

4. Chairfield C. The relationships between the fracture toughness of WC—Co cemented carbides and their microstructural parameters // 5th Europ. Symp. Powder Metallurgy Sodertalje, 1978: Proc. — Stockholm, 1978. — V. 2.

г. Томск

Поступила 4 /VIII 1993 г.

УДК 539.3

*Н.С. Астапов, А.Г. Демешкин, В.М. Корнев*

#### **ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

В [1] отмечается, что характерной особенностью поведения многих конструкций при действии сжимающих усилий является периодичность начальной формы выпучивания в направлении сжатия при потере устойчивости. Однако часто окончательная форма выпучивания таких конструкций имеет вид ярко выраженного одного или небольшого числа выпучиваний. Локализация выпучивания обусловлена существованием точки бифуркации при достижении нагрузкой наибольшего значения или после него, в которой начальная форма потери устойчивости теряет единственность [1]; причем после бифуркации периодическая форма выпучивания сменяется локализованным выпучиванием, часто это происходит мгновенно. В [2] указывается, что механизм локализации выпучивания может представлять собой нелинейное взаимодействие форм выпучивания с близкими значениями длин волн. Исследование локализации выпучивания моделей реальных конструкций показывает, что основные закономерности процесса описываются одномерной моделью поведения стержня [1]. В [3] отмечается, что механизм потери устойчивости в структуре композитного материала, несмотря на специфические особенности, аналогичен механизму потери устойчивости стержня в упругой среде.

В данной работе экспериментально исследуется выпучивание гибкого стержня, лежащего на упругом основании. Здесь необходимо отметить возникающие трудности. Так, справедливость формулы Эйлера для критической нагрузки продольно-сжатого стержня (1744 г.) была окончательно подтверждена лишь через 150 лет опытами И.Баушингера (1889 г.), А. Консидере (1889 г.), Л. Тетмайера (1903 г.) и Т. фон Кармана (1910 г.), в которых много внимания уделялось шарнирному опиранию, центральному приложению сжимающей нагрузки и выполнению других условий, предусмотренных теорией. Благодаря принятию таких предосторожностей результаты опытов приближались к нагрузке Эйлера с точностью до 1,5 % [4]. Теоретическое исследование задачи выпучивания стержней, лежащих на нескольких упругих опорах, впервые (1902 г.) выполнено Ф.С. Ясинским [4, 5]. Однако, несмотря на то что теория балок и плит, лежащих на упругом основании, является в настоящее время весьма разработанным разделом механики, существующие методы расчета еще далеко несовершенны и не дают ответа на множество вопросов, выдвигаемых практикой. Как отмечается в [6], большая часть этих методов носит слишком сложный для практических вычислений характер; не могут считаться совершенными и те гипотезы, которые принимаются за основу при построении математических моделей.

В данной работе экспериментально установлена возможность неустойчивого поведения стержня на упругом основании, что согласуется с теоретическими построениями. При повторных нагружениях обнаружена пере-

© Н.С. Астапов, А.Г. Демешкин, В.М. Корнев, 1994

стройка форм выпучивания, связанная с некоторой неустойчивостью реализации процесса потери устойчивости из-за большой плотности спектра критических нагрузок.

Экспериментальная установка и образцы стержней. На рис. 1 приведена схема нагружения образца. Стержнями  $1$  служили шлифованные стальные полосы различной толщины  $h$  и ширины  $b$ . В качестве упругого основания  $2$ , которое приклеивалось к стальным полоскам, использовалась пористая либо вакуумная резина с жесткостями  $c = 0,47$  и  $11,5$  кг/см<sup>2</sup> соответственно. Для измерения деформации образец крепился на инструментальном микроскопе за жесткую балочку  $3$ , приклеенную к упругому основанию. Нагрузка на образец прикладывалась симметрично относительно его концов и замерялась динамометром  $4$  с ценой деления  $2,7 \cdot 10^{-3}$  кг. При каждой фиксированной нагрузке измерялось поперечное смещение гибкого стержня по всей его длине. Поперечные перемещения упругого стержня замерялись с точностью  $10^{-3}$  мм.

