но находить распределения Г, ξ, ψ на $n+1$-м слое. При решении разностного уравнения для ψ проводились дополнительные итерации. Граничные условия первого рода аппроксимировали явно, граничные условия второго рода, согласно [7], исходя из выражения

$$\Gamma[i,1] = \Gamma[i,0] + \left.\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right|_{i,0} h_z + \left.\frac{\partial^2\Gamma}{\partial z^2}\right|_{i,0} \frac{h_z^2}{2}.$$

Значение второй производной находится непосредственно из уравнения для Г, распространенного на границу. При решении задачи в центральной области использовалась сетка 40×40, равномерная по z и неравномерная по r. Закон изменения шага по r задавался следующим образом:

$$r[i] = h_r[0]\frac{(1+\alpha)^i-1}{\alpha} \quad \text{или} \quad h_r[i+1] = (1+\alpha)h_r[i].$$

Для представленных расчетов $\alpha = 0{,}024$.

Автор выражает благодарность М. А. Гольдштику за внимание к работе.

Поступила 26 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гринспен Х.** Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеоиздат, 1975.
2. **Гольдштик М. А.** Приближенное решение задачи о ламинарном закрученном потоке в круглой трубе.—«Инж.-физ. журн.», 1959, т. 1, № 3.
3. **Будунов Н. Ф.** Исследование отрывных и закрученных течений несжимаемой жидкости в каналах переменного сечения. Автореф. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973.
4. **Гольдштик М. А., Зыкин Г. П., Петухов Ю. И., Сорокин В. Н.** Об определении радиуса воздушного вихря в центробежной форсунке.— ПМТФ, 1969, № 4.
5. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
6. **Гольдштик М. А.** К теории эффекта Ранка (закрученный поток газа в вихревой камере).—«Изв. АН СССР. Мех. и машиностроение», 1963, № 1.
7. **Болдырева З. В., Кускова Т. В.** К вопросу об обтекании сферы вязкой несжимаемой жидкостью.— В кн.: Численные методы в механике сплошных сред. Вып. 15. М., изд. ВЦ Моск. ун-та, 1970.

УДК 534.222.2

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВОЗЛЕ ЦИЛИНДРА В СЛОЖНОМ ЗВУКОВОМ ПОЛЕ

В. Б. Репин

(*Казань*)

Известно, что при наличии звукового поля возле твердой поверхности появляются стационарные течения, которые могут в значительной степени влиять на процессы тепло- и массообмена [1—3]. Как правило, все работы из этой области относятся к тому случаю, когда звуковое поле можно представить в виде одной волны. Однако на практике часто встречаются ситуации, когда звуковое поле является сложным, т. е. состоит из нескольких колебаний, амплитуды и частоты которых в общем случае различны.

В данной работе исследуются вторичные стационарные течения, образующиеся возле круглого цилиндра, помещенного в сложное звуковое поле.

Пусть на круглый цилиндр радиуса R набегает n плоских волн со следующими параметрами: A_n — амплитуда скорости акустического смещения в n-й волне, ω_n — частота, a_n — точка набегания волны на цилиндр, φ_n — фаза волны. Рассмотрим случай, когда радиус цилиндра существенно меньше длины волны, тогда течение возле цилиндра можно рассматривать как несжимаемое.

Уравнение Навье — Стокса, описывающее движение вязкой несжимаемой жидкости, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) - \varepsilon\,\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(\theta, r)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{H}^2\nabla^4\psi, \tag{1}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{1+r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{(1+r)^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$; $\partial(\psi, \nabla^2\psi)/\partial(\theta, r)$ — определитель Якоби; $\varepsilon = s_1/R$; $\mathrm{H} = \delta_{\text{ак}}/R$; $\delta_{\text{ак}} = (2\nu/\omega_1)^{1/2}$; s_1 — амплитуда акустического смещения в первой волне. Функция тока ψ определяется как

$$u = \partial\psi/\partial r,\ v = -1/(1+r)\cdot\partial\psi/\partial\theta. \tag{2}$$

Граничные условия имеют вид

$$\psi = \partial\psi/\partial r = 0 \text{ при } r = 0; \tag{3}$$

$$\psi = (1+r)\sum_{k=1}^{n} B_k \sin(\theta - a_k)\, e^{i\left(b_k^2 t + \varphi_k\right)} \text{ при } r \to \infty,$$

где $B_k = A_k/A_1$; $b_k = (\omega_k/\omega_1)^{1/2}$.

