ножителя $(\gamma - 1)/2$, т. е. в отличие от θ_1 данные обобщаются при введении $((\gamma - 1)/2)^{3/2}$. Таким образом, координата θ примет вид

$$\theta_2 = \frac{t}{r_* N^{1/\alpha}} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}}\, c_0.$$

При этом экспериментальные данные по движению первичной волны описываются уравнением

$$\theta_2 = 0{,}11\psi_1 + 0{,}09\psi_1^2.$$

На рис. 6 показано, что данные (точки *1—3* для Ar, N_2, CO_2) обобщаются (с точностью $\sim$ 10 %) в координатах θ_2, ψ_1.

Таким образом, полученные эмпирические соотношения могут быть рекомендованы для описания динамики стартовых разрывов при запуске недорасширенных струй при различных режимах течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Еремин А. В., Кочнев В. А., Куликовский А. А., Набоко И. М.** Нестационарные процессы при запуске недорасширенных струй // ПМТФ.— 1978.— № 1.
2. **Емельянов А. В., Еремин А. В., Набоко И. М.** Локальное электронно-лучевое исследование процесса формирования импульсной струи // Тр. IX Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов.— Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.— Т. 3.
3. **Белавин В. А., Голуб В. В., Набоко И. М., Опара А. И.** Исследование нестационарной структуры потока при истечении ударно-нагретого газа // ПМТФ.— 1973.— № 5.
4. **Волчков В. В., Иванов А. В., Кисляков Н. И. и др.** Струи низкой плотности за звуковым соплом при больших перепадах давления // ПМТФ.— 1973.— № 2.
5. **Гусев В. Н.** К вопросу о запуске сверхзвуковых сопел // Инж. журн.— 1961.— № 1.
6. **Simons G. A.** The large time behavior of steady spherical source expanding into an arbitrary ambient gas.— N. Y., 1970.— (Paper/AIAA; N 70).
7. **Чекмарев С. Ф.** Неустановившееся радиальное расширение газа в затопленное пространство от внезапно включенного стационарного источника // ПМТФ.— 1975.— № 2.
8. **Чекмарев С. Ф., Станкус Н. В.** Газодинамическая модель и соотношение подобия для запуска сверхзвуковых сопел и струй // ЖТФ.— 1984.— Т. 54, № 8.
9. **Дулов В. Г., Лукьянов Г. А.** Газодинамика процессов истечения.— Новосибирск: Наука, 1984.
10. **Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В.** Теория точечного взрыва.— М.: Физматгиз, 1961.
11. **Голуб В. В., Шульмейстер А. М.** Стартовые ударные волны и вихревые структуры, возникающие при формировании струй // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 5.

г. Москва *Поступила 10/V 1990 г.*

УДК 532.529.5

С. Л. Гаврилюк, С. А. Филько

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

В работе исследуется структура ударных волн в пузырьковой жидкости с дискретной функцией распределения пузырьков по размерам (в каждой точке пространства имеются пузырьки M различных радиусов). В системе координат, связанной с волной, уравнения движения сводятся к динамической системе в $2M$-мерном фазовом пространстве. Для произвольного конечного M доказаны существование, единственность и устойчивость соответствующей структуры. Устойчивость понимается в смысле выполнения теоремы Цемплена на ударной волне, рассматриваемой в рамках равновесной модели как сильный разрыв.

1. Математическая модель. Уравнения движения полидисперсной пузырьковой среды с несжимаемой несущей фазой при малых концентрациях пузырьков имеют вид [1, 2]

$$v_t - u_q = 0; \tag{1.1}$$

(1.2) $$u_t + p_q = 0;$$

(1.3) $$R_i R_{itt} + 3R_{it}^2/2 = \left(p_2^i(R_i) - p\right)/\rho_l - 4\mu_i R_{it}/(\rho_l R_i);$$

(1.4) $$c_{2it} = 0,\ n_{it} = 0,\ i = 1, \ldots, M.$$

Здесь t — время; q — массовая лагранжева координата; u — скорость; v — удельный объем смеси; p — давление в жидкости; R_i — радиусы пузырьков; i обозначает соответствующую фракцию (сорт) пузырьков; $p_2^i(R_i)$ — давление в пузырьке i-го сорта; ρ_l — плотность жидкости (постоянная величина); μ_i — коэффициенты эффективной динамической вязкости [3, Ч. 1, с. 125, 126]; c_{2i} — массовые концентрации пузырьков; n_i — число пузырьков в единице массы смеси. Как показано в [3], в жидкостях с вязкостями, по порядку равными вязкости воды, затухание достаточно больших пузырьков определяется главным образом тепловой диссипацией. Так как поток тепла от пузырька к жидкости пропорционален площади поверхности раздела, то, вообще говоря, $\mu_i \neq \mu_j$, $i \neq j$. Удельный вес смеси выражается формулой

(1.5) $$v = c_l/\rho_l + \left(4\pi \sum_{i=1}^{M} n_i R_i^3\right)\Big/3,\quad c_l + \sum_{i=1}^{M} c_{2i} = 1$$

(c_l — массовая концентрация жидкости). Уравнение состояния i-й фазы берется в виде

(1.6) $$p_2^i(R_i) = p_0 (R_{i0}/R_i)^{3\gamma}$$

(p_0, R_{i0} — равновесные значения давления и радиусов пузырьков, $\gamma > 1$ — показатель политропы, общий для всех пузырьков). Будем считать, что $c_{2i} = \mathrm{const}$, $n_i = \mathrm{const}$.