Результаты проведенных экспериментов для девяти образцов приведены в таблице, где через  $L$  обозначена длина стержня,  $N$  — экспериментально полученное число полувольт изогнутого стержня,  $P_0$  — минимальная нагрузка, при которой было замечено отклонение оси стержня от прямой,  $P_n$  — нагрузка, при которой поперечное смещение оси стержня достигало толщины  $h$  упругого стержня,  $P_m$  — максимально прилагавшаяся к образцу нагрузка,  $a$  — соответствующее максимальной нагрузке  $P_m$  наибольшее поперечное смещение оси стержня,  $n$  — теоретически полученное число полувольт синусоиды, отвечающее классической линейной теории,  $P_i$  — классическая критическая нагрузка потери устойчивости стержня на упругом основании, когда реализуется  $i$  полувольт. В четвертой и двух последних колонках таблицы показано зафиксированное в эксперименте и предсказанное теорией [7] устойчивое  $\Lambda$ , неустойчивое  $V$  или безразличное  $0$  за критическое поведение стержня. В двух последних колонках таблицы отмечены устойчивое и неустойчивое поведение по  $i$ -й форме системы стержень — упругое основание, причем расчеты выполнены по классической (предпоследняя колонка) и неклассической (последняя) моделям [7]. Двойные строчки для 4, 5 и 9-го образцов отражают результаты экспериментов на тех же самых образцах при повторном нагружении.

Неконтролируемые возмущения при нагружении образцов привели к различным реализациям выпучивания системы стержень — упругое основание. В образцах 1, 2, 3 жесткость упругого основания  $c = 11,5$  кг/см<sup>2</sup>, в остальных образцах  $c = 0,47$  кг/см<sup>2</sup>. Для образца 9 использовалась стальная полоса толщиной  $h = 0,27$  мм, шириной  $b = 8$  мм, для остальных образцов  $h = 0,1$  мм,  $b = 10$  мм. При расчетах для модуля упругости стали выбрано значение  $E = 2,0 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. Замеры жесткости упругого основания проводились на образцах из резины; резина в этих образцах не приклеивалась к стальным полосам.

Сопоставление с теорией. Критические нагрузки и начальные периодические формы потери устойчивости идеального продольно-сжатого нагрузкой  $P$  стержня длиной  $L$  можно определить из линеаризованного дифференциального уравнения равновесия стержня [8]

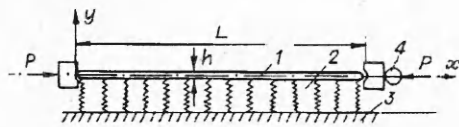
$$EI y_{xxxx} + P y_{xx} + c y = 0.$$

Здесь  $EI$  — изгибная жесткость;  $c$  — коэффициент постели; функция  $y(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$  ( $l$  — расстояние между концами изогнутого стержня, рис. 2) описывает деформированное положение стержня [7] и должна удовлетворять геометрическим краевым условиям шарнирного опирания:

$$y(0) = y(l) = y_{xx}(0) = y_{xx}(l) = 0.$$

Для вычисления критической нагрузки используется выражение [8, 9]

$$(1) \quad P_n = P_*(n^2 + r/n^2),$$



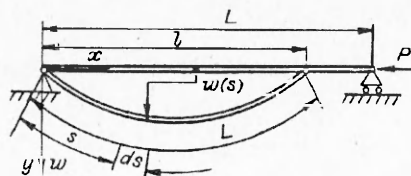
Р и с. 1

где  $P_* = EI(\pi/L)^2$  — критическая нагрузка Эйлера для стержня без упругого основания;  $r = c(L/\pi)^4$  — безразмерный коэффициент жесткости упругого основания. Теоретическое число  $n$  (см. таблицу) полуволн синусоиды, по форме которой начинается потеря устойчивости стержня, определяется из условия