Уравнения (1)—(3) записаны в следующих безразмерных переменных:

$$r = (\tilde{r} - R)/R,\ \psi = \tilde{\psi}/A_1R,\ t = \tilde{t}\omega_1. \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда выполняются следующие условия:

$$\varepsilon \ll 1; \tag{5}$$

$$\mathrm{H} \ll 1. \tag{6}$$

Задачу будем решать, используя метод сращиваемых асимптотических разложений [4, 5]. Всю область, занятую жидкостью, разобьем на две: внутреннюю (с характерным размером $\delta_{\text{ак}}$ в перпендикулярном к поверхности цилиндра направлении) и внешнюю (с характерным размером R). Внешние переменные определены выражением (4), а внутренние запишутся в виде

$$\eta = (\tilde{r} - R)/\delta_{\text{ак}},\ m = \tilde{\psi}/A_1\delta_{\text{ак}},\ t = \tilde{t}\omega_1. \tag{7}$$

Связь между внутренними и внешними переменными имеет вид

$$r = \mathrm{H}\eta,\ \psi = \mathrm{H}m, \tag{8}$$

где η и r отсчитываются от поверхности цилиндра, а θ — от точки набегания первой волны (A_1).

Рассмотрим внешнюю область. Ввиду условия (5) решение будем искать методом последовательных приближений

$$\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon\psi^{(1)} + O(\varepsilon^2). \tag{9}$$

Подставив (9) в (1) и собрав члены при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi^{(0)}) = \frac{1}{2}\mathrm{H}^2\nabla^4\psi^{(0)}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi^{(1)}) - \frac{\partial(\psi^{(0)}, \nabla^2\psi^{(0)})}{\partial(\theta, r)} = \frac{1}{2}\mathrm{H}^2\nabla^4\psi^{(1)}. \tag{10}$$

Хотя уравнения (10) являются линейными, однако их решения, записанные с использованием функций Ханкеля, являются довольно громоздкими, что затрудняет дальнейший анализ. Поэтому, используя условие (6), представим $\psi^{(i)}$ в виде

$$\psi^{(i)} = \psi^{(i0)} + \mathrm{H}\psi^{(i1)} + O(\mathrm{H}^2), \ i = 0, 1\ldots \tag{11}$$

Подставив (11) в (10) и собрав члены при одинаковых степенях H, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi^{(00)}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi^{(01)}) = 0, \ldots\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_{\text{н}}^{(10)}\right) - \left\{\frac{\partial(\psi^{(00)}, \nabla^2\psi^{(00)})}{\partial(\theta, r)}\right\}_{\text{н}} = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_{\text{н}}^{(11)}\right) - \left\{\frac{\partial(\psi^{(00)}, \nabla^2\psi^{(01)})}{\partial(\theta, r)} + \frac{\partial(\psi^{(01)}, \nabla^2\psi^{(00)})}{\partial(\theta, r)}\right\}_{\text{н}} = 0,\\ \left\{\frac{\partial(\psi^{(00)}, \nabla^2\psi^{(02)})}{\partial(\theta, r)} + \frac{\partial(\psi^{(01)}, \nabla^2\psi^{(01)})}{\partial(\theta, r)} + \frac{\partial(\psi^{(02)}, \nabla^2\psi^{(00)})}{\partial(\theta, r)}\right\}_{\text{ст}} = \frac{1}{2}\nabla^4\psi_{\text{ст}}^{(10)}.\end{gathered} \tag{12}$$

Используя второе граничное условие (3), можно показать, что функции $\psi^{(0j)}$ не содержат не зависящей от времени составляющей, поэтому уравнения (12) примут вид

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi^{(0j)} \equiv 0, \quad j = 0, 1, 2\ldots;\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_{\text{н}}^{(1j)}\right) = 0; \quad \nabla^4\psi_{\text{ст}}^{(10)} = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

где $\psi^{(10)} = \psi_{\text{ст}}^{(10)}(\theta, r) + \psi_{\text{н}}^{(10)}(\theta, r, t)$.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать звуковое поле, состоящее из двух плоских волн. Тогда решения уравнений (13) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\psi^{(0j)} = \begin{cases}(1 + r)\left[\sin\theta e^{it} + B\sin(\theta - a)e^{i(b^2t+\varphi)}\right], & j = 0,\\ \text{ограничена}, & j \neq 0,\end{cases} \tag{14}$$