Разыскиваются решения системы (1.1)—(1.6), зависящие лишь от переменной $\xi = q - Dt$ (D — скорость бегущей волны). Уравнения для радиусов R_i записываются как

(1.7) $$D^2\left(R_i R_i'' + 3R_i'^2/2\right) = \left(p_0 (R_{i0}/R_i)^{3\gamma} - p_0 + D^2 \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^{M} n_i \left(R_i^3 - R_{i0}^3\right)\right)\Big/\rho_l + 4\mu_i D R_i'/(\rho_l R_i).$$

Введем безразмерные переменные $x_i = R_i/R_{i0}$, $\tau = \xi/q_0$, где $q_0 > 0$ — характерная лагранжева переменная. Обозначим

(1.8) $$\alpha_i = \left(\rho_l D^2 R_{i0}^2\right)/\left(p_0 q_0^2\right),\ \beta_i = (4\mu_i D)/(p_0 q_0),\ \delta_i = \left(4\pi D^2 n_i R_{i0}^3\right)/(3p_0),$$

а через точку — производную по τ. Тогда (1.7) примет вид

(1.9) $$\alpha_i\left(x_i \ddot{x}_i + 3\dot{x}_i^2/2\right) = x_i^{-3\gamma} - 1 + \sum_{j=1}^{M} \delta_j \left(x_j^3 - 1\right) + \beta_i \dot{x}_i/x_i,\quad i = 1, \ldots, M.$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $D > 0$, так как в противном случае достаточно сделать замену $\tau \to -\tau$. Таким образом, $\beta_i > 0$.

Под решением системы (1.9) понимается вектор-функция $\mathbf{Z} = (x_1, \ldots, x_M, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_M) \in \mathbf{R}^{2M}$, $x_i > 0$, определенная и непрерывно дифференцируемая при всех $\tau \in \mathbf{R}$ и удовлетворяющая краевым условиям

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} \mathbf{Z} = \left(x_1^{\pm}, \ldots, x_M^{\pm}, 0, \ldots, 0\right) = \mathbf{Z}^{\pm}.$$

Система (1.9) имеет тривиальное решение $\mathbf{Z}^0 = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$. Задача состоит в том, чтобы найти нетривиальное ограниченное решение. Случай $M \leqslant 2$ полностью исследован в [4].

2. Переход к каноническим переменным. Если коэффициенты вязкости $\mu_i = 0$ ($\beta_i = 0$), то система (1.9) будет гамильтоновой [5]. Перейдем к каноническим переменным. Следуя [4], рассмотрим функцию

$$(2.1)\qquad \widetilde{H}\left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right) = \sum_{j=1}^{M} \delta_j \left(\frac{x_j^{3(1-\gamma)}-1}{\gamma-1} + \left(x_j^3 - 1\right) + \frac{3}{2}\alpha_j x_j^3 \dot{x}_j^2\right) - $$

$$- \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{M} \delta_j \left(x_j^3 - 1\right)\right)^2, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_M).$$

Обозначим

$$(2.2)\qquad p_j = \sqrt{3\delta_j\alpha_j}\, x_j^{3/2}\dot{x}_j, \quad q_j = (2/5)\sqrt{3\delta_j\alpha_j}\, x_j^{5/2}.$$

Тогда (2.1) можно представить в виде (тильда над H убирается)

$$(2.3)\qquad H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} p_i^2 + V(\mathbf{q}),$$

где потенциал

$$(2.4)\quad V(\mathbf{q}) = \widetilde{V}(\mathbf{x}(\mathbf{q})) \equiv \sum_{j=1}^{M} \delta_j \left(\frac{x_j^{3(1-\gamma)}-1}{\gamma-1} + x_j^3 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{M} \delta_j \left(x_j^3 - 1\right)\right)^2,$$

$x_j(q_j)$ определяются из (2.2).

Лемма 2.1 [4]. *Система уравнений* (1.9) *равносильна приведенной ниже*:

(2.5)

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i,\ \dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i + F_i, \quad F_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}\frac{p_i}{\left(\dfrac{5q_i}{2\sqrt{3\delta_i\alpha_i}}\right)^{4/5}}, \ i = 1, \ldots, M.$$

Из леммы 2.1 вытекает, что производная от функции H вдоль траекторий системы (2.5) неотрицательна. Это означает, что непостоянное ограниченное решение системы (2.5), если оно существует, необходимо начинается и кончается в особых точках.