$$(n - 1)^2 n^2 \leq r \leq n^2 (n + 1)^2.$$

| Номер образца | L, мм | Эксперимент |                   |       |       |       |       | Теория |              |                   |   |
|---------------|-------|-------------|-------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------------|-------------------|---|
|               |       | N           | Поведение стержня | $P_0$ | $P_n$ | $P_m$ | a, мм | n      | $P_i$ , кг   | Поведение стержня |   |
|               |       |             |                   | кг    |       |       |       |        |              |                   |   |
| 1             | 30    | 3           | V                 | 1,2   | 2,5   | 4,6   | 1,15  | 3      | $P_2 = 3,35$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_3 = 2,81$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_4 = 3,58$ | Λ                 | Λ |
| 2             | 54    | 6           | Λ                 | 1,5   | 2,6   | 3,1   | 0,26  | 5      | $P_4 = 3,03$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_5 = 2,77$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_6 = 2,97$ | V                 | Λ |
| 3             | 74    | 7           | Λ                 |       | 2,6   | 4,6   | 0,9   | 7      | $P_6 = 2,85$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_7 = 2,77$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_8 = 2,92$ | V                 | V |
| 4             | 52    | 3           | V                 | 0,5   | 1,1   | 1,5   | 1,8   | 2      | $P_1 = 1,35$ | V                 | V |
|               |       | 4           | Λ                 | 0,5   | 1,5   | 2,1   | 0,8   |        | $P_2 = 0,56$ | V                 | V |
| 5             | 62    | 4           | Λ                 | 0,56  | 1,2   | 1,5   | 0,9   | 3      | $P_3 = 0,69$ | Λ                 | Λ |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_4 = 0,80$ | Λ                 | Λ |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_5 = 1,14$ | Λ                 | Λ |
| 6             | 80    | 5           | 0                 | 0,4   | 1,0   | 1,4   | 2,1   | 3      | $P_2 = 0,63$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_3 = 0,59$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_4 = 0,60$ | V                 | Λ |
| 7             | 100   | 6           | Λ                 | 0,5   | 1,3   | 1,7   | 0,5   | 4      | $P_5 = 0,76$ | Λ                 | Λ |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_3 = 0,68$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_4 = 0,56$ | V                 | V |
| 8             | 125   | 7           | Λ                 |       | 0,6   | 1,3   | 1,6   | 5      | $P_5 = 0,60$ | V                 | Λ |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_6 = 0,72$ | Λ                 | Λ |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_4 = 0,63$ | V                 | V |
| 9             | 120   | 3           | Λ                 | 1,2   | 4,2   | 4,5   | 1,2   | 3      | $P_5 = 0,58$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_2 = 2,44$ | V                 | V |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_3 = 2,38$ | V                 | Λ |
| 9             | 120   | 4           | Λ                 | 1,2   | 3,8   | 4,2   | 0,8   | 3      | $P_4 = 3,31$ | Λ                 | Λ |
|               |       |             |                   |       |       |       |       |        | $P_5 = 4,77$ | Λ                 | Λ |

Р и с. 2



В таблице приведены критические нагрузки  $P_i$ , вычисленные по (1), для форм с числом полуволн, близким к  $n$ . Обычно теоретическое число полуволн  $n$  меньше экспериментального  $N$ ; например, для образцов 4, 5, 6, 7, 8 разница составляет две полуволны. Видимо, важную роль играет большая плотность значений критических нагрузок (см. таблицу) и кратность наименьшего собственного значения (образцы 6, 7, 8, для которых первые две критические нагрузки почти совпадают). Так, для образца 8 четвертая по величине критическая нагрузка отличается от первой менее чем на 20%. Влияние краевого эффекта и наличие неизбежных начальных неправильностей также оказываются ощутимыми. Например, если для образца 5 взять  $h = 0,107$  мм вместо 0,1 или для образца 9 взять  $L = 118$  мм вместо 120, то для числа полуволн получим в обоих случаях  $n = 2$  вместо  $n = 3$ .