$\psi^{(10)}$ = ограничена при $r \to \infty$, а при $r \to 0$ внешнее решение должно асимптотически сращиваться с внутренним решением, т. е.

$$\psi(0) \cong \mathrm{H}m(\infty). \tag{15}$$

Рассмотрим внутреннюю область. Для этого перепишем уравнение (1) во внутренних переменных (7)

(16)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 m(\eta, \theta, t, \mathrm{H})) - \varepsilon\frac{\partial\left(m(\eta, \theta, t, \mathrm{H}), \nabla^2 m(\eta, \theta, t, \mathrm{H})\right)}{\partial(\theta, \eta)} = \frac{1}{2}\nabla^4 m(\eta, \theta, t, \mathrm{H}).$$

Аналогично внешнему решению, решение во внутренней области будем искать в виде ряда

(17) $$m = m^{(00)} + O(\mathrm{H}) + \varepsilon\left[m^{(10)}_{\text{ст}} + m^{(10)}_{\text{н}} + O(\mathrm{H})\right] + O(\varepsilon^2).$$

В работе [5] показано, что разложение типа (11), (17) можно применять только в том случае, когда число Рейнольдса, подсчитанное по скорости стационарного вторичного течения, мало ($\mathrm{Re}_{\text{ст}} = A^2/\omega\nu \ll 1$). Случай $\mathrm{Re}_{\text{ст}} \gg 1$ будет рассмотрен отдельно.

Подставив (17) в (16) и проделав те же операции, что и при выводе уравнений (13), получим

(18а) $$m^{(00)}_{\eta\eta t} - \frac{1}{2} m^{(00)}_{\eta\eta\eta\eta} = 0;$$

(18б) $$m^{(10)}_{\text{ст}\,\eta\eta\eta\eta} = 2\left\langle m^{(00)}_{\eta} m^{(00)}_{\eta\eta\theta} - m^{(00)}_{\theta} m^{(00)}_{\eta\eta\eta}\right\rangle.$$

Функции m^{ij} должны удовлетворять граничным условиям

(19) $$m^{(ij)} = \partial m^{(ij)}/\partial\eta = 0 \text{ при } \eta = 0,\ i,\ j = 0,\ 1\ldots$$

и асимптотически сращиваться с внешним решением.

Решения первого уравнения (13) и уравнения (18а), удовлетворяющие условиям (14), (15) и (19), имеют вид

(20) $$\psi^{(00)} = \left[1 + r - \frac{1}{1+r}\right] \mathrm{Real}\,[\sin\theta \cdot e^{it} + B\sin(\theta - a) \cdot e^{i(b^2t+\varphi)}];$$

(21) $$m^{(00)} = 2\,\mathrm{Real}\,[\sin\theta \cdot \xi_1(\eta)\, e^{it} + Bb^{-1}\sin(\theta - a) \cdot \xi_1(b\eta)\, e^{i(b^2t+\varphi)}]$$

для внешней и внутренней областей соответственно, где

$$\xi_1(\eta) = \eta + \frac{1-i}{2}[e^{-(1+i)\eta} - 1].$$

Прежде чем приступить к отысканию стационарной составляющей функции тока, отметим, что правая часть в уравнении (18б) будет иметь различное аналитическое представление в зависимости от соотношения между частотами колебаний двух волн.

Рассмотрим случай различных частот ($b \neq 1$). Используя (21) и вычислив осредненные члены, уравнение (18б) запишется в виде

(22) $$m^{(10)}_{\text{ст}\,\eta\eta\eta\eta} = 2\sin 2\theta \cdot f_1(\eta) + 2B^2b\sin 2(\theta - a) \cdot f_1(b\eta),$$

где

(23) $$f_1(\eta) = e^{-(1+i)\eta} + e^{-(1-i)\eta} + i\eta e^{-(1+i)\eta} - i\eta e^{-(1-i)\eta} - 2e^{-2\eta}.$$