3. Особые точки и устойчивость бегущих волн. Для нахождения особых точек используем координаты $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$. Система алгебраических уравнений имеет вид

$$(3.1)\qquad x_i^{-3\gamma} - 1 + \sum_{j=1}^{M} \delta_j \left(x_j^3 - 1\right) = 0.$$

Примем

$$(3.2)\qquad \delta = \sum_{j=1}^{M} \delta_j.$$

Из (3.1) следует [4], что при $\delta = \gamma$ есть только одна особая точка: $x_{i0} = x_0 = 1$, при $\delta > \gamma$ их две: $x_{i0} = x_0 = 1$, $x_i^* = x_* < 1$, при $\delta < \gamma$ также две: $x_{i0} = x_0 = 1$, $x_i^* = x^* > 1$, $i = 1, \ldots, M$.

Таким образом, при $\delta = \gamma$ непостоянных ограниченных решений заведомо нет. Случаи $\delta < \gamma$ и $\delta > \gamma$ нуждаются в дополнительном исследовании. Обозначим $\mathbf{z}_0 = (x_{10}, \ldots, x_{M0}) = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{z}_* = (x_{1*}, \ldots, x_{M*}) = (x_*, \ldots, x_*)$, $\mathbf{z}^* = \left(x_1^*, \ldots, x_M^*\right) = (x^*, \ldots, x^*)$.

Лемма 3.1 [4]. *Если* $\delta > \gamma$, *то* $\widetilde{V}(\mathbf{z}_*) < 0 = \widetilde{V}(\mathbf{z}_0)$. *Если* $\delta < \gamma$, *то* $\widetilde{V}(\mathbf{z}^*) > 0 = \widetilde{V}(\mathbf{z}_0)$.

Так как H растет вдоль траекторий системы (2.5), из леммы 3.1 вытекает, что если $\mathbf{x}(\tau)$— непостоянное ограниченное решение уравнений (1.9), то

$$\mathbf{z}_* = \lim_{\tau\to-\infty} \mathbf{x}(\tau), \ \mathbf{z}_0 = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{x}(\tau) \quad \text{при} \quad \delta > \gamma,$$

$$\mathbf{z}_0 = \lim_{\tau\to-\infty} \mathbf{x}(\tau), \ \mathbf{z}^* = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{x}(\tau) \quad \text{при} \quad \delta < \gamma.$$

Поскольку $D > 0$, то неравенство $\delta > \gamma$ соответствует тому, что состояние с индексом нуль является состоянием перед фронтом волны, а при $\delta < \gamma$ — за фронтом. Физический смысл неравенств $\delta > \gamma$ и $\delta < \gamma$ становится ясным из следующего утверждения.

Лемма 3.2 [4]. *Выполнены цепочки равносильных неравенств:*

$$\delta > \gamma \Leftrightarrow a_e^2(v_0) < v_0^2 D^2 \Leftrightarrow v_*^2 D^2 < a_e^2(v_*) \Leftrightarrow \delta < \gamma x_*^{-3(\gamma+1)},$$

$$\delta < \gamma \Leftrightarrow a_e^2(v_0) > v_0^2 D^2 \Leftrightarrow (v^*)^2 D^2 > a_e^2(v^*) \Leftrightarrow \delta > \gamma (x^*)^{-3(\gamma+1)}.$$

Здесь a_e — равновесная скорость звука в смеси;

$$a_e^2(v) = \frac{dp_e(v)}{d(1/v)};\quad p_e(v) = p_0\left(\frac{\frac{4}{3}\pi\sum\limits_{i=1}^{M} n_i R_{i0}^3}{v - c_l/\rho_l}\right)^{\gamma};$$

v_0, v_*, v^* — значение удельного объема в соответствующих особых точках. Таким образом, лемма 3.2 является, по существу, теоремой Цемплена для равновесной модели пузырьковой среды. Если соответствующая структура (решение типа бегущей волны) существует, то в рамках равновесной модели она отвечает устойчивому сильному разрыву.

Ограничимся исследованием случая $\delta > \gamma$ (x_0 — состояние перед фронтом волны), поскольку неравенство $\delta < \gamma$ сводится к $\delta > \gamma$ переобозначениями. Действительно, для этого достаточно при $\delta < \gamma$ переписать уравнения (1.7) в виде

$$D^2\left(R_i R_i'' + 3R_i'^2/2\right) = (p_0 (R_{i0}/R_i)^{3\gamma} - p^* +$$

$$+ D^2 \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^{M} n_i \left(R_i^3 - R_i^{*3}\right))/\rho_l + 4\mu_i D R_i'/(\rho_l R_i),\quad p^* = p_e(v^*),\quad R_i^* = x^* R_{i0}.$$

Если ввести безразмерные переменные $x_i = R_i/R_i^*$, $\tau = \xi/q_0$ и заметить, что $p^* = p_0\left(R_{i0}/R_i^*\right)^{3\gamma}$, то соответствующие уравнения будут иметь вид (1.9) с заменой α_i, δ_i, β_i на $\alpha_i^*, \delta_i^*, \beta_i^*$. При этом неравенство $\delta < \gamma$ переходит в $\delta^* = \sum\limits_{i=1}^{M} \delta_i^* > \gamma$. Итак, всюду ниже рассматривается только случай $\delta > \gamma$.