Из таблицы видно, что для образцов 1, 2, 3 с жесткостью основания  $c = 11,5$  кг/см<sup>2</sup> теоретическая критическая нагрузка ближе к  $P_n$ , а для образцов 4, 5, 6, 7 ( $c = 0,47$  кг/см<sup>2</sup>) ближе к  $P_0$ , т.е. к минимальной нагрузке, при которой наблюдалось отклонение стержня от прямой. Таким образом, можно утверждать, что теоретическое  $n$  и экспериментальное  $N$  числа полуволн очень чувствительны к малым изменениям коэффициентов уравнения и возмущениям в процессе эксперимента. Вероятно, отсюда можно сделать вывод, что влияние начальных неправильностей сильнее сказывается на образцах с более жесткой резиной. Кроме того, необходимо отметить, что простейшая модель упругого основания, когда задается только один коэффициент постели, не описывает возникающий в упругом основании сдвиг [6]. Следовательно, объяснить разницу между  $n$  и  $N$  только влиянием начальных неправильностей не удастся. Может быть, это связано с нелинейностью свойств упругого основания при сравнительно больших прогибах.

Для описания начального закритического поведения стержня возьмем выражение общей потенциальной энергии системы в виде [4, 10]

$$(2) \quad U = \frac{1}{2}EI \int_0^L w_{ss}^2 (1 + w_s^2) ds - P \int_0^L \left( \frac{1}{2}w_s^2 + \frac{1}{8}w_s^4 \right) ds + \frac{1}{2}c \int_0^L w^2 ds$$

и выпишем уравнение Эйлера этого функционала

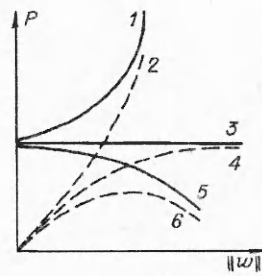
$$(3) \quad EI w_{ssss} + EI (w_{ss}^2 + 4w_s w_{sss}) w_{ss} + P \left( 1 + \frac{1}{2}w_s^2 \right) w_{ss} + cw \left( 1 - \frac{1}{2}w_s^2 \right) = 0.$$

Методом возмущений получим зависимость [7]

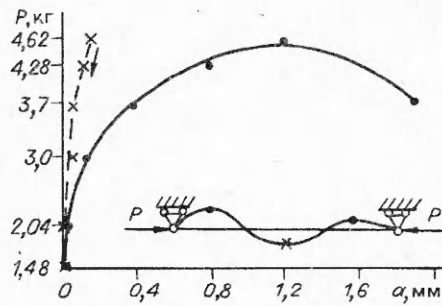
$$(4) \quad P_n = P_* [n^2 + r/n^2 + \pi^2(n^4 - 3r)(a/L)^2/8],$$

где  $a$  приближенно равно амплитуде прогиба стержня. Анализируя (4), видим, что закритическое поведение системы устойчиво при  $n^4 > 3r$  и неустойчиво при  $n^4 < 3r$ . В таблице также приведено устойчивое и неустойчивое поведение системы по форме с  $i$  полуволнами, предписываемое формулой (4) (см. также рис. 4, 5 в [7]). Схематичный график поведения систем представлен на рис. 3, где кривые 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 соответствуют устойчивому, безразличному и неустойчивому закритическому поведению, причем линии с нечетными номерами описывают идеальные системы, а с четными — неидеальные.

Для образца 1 выпучивание по 3 полуволнам оказалось в эксперименте неустойчивым (см. четвертую колонку таблицы) в полном согласии с



Р и с. 3



Р и с. 4

теорией. После достижения максимальной нагрузки 4,62 кг симметрия образца 1 нарушалась и нагрузка падала до 3,7 кг (рис. 4), образец принимал форму, схематически изображенную на рис. 4, т.е. нарушалась периодичность формы выпучивания, проявлялось локальное выпучивание. Одной из причин локализации выпучивания является густота спектра критических нагрузок (см., например, соотношение (2.12) в [7]). Другой причиной служат сдвиговые деформации, которые могут быть учтены в рамках принятого в [7] подхода с использованием уточненной модели упругого основания [6] (см. ниже обсуждение экспериментальных результатов).

