое большего количества ионов F⁻ (атомный вес 19). Наоборот, в сфалерите ZnS эти отражения еще достаточно сильные из-за различия вдвое атомных весов (Zn 65 и S 32), но отражения 3-го порядка почти полностью погашаются.

Сейчас мы знаем, что связь интенсивности отражений с атомными весами является не прямой, а опосредованной. На самом деле рентгеновские лучи отражаются от электронной плотности атомных сеток, т.е. дифракция связана с числами электронов в оболочках атомов, в рассматриваемых выше случаях — ионов. Они равны 18 для K⁺ и Cl⁻ (электронная оболочка инертного газа аргона), 18 для Ca²⁺ и 10 (оболочка инертного газа неона) для F⁻. Именно этот факт приводит к почти полному погашению отражений 1-го порядка от плоскостей куба и удвоению отражений 2-го порядка для KCl и CaF₂. Очевидно, что Фёдоров был недалек от правильного ответа на эту задачу рождавшегося на его глазах рентгеноструктурного анализа, но полное понимание этих фактов потребовало еще некоторого времени, когда квантовая теория атомной структуры оказалась в состоянии полностью решить эту проблему.

Заканчивая эту заметку, посвященную 100-летию одного из самых замечательных открытий в истории науки, без которого нельзя себе представить развитие и современное состояние физики, химии, минералогии, молекулярной биологии и других отраслей естествознания, уместно снова обратиться к словам его автора М. Лауэ [3]: “История физики постоянно дает нам все новые примеры того, как две совершенно независимые, развитые различными школами теории, например, оптика и термодинамика, или волновая теория рентгеновских лучей и атомная теория кристаллов, неожиданно сходятся и свободно соединяются друг с другом. Кто мог испытать в течение своей жизни подобное в высшей степени поразительное событие или, по крайней мере, в состоянии мысленно его испытать, тот не сомневается больше в том, что сходящиеся теории содержат если не полную истину, то все же значительное ядро объективной, свободной от человеческих прибавлений истины. Иначе надо было бы рассматривать соедине-

ние этих теорий как чудо. Идеалом для истории физики должно быть стремление как можно яснее показать подобные события”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schmahl W.W., Steurer W.* // Acta Crystallogr. – 2012. – **A68**, N 1. – P. 1 – 2.
2. *Eckert M.* // Z. Kristallogr. – 2012. – **227**. – S. 27 – 35.
3. *Laue M.* Geschichte der Physik. – Bonn, 1950 (имеется русский перевод: М. Лауэ. История физики. – М., 1956).
4. *Laue M.* // Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen. – Leipzig, 1913.
5. *Ewald P.* // Phys. Z. – 1913. – **14**. – S. 465 – 472.
6. *Бургер М.* Структура кристаллов и векторное пространство. – М: ИЛ, 1961 (Vector space and its application in crystal-structure investigations. – N.Y., L., 1959).
7. *Шафрановский И.И.* История кристаллографии. 1. С древнейших времен до начала XIX столетия. – Л.: Наука, 1978. 2. XIX век. – Л.: Наука, 1980. 3. Кристаллография в СССР (1917-1991). – С.-Петербург: Наука, 1996.
8. *Евграф Степанович Фёдоров.* Научное наследство. Переписка. Неизданные и малоизвестные работы. – Л.: Наука, 1991.
9. *Kubbinga H.* // Acta Crystallogr. – 2012. – **A68**, N 1. – P. 3 – 29.
10. *Вульф Г.В.* // Природа. Январь 1913. – С. 27.
11. *Wulff G.V.* // Phys. Zs. – 1913. – **Bd. 14**. – S. 217.
12. *Вульф Г.В.* // Природа. Июнь 1913. – С. 667.
13. *Wulff G.V.* // Zs. Krystallogr. – 1913. – **Bd. 52**. – S. 65.
14. *Вульф Г.В.* // Физика. – 1913. – № 1. – С. 10.
15. *Фёдоров Е.С.* // Зап. Горн. ин-та. – 1914. – **5**, Вып. 1. – С. 68.
16. *Fedorow E.* // Z. Krist. Miner. – 1914. – **Bd. 54**, N. 2. – S. 163.
17. *Урусов В.С., Надежнина Т.Н.* // Журн. структур. химии. – 2009. – **50**, Прилож. – С. S26.
18. *Зоркий П.М.* Симметрия молекул и кристаллических структур. – М.: Изд-во МГУ, 1986.
19. *Фёдоров Е.С.* // Природа. Март 1915. – С. 76 – 81.