4. Линеаризация в окрестности особых точек. Пусть A^+ — матрица линеаризации системы (2.5) в окрестности точки $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$, A^- — точки $(\mathbf{q}_*, \mathbf{0})$, где $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_*$, отвечающие точкам $\mathbf{z}_0 = (1, \ldots, 1)$ и $\mathbf{z}_* = (x_*, \ldots, x_*)$, нересчитываются по формулам (2.2).

Лемма 4.1 [4]. *Обозначим*

$$A(x) = \left(\frac{0\,|\,E}{T\,|\,B}\right),$$

где 0 *и* E *— нулевая и единичная матрицы размерности* $M \times M$; $T = \|t_{ij}\|_{M\times M}$; $B = \|b_{ij}\|_{M\times M}$;

$$t_{ij} = \begin{cases} 3x\sqrt{\dfrac{\delta_i\delta_j}{\alpha_i\alpha_j}}, & \text{если } i \neq j, \\ 3x\dfrac{\left(\delta_i - \gamma x^{-3\gamma-3}\right)}{\alpha_i}, & \text{если } i = j; \end{cases} \tag{4.1}$$

$$b_{ij} = \frac{\beta_i}{\alpha_i} x^{-2}\delta_{ij},\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4.2}$$

Тогда $A^+ = A(1)$, $A^- = A(x_*)$.

В [4] свойства спектра $A(x)$ были исследованы лишь при $M \leqslant 2$. Проведем анализ в общей ситуации. Рассмотрим уравнение $A(x)\langle\mathbf{w}\rangle = \lambda\mathbf{w}$ ($\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{2M}$ — $2M$-мерный вектор). Разобьем $\mathbf{w}$ на два M-мерных вектора: $\mathbf{w} = (\mathbf{w}', \mathbf{w}'')$. В силу представления матрицы $A(x)$ имеем $\mathbf{w}'' = \lambda\mathbf{w}'$, $T\langle\mathbf{w}'\rangle + (B - \lambda E)\langle\mathbf{w}''\rangle = 0$, откуда вытекает уравнение для собственных чисел матрицы $A(x)$

$$\det(T + \lambda B - \lambda^2 E) = 0. \tag{4.3}$$

Введем матрицы D_1, D_2, W_M по следующему правилу:

$$D_1 = \| d_{1ij} \|_{M\times M},\ d_{1ij} = 3x\sqrt{\frac{\delta_i}{x_i}}\,\delta_{ij},\ D_2 = \| d_{2ij} \|_{M\times M},\ d_{2ij} = \sqrt{\frac{\delta_i}{\alpha_i}}\,\delta_{ij},$$

$$W_M = \| w_{Mij} \|_{M\times M},\ w_{Mij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ a_i(\lambda), & i = j; \end{cases}$$

$$a_i(\lambda) = \frac{\alpha_i}{3\delta_i x}\left[\lambda\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i x^2} - \lambda\right) + \frac{3x}{\alpha_i}\left(\delta_i - \frac{\gamma}{x^{3\gamma+3}}\right)\right]. \tag{4.4}$$

Из (4.1), (4.2), (4.4) вытекает, что $T + \lambda B - \lambda^2 E = D_1 W_M D_2$, т. е. уравнение (4.3) равносильно $\Delta_M \equiv \det W_M = 0$.

Лемма 4.2. *Пусть* $M \geqslant 2$. *Тогда*

$$\Delta_M = \det W_M = \prod_{i=1}^{M}(a_i - 1) + \sum_{j=1}^{M}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M}(a_k - 1).$$

Доказательство. Случай $M = 2$ очевиден. Пусть равенство верно для $M - 1$. Разложим определитель матрицы W_M по M-му столбцу. Тогда

$$\Delta_M = a_M \Delta_{M-1} - \sum_{j=1}^{M-1}\Delta_{M-1}^{j}. \tag{4.5}$$

Здесь Δ_{M-1} — определитель матрицы W_{M-1}, а Δ_{M-1}^{j} — матрицы W_{M-1}^{j}, которая устроена так же, как и W_{M-1}, но j-я строка у нее состоит целиком из единиц. По индукционному предположению

$$\Delta_{M-1} = \prod_{i=1}^{M-1}(a_i - 1) + \sum_{j=1}^{M-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}(a_k - 1),\quad \Delta_{M-1}^{j} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}(a_k - 1). \tag{4.6}$$

Подстановка (4.6) в (4.5) доказывает лемму.