Математическая модель поведения стержня на упругом основании, в которой в качестве исходного взято выражение (2), не лишена некоторых недостатков. Так, общая потенциальная энергия (2) системы стержень — основание, когда стержень принимает форму синусоиды с  $n$  полуволнами и амплитудой  $a$ , имеет вид [7] (с точностью до величин высшего порядка малости)

$$U_n \approx EI(\pi/L)^6 La^4 [-n^6 + 3n^2r]/64.$$

Величина  $U_n$  принимает для  $r > n^4/3$  положительные значения, хотя энергия невыпученного состояния ( $w \equiv 0$ ) равна нулю. Таким образом, в этой модели общая потенциальная энергия выпученного состояния системы может оказаться больше энергии невыпученного состояния, а потому стержень не должен терять устойчивость. Этому недостатка лишена неклассическая модель [7], в которой последний член формулы (2), учитывающий более точно работу упругого основания, записан в виде

$$(5) \quad c \int_0^L \int_0^w w(1 - w_s^2)^{1/2} dw ds.$$

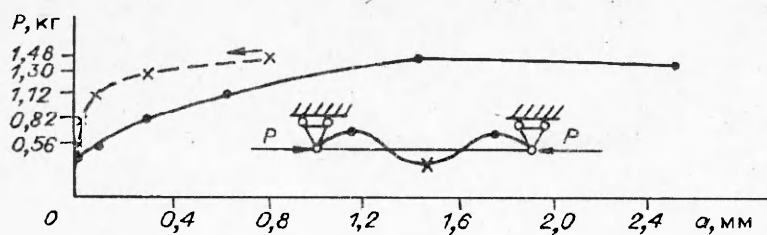
Для неклассической модели [7] потенциальная энергия

$$U_n \approx EI(\pi/L)^6 La^4 [-n^6 - 4n^2r]/64,$$

т.е. энергия выпученного состояния при любых  $n$  и  $r$  всегда меньше энергии невыпученного состояния, и, следовательно, прямолинейная форма равновесия стержня неустойчива. Для зависимости нагрузка — прогиб в этой модели имеем

$$(6) \quad P_n = P_* [n^2 + r/n^2 + \pi^2(n^4 - 2r)(a/L)^2/8].$$

Так как уравнение Эйлера для уточненного функционала отличается от уравнения (3) только последним членом, то эти две теории можно легко сопоставить [7]. Признак устойчивости системы, вычисленный на основании формулы (6), приведен в последней колонке таблицы. Для образцов 2 и 9 получим в этой модели устойчивое закритическое поведение по формам с 6 и соответственно с 3 полуволнами синусоиды в полном согласии с экспериментом. Расхождение результатов экспериментов для образца 6 с теоретическими предсказаниями можно объяснить техническими ограни-



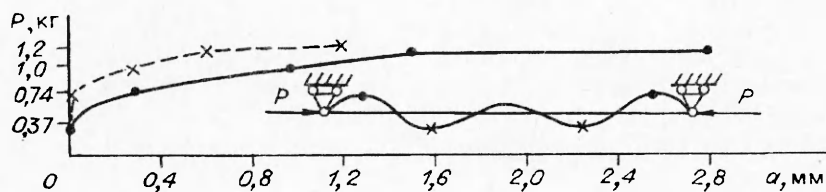
Р и с. 5

чениями при испытаниях, обусловленными нагрузочным устройством. В целом можно сделать вывод, что модель, в которой работа упругого основания учитывается выражением (5), более согласована с результатами экспериментов.