Замечание. Если положить $a_0 = 2$ и

$$\Delta_M = \prod_{i=1}^{M}(a_i - 1) + \sum_{j=1}^{M}\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{M}(a_i - 1),$$

то формула для Δ_M будет верна и при $M = 1$.

Покажем, что уравнение $\Delta_M(\lambda) = 0$ не имеет чисто мнимых корней. Предположим противное, т. е. $\lambda = ib$, $b \in \mathbf{R}$ — корень. Поскольку $a_k(ib) - 1 \neq 0$ при всех $b \in \mathbf{R}$, то уравнение $\Delta_M(\lambda) = 0$ равносильно $\sum_{j=1}^{M}(a_j(ib) - 1)^{-1} + 1 = 0$. Из него вытекают два равенства: $b = 0$, $\delta \equiv \sum_{j=1}^{M}\delta_j = \gamma x^{-3\gamma-3}$. Так как $\delta > \gamma \Leftrightarrow \delta < \gamma x_*^{-3\gamma-3}$ (лемма 3.2), то уравнение $\Delta_M(\lambda) = 0$ не имеет корней на мнимой оси.

Заметим, что $a_j(\lambda) - 1 \neq 0$ при $\lambda \leqslant 0$. Тогда при $\lambda \leqslant 0$ уравнение $\Delta_M(\lambda) = 0$ равносильно

$$\tilde{\Delta}_M(\lambda) \equiv 1 + \sum_{j=1}^{M}(a_j(\lambda) - 1)^{-1} = 0.$$

В силу (4.4) при $\lambda \leqslant 0$ находим

$$\tilde{\Delta}_M(0) = 1 - \delta x^{3\gamma+3}/\gamma,\ \delta = \sum_{i=1}^{M}\delta_i,\ \frac{d\tilde{\Delta}_M(\lambda)}{d\lambda} < 0,\ \lim_{\lambda\to-\infty}\tilde{\Delta}_M(\lambda) = 1. \tag{4.7}$$

Из (4.7) следует, что при $x = 1$, $\lambda < 0$ у уравнения $\widetilde{\Delta}_M(\lambda) = 0$ есть единственный корень $\lambda_0^- < 0$, а при $x = x_*$, $\lambda < 0$ корней нет. Поскольку $\Delta_M(\lambda)$— полином с вещественными коэффициентами четной степени, то при $x = 1$, $\lambda > 0$ можно утверждать, что у уравнения $\Delta_M(\lambda) = 0$, по крайней мере, один положительный корень.

Докажем, что матрицы A^+ и A^- (см. лемму 4.1) имеют соответственно $2M - 1$ и $2M$ собственных чисел в правой полуплоскости при всех значениях α_i, β_i, $\delta_i > 0$. Для этого достаточно указать лишь некоторую область переменных α_i, β_i, δ_i, когда это так. Действительно, корни алгебраического уравнения непрерывно зависят от его коэффициентов, и поэтому попасть в левую полуплоскость они могут, лишь перейдя через мнимую ось из правой. Но чисто мнимых корней, как уже доказали, нет.

Ниже ограничимся случаем матрицы A^+ (A^- разбирается аналогично). Считаем, что $\alpha_k \neq \alpha_j$, $\beta_k \neq \beta_j$, $k \neq j$, так как в противном случае это один и тот же сорт пузырьков. Выберем $\beta_k^2 < 12\gamma\alpha_k$, $k = 1, \dots, M$. Тогда $a_j(\lambda) \neq 1$ при любом $j = 1, \dots, M$. Поэтому уравнение $\Delta_M(\lambda) = 0$ опять равносильно $\widetilde{\Delta}_M(\lambda) = 0$. Последнее удобно записать в виде

$$(4.8)\qquad \sum_{k=1}^{M} f_k(\lambda) = 1, \quad f_k(\lambda) = -(a_k(\lambda) - 1)^{-1},$$

$$f_k(\lambda) > 0 \text{ при } \lambda \in R,\ f_k(\lambda) \to 0 \text{ при } \lambda \to \pm\infty.$$

Существует единственный максимум функции $f_k(\lambda)$:

$$\lambda_k^* = \beta_k/(2\alpha_k),\ f_k(\lambda_k^*) = 12\delta_k\alpha_k/(12\gamma\alpha_k - \beta_k^2).$$

Выберем $\delta_1 > \gamma$. Тогда $f_1(\lambda_1^*) > 1$, $f_1(0) > 1$. Поэтому уравнение $f_1(\lambda) = 1$ имеет ровно один положительный корень. Далее, пусть $\delta_k \ll \gamma$, $k = 2, \dots, M$. Можно подобрать β_k так, что при любом $k = 2, \dots, M$

$$3(\gamma - \delta_k)/\alpha_k < \lambda_k^{*2} < 3\gamma/\alpha_k.$$

Отсюда вытекает, что $f_k(\lambda_k^*) > 1$, $k = 2, \dots, M$. Наконец, если взять α_k ($k = 2, \dots, M$) такими, что $\alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \dots \ll \alpha_M$, то $\lambda_1^* \ll \lambda_2^* \ll \dots \ll \lambda_M^*$, и, следовательно, корни уравнения (4.8) будут близки к корням уравнений $f_k(\lambda) = 1$ ($k = 1, \dots, M$), каждое из которых, исключая $f_1(\lambda) = 1$, имеет ровно два положительных корня. Случай $x = x_*$ исследуется аналогично. Таким образом, доказана

Лемма 4.3. *Для любых положительных* α_i, β_i, δ_i *и* $\delta > \gamma$ (см. (1.8), (3.2)) *матрица* A^+ *имеет одно отрицательное собственное число и* $2M - 1$ *собственных чисел в правой полуплоскости, а* A^- *имеет* $2M$ *собственных чисел в правой полуплоскости.*

5. Поверхности уровня гамильтониана. Теорема единственности. В дальнейшем нам понадобится знание структуры множества уровня гамильтониана $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, т. е. множества $H_c = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$ (c — постоянная). Первый шаг к пониманию — нахождение критических точек гамильтониана, которые совпадают с особыми точками системы (2.5). В силу (2.3) достаточно исследовать потенциал $V(\mathbf{q})$, матрица вторых производных которого в особых точках совпадает с $-T$ (лемма 4.1). Уравнение $\det(-T - \lambda E) = 0$ аналогично (4.3) равносильно $\det G = 0$, где $G = \|g_{ij}\|_{M\times M}$,

$$g_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\delta_i - \gamma x^{-3\gamma-3}}{\delta_i} + \dfrac{\alpha_i}{3\delta_i x}\lambda, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$$

В силу леммы 4.2 собственные числа матрицы $-T$ являются корнями полинома

$$(5.1)\qquad \prod_{i=1}^{M}(g_{ii} - 1) + \sum_{j=1}^{M}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{M}(g_{ii} - 1) = 0.$$

Поскольку T — симметрическая матрица, то все корни (5.1) вещественны. Неравенство $\delta > \gamma$ гарантирует, что при $x = 1$ уравнение (5.1) имеет только один отрицательный корень, а при $x = x_*$ отрицательных корней нет. Все остальные корни положительны.

Пусть V_0, V_* — значения потенциала $V(\mathbf{q})$ в точках $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_*$ соответственно. В силу леммы 3.1 $V_0 = 0$, $V_* < 0$. Рассмотрим достаточно малую окрестность U_* точки $(\mathbf{q}_*, 0)$ в $\mathbf{R}^{2M}$. В силу свойств потенциала $V(\mathbf{q})$ и леммы Морса [6, с. 402] существуют регулярные локальные координаты $\mathbf{q}'$ такие, что в U_* имеет место равенство

$$H(\mathbf{q}', \mathbf{p}) = V_* + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{M} p_i^2 + \sum_{i=1}^{M} q_i'^2\right).$$

Поэтому множество $H_c = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$ при $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U_*$ $(c \in \in (V_*, V_* + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1)$ диффеоморфно сфере S^{2M-1}. Так как интервал (V_*, V_0) не содержит критического уровня функции H, то H_c при всех $c \in (V_*, V_0)$ имеет компоненту связности, диффеоморфную S^{2M-1}. При переходе через $c = 0$ структура H_c меняется. Действительно, в силу леммы Морса в окрестности U_0 точки $(\mathbf{q}_0, 0)$ существуют регулярные локальные координаты $\mathbf{q}''$
такие, что

$$H(\mathbf{q}'', \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{M} p_i^2 + \sum_{i=1}^{M-1} q_i''^2 - q_M''^2\right).$$

Отсюда следует, что множество H_0 является локально конусом. Поверхность $H_{-\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ имеет в U_0 две компоненты связности и диффеоморфна $S^0 \times E^{2M-1}$, где E^{2M-1} — $2M$ — 1-мерная клетка (топологический образ $2M$ — 1-мерного диска); поверхность H_ε связна и диффеоморфна в U_0 $E^1 \times S^{2M-2}$. Одна из клеток E^{2M-1} соответствует пересечению окрестности U_0 с компонентой связности множества $H_{-\varepsilon}$, диффеоморфной S^{2M-1}, а вторая — пересечению U_0 с некомпактной компонентой связности множества $H_{-\varepsilon}$.

Обозначим $H^- = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < 0\}$. Из приведенного выше анализа вытекает, что H^- не является связным:

$$H^- = H_*^- \cup \widehat{H}^-, \; H_*^- \cap \widehat{H}^- = \varnothing. \tag{5.2}$$

Здесь множество H_*^- гомеоморфно открытой $2M$-мерной клетке и содержит точку $(\mathbf{q}_*, 0)$, а $\widehat{H}^-$ — некомпактное множество. Это позволяет доказать теорему единственности.