На рис. 4—6 сплошными линиями представлены полусуммы амплитуд крайних полуволн, штриховыми — полусумма амплитуд соседних полуволн стержня соответственно для 1, 4 (верхняя строка таблицы для этого образца) и 6-го образцов; на штриховых кривых рис. 4, 5 стрелками показаны возвратные движения, когда происходила разгрузка соседних участков стержня из-за неустойчивого поведения системы стержень — основание; внизу на каждом из рис. 4—6 приведены формы выпучивания. За счет подбора жесткости измерительного устройства 4 (см. рис. 1) удалось в экспериментах зафиксировать неустойчивое закритическое поведение (сплошные линии на рис. 4 и 5) и безразличное закритическое поведение (сплошная линия на рис. 6).

Результаты экспериментов подтвердили нарушение начальной периодической формы выпучивания стержня при увеличении нагрузки [1, 2] и выявили локализацию выпучивания у краев стержня, последнее особенно проявилось при выпучивании с большим числом полуволн (например, 7 полуволн для образцов 3 и 8). К сожалению, этот эффект теорией не улавливается, так как в используемых моделях упругого основания [7] не учитываются сдвиговые деформации; как следствие уточнения модели упругого основания появляются переменные сжимающие усилия в стержне, что приводит к локализации процесса выпучивания в окрестности действия максимальных сжимающих напряжений. Вероятно, существует принципиальная возможность экспериментально оценить величину действующих осредненных сжимающих усилий на каждой длине полуволны, проведя специальные дополнительные замеры. Обратим внимание на то, что зафиксированное развитие амплитуд соседних полуволн (штриховые кривые на рис. 4—6) как бы предсказывает устойчивое закритическое поведение системы; это так и должно быть, поскольку штриховые кривые соответствуют малым начальным участкам сплошных кривых каждого из рисунков при умеренных прогибах.

При повторных нагружениях всех образцов на части образцов получена хорошая воспроизводимость результатов экспериментов при неконтролируемых возмущениях, а на других при тех же условиях (см. экспериментальные результаты по образцам 4, 5, 9 в таблице) выявлена перестройка форм выпучивания, связанная с некоторой неустойчивостью реализации процесса потери устойчивости из-за большой плотности спектра критических



Р и с. 6

нагрузок (значения  $P_i$  в таблице). В зависимости от реализации той или иной формы выпучивания существенно меняются и продольные нагрузки при конечных прогибах системы. Целесообразно не только контролировать возмущения, возникающие в процессе эксперимента, но и, используя более точную модель, описывающую работу упругого основания, исключать теоретические неточности определения критических нагрузок.

Таким образом, удалось экспериментально обнаружить неустойчивое закритическое поведение деформируемой системы стержень — упругое основание при конечных прогибах. Для более полного описания экспериментальных результатов по локализации процесса выпучивания необходимо построение уточненной математической модели упомянутой системы, когда используются для описания работы упругого основания соотношения типа Власова — Леонтьева [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Твергорд В., Нидлман А. О явлении локализации выпучивания // Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханта. — М.: Наука, 1991.
2. Потьер-Ферри М. Амплитудная модуляция, фазовая модуляция и локализация форм потери устойчивости // Там же.
3. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. — Киев: Наук. думка, 1990.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. — М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
5. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1952.
6. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М.: Физматгиз, 1960.
7. Астапов Н.С., Корнев В.М. Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // ПМТФ. — 1994. — № 2.
8. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967.
9. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1991.
10. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. — М.: Мир, 1985.

г. Новосибирск

Поступила 16/VIII 1993 г.,  
в окончательном варианте — 15/I 1994 г.

УДК 532.526.2

*В.Д. Жесткая, В.М. Козин*

### ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

Вопросам изучения закономерностей поведения бесконечного ледяного покрова при движении по нему ограниченной в плане нагрузки посвящены работы [1—8] и др. Практический интерес к задаче исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) ледяного покрова при наличии свободной кромки, по которой перемещается система давлений с целью разрушения льда, появился сравнительно недавно. Это связано с тем, что на практике стал применяться резонансный метод разрушения льда, реализуемый при помощи амфибийных судов на воздушной подушке (СВП) [2].

В процессе опытов в модельных и натуральных условиях (рис. 1) было установлено значительное изменение ледокольных возможностей СВП при

© В.Д. Жесткая, В.М. Козин, 1994