Теорема 5.1. *Если решение системы* (2.5), *соединяющее точки* $(\mathbf{q}_0, 0)$ *и* $(\mathbf{q}_*, 0)$, *существует, то оно единственно.*

Доказательство. В силу леммы 4.3 и теоремы Гробмана — Хартмана [7] в точку $(\mathbf{q}_0, 0)$ приходят ровно две траектории системы (2.5). Пусть λ_0^- — отрицательное собственное число матрицы A^+ (лемма 4.1), а $\mathbf{r}$ — соответствующий собственный вектор. Непосредственно проверяется, что

$$(\mathbf{r}, \partial^2 H/\partial \mathbf{x}^2(\mathbf{q}_0, 0)\langle \mathbf{r} \rangle) < 0. \tag{5.3}$$

Неравенство (5.3) означает, что эти траектории лежат локально в разных компонентах связности множества H^-. Покажем, что только одна из них может начинаться в точке $(\mathbf{q}_*, 0)$. Пусть l — траектория системы (2.5), соединяющая точки $(\mathbf{q}_*, 0)$ и $(\mathbf{q}_0, 0)$. Покажем, что она все время находится внутри H_*^- (см. (5.2)). Действительно, в противном случае найдется момент времени $\tau_* < \infty$, когда l пересечет границу множества H_*^-. Так как H растет вдоль траекторий системы (2.5), то при $\tau > \tau_*$ l обязана лежать вне H^-. Следовательно, в $(\mathbf{q}_0, 0)$ она не попадет. Таким образом, l принадлежит H_*^-. Единственность доказана.

6. Теорема существования. Рассмотрим систему

$$(6.1)\qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n,\ (\dot{\cdot}) = d/dt.$$

Обозначим $\mathbf{x} \cdot t$ точку на траектории системы (6.1) в момент t такую, что $\mathbf{x} \cdot 0 = \mathbf{x}$. С системой типа (6.1) связано хорошо известное понятие инвариантного множества [7]. Следующие определения и свойства [7—9] приводятся для замкнутости изложения.

Множество I называется **изолированным** инвариантным, если I является максимальным инвариантным множеством в некоторой окрестности самого себя. Компактное множество N называется **изолирующей окрестностью** максимального инвариантного множества I, содержащегося в N, если I лежит строго внутри N. Изолирующая окрестность B называется **изолирующим блоком,** если ее граница ∂B представима в виде $\partial B = b^+ \cup b^- \cup \tau$, где $b^+(b^-)$— множество точек выхода (входа) (траектории покидают (входят в) B с ростом времени), а τ состоит из отрезков траекторий системы (6.1), соединяющих между собой b^+ и b^-.

Обозначим B/b^+ фактор-пространство, полученное стягиванием b^+ в точку (множество с отмеченной точкой [6]). **Индексом Конли** изолированного инвариантного множества I называется класс гомотопически эквивалентных фактор-пространств B/b^+. Примем $h(I) = [B/b^+]$ (квадратные скобки обозначают гомотопический тип). В [8, 9] доказано, что $h(I)$ не зависит от выбора изолирующего блока. Индексы можно складывать. Если I_1 и I_2 — непересекающиеся изолированные инвариантные множества, то $h(I_1 \cup I_2) = h(I_1) \vee h(I_2)$ ($\vee$ обозначает букет соответствующих пространств с отмеченной точкой [6]). Индекс Конли «неотрицателен», т. е. если $h(I_1) \vee h(I_2) = \overline{0}$, где $\overline{0}$ — гомотопический тип стягиваемого пространства (гомотопически эквивалентного точке), то $h(I_1) = h(I_2) = \overline{0}$.

П р и м е р [8, 9]. Пусть x_0 — точка покоя (6.1), A_0 — матрица линеаризации (6.1) в точке x_0, не имеющая собственных чисел на мнимой оси. Тогда x_0 — изолированное инвариантное множество, $h(x_0) = \Sigma^k$ — сфера с отмеченной точкой размерности k (k — количество собственных чисел A_0, лежащих в правой полуплоскости).

В силу леммы 4.3 $h(\{\mathbf{q}_0,\ \mathbf{0}\}) = \Sigma^{2M-1}$, $h(\{\mathbf{q}_*, \mathbf{0}\}) = \Sigma^{2M}$.

Теорема 6.1. *Существует траектория системы* (2.5), *соединяющая точки покоя* $(\mathbf{q}_*, \mathbf{0})$ *и* $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим изолирующий блок B. Пусть $\mathbf{r}$ — собственный вектор матрицы A^+, соответствующий отрицательному собственному числу. В малой окрестности U_0 точки $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ рассмотрим такое семейство Λ ортогональных $\mathbf{r}$ гиперплоскостей, что точки $(\mathbf{q}_*, \mathbf{0})$ и $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ лежат по одну сторону от Λ. Фиксируем $0 < \varepsilon \ll 1$. Выберем гиперплоскость $L \in \Lambda$, пересекающую $H_{-\varepsilon} \cap \widehat{H}^-$ в U_0 по множеству, гомеоморфному S^{2M-2}. Такая L существует в силу свойств поверхности $H_{-\varepsilon}$ (см. п. 5). Часть гиперповерхности $H_{-\varepsilon} \cap \widehat{H}^-$, находящейся с особыми точками по одну сторону от L, являющейся $2M$ — 1-мерной клеткой, в силу (5.3) будет входом b^-. Выпустим из точек границы множества b^- траектории системы (2.5), образующие множество τ в определении блока B и пересекающие H_ε по множеству, гомеоморфному S^{2M-2}. Сфера S^{2M-2} делит H_ε на две непересекающиеся части: $H_\varepsilon = H_{*\varepsilon} \cup \widehat{H}_\varepsilon$, где $H_{*\varepsilon}$ гомеоморфно полусфере S^{2M-1}, а $\widehat{H}_\varepsilon$ — некомпактная часть. $H_{*\varepsilon}$ — множество точек выхода b^+. Блок B построен. Фактор-пространство B/b^+ в силу односвязности b^+ есть $2M$-мерная клетка. Следовательно, гомотопический тип $[B/b^+] = \overline{0}$.

С другой стороны, если траектории, соединяющей точки $(\mathbf{q}_*, \mathbf{0})$ и $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$, не существует, то единственные инвариантные множества системы (2.5)— сами точки покоя. Следовательно, используя правило суммирования индексов Конли, имеем $\Sigma^{2M-1} \vee \Sigma^{2M} = \overline{0}$, что противоречит «неотрицательности» индекса. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1960.— № 6.
2. **Когарко Б. С.** Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации // ДАН СССР.— 1964.— Т. 155, № 4.
3. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1, 2.
4. **Гаврилюк С. Л.** Существование, единственность и устойчивость по Лаксу бегущих волн в полидисперсной пузырьковой среде с диссипацией // Дифференциальные уравнения с частными производными: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИМ.— 1989.
5. **Gasenko V. G., Izergin V. L.** Nonlinear waves stochastisation in a polydispersive gas-liquid mixture // Тр. XI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике.— Новосибирск, 1987.— Ч. 2.
6. **Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.** Курс гомотопической топологии.— М.: Наука, 1989.
7. **Динамические** системы — 1 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления.— М.: ВИНИТИ, 1985.
8. **Smoller J.** Shock waves and reaction-diffusion equations.— N. Y.: Springer-Verlag, 1983.
9. **Conley C.** Isolated invariant sets and the Morse index.— Providence: Amer. Math. Soc., 1978.— (Conf. Board Math. Sci.; N 38).

г. Новосибирск *Поступила 22/I 1990 г.*

УДК 551.466

В. В. Булатов

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Задача об установившихся гравитационных внутренних волнах (ВВ), возникающих в потоке стратифицированной среды, набегающем на неровное дно, имеет большое значение для исследования волновых процессов в океане и атмосфере. При решении данной задачи в линейном приближении наиболее распространенными являются два способа. Первый заключается в точном численном решении линеаризованной системы уравнений гидродинамики [1, 2], второй — в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму неровного дна, или функцией, имеющей простой вид (например, полусферическая форма неровного дна [3]), или системой точечных источников, взятых с некоторым весом [1, 4]; в результате для частных случаев распределения частоты Брента — Вяйсяля $N(z)$ (обычно $N(z)$ предполагается постоянной [3, 4]) задачу удается решить аналитически. К недостаткам первого способа относится ограниченность области пространства, в котором численно решается задача, при исследовании задачи вторым способом не удается оценить границы применимости приближений. Поэтому представляет интерес решить задачу с использованием функции Грина уравнения внутренних волн, а также ее асимптотик [5—7], что позволяет не только численно исследовать данную задачу, но и применять различные приближения, упрощающие решение.

В настоящей работе рассматривается задача обтекания неровного дна потоком стратифицированной жидкости с произвольным распределением частоты Брента — Вяйсяля $N(z)$, высота подводного препятствия предполагается малой по сравнению с толщиной слоя жидкости. Свободная поверхность $z = 0$ заменяется твердой крышкой, декартова система координат выбирается так, чтобы плоскость x, y была расположена на горизонтальной плоскости дна. При $x \to -\infty$ поток асимптотически одномерный и течет с постоянной скоростью V вдоль оси x. Поток предполагается слабостратифицированным, т. е. внутреннее число Фруда $\mathrm{Fr} = V/N_* h_*$ (N_* — характерная частота Брента — Вяйсяля, h_* — высота препятствия) больше единицы. Физически это означает, что частицы жидкости в невозмущенном потоке обладают достаточной кинетической энергией, чтобы подняться на высоту препятствия, т. е. картина траекторий, лежащих на дне, качественно должна иметь такой же вид, как и в случае однородной жидкости [3].

Вертикальная компонента w скорости ВВ удовлетворяет следующему уравнению ВВ, которое получается из линеаризованной системы уравне-