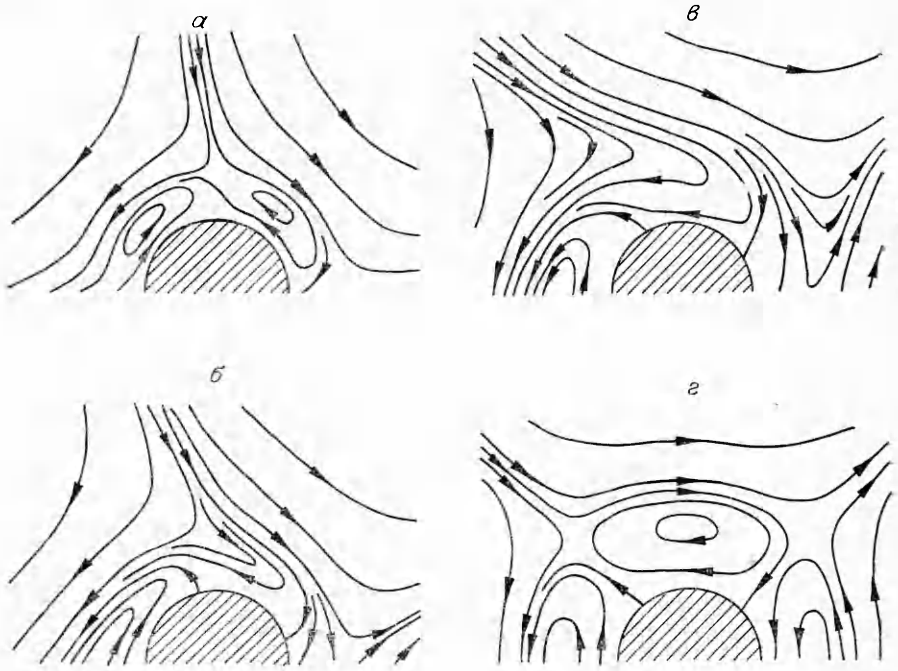
Решения третьего уравнения (13) и уравнения (22), удовлетворяющие условиям (14), (15) и (19), имеют вид

(24) $$m^{(10)}_{\text{ст}} = \Phi_1(\eta)\sin 2\theta + B^2b^{-3}\Phi_1(b\eta)\sin 2(\theta - a);$$

(25) $$\psi^{(10)}_{\text{ст}} = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{(1+r)^2} - 1\right][\sin 2\theta + B^2b^{-3}\sin 2(\theta - a)]$$

для внутренней и внешней областей соответственно, где

(26) $$\Phi_1(\eta) = \frac{13}{4} - \frac{3}{2}\eta - \frac{3+2i}{2}e^{-(1+i)\eta} - \frac{3-2i}{2}e^{-(1-i)\eta} + \frac{i}{2}\eta e^{-(1-i)\eta} - \frac{i}{2}\eta e^{-(1+i)\eta} - \frac{1}{4}e^{-2\eta}.$$



Фиг. 1

Из выражений (24), (25) следует, что в случае различных частот стационарное течение представляет собой суперпозицию вторичных течений, соответствующих каждому колебанию в отдельности.

На фиг. 1 показаны линии тока стационарного течения во внутренней области при изменении относительной амплитуды B от 0,05 до 10,0 ($\omega_1 = 4\omega_2$, $a = \pi/4$). Видно, что при малых значениях B (фиг. 1, *а*, $B = 0{,}05$) стационарное течение определяется первым колебанием и по характеру напоминает течение, описанное Шлихтингом [6]. По мере увеличения амплитуды второго колебания характер течения существенно изменяется. Можно отметить такие ситуации, когда во внутренней области отсутствуют замкнутые линии тока (фиг. 1, *б*, *в*, $B = 0{,}4$ и 0,8). При дальнейшем увеличении B характер стационарного течения определяется параметрами второго колебания (фиг. 1, *г*, $B = 10{,}0$).

Таким образом, структура стационарного вторичного течения в рассматриваемом случае является более сложной, нежели в задаче Шлихтинга. Однако можно предсказать характер течения, не прибегая к помощи ЭВМ, а исследуя лишь положение линий ветвления. Под линией ветвления понимается такая линия тока, при пересечении которой тангенциальная составляющая поля скорости стационарного течения меняет знак.

Так, вблизи поверхности, разлагая (24) в ряд Тейлора и ограничившись квадратичным членом, можно получить следующее выражение для определения угловой координаты линии ветвления внутреннего течения (внутренняя линия ветвления):

$$\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{B^2 b^{-1}\sin 2a}{1 + B^2 b^{-1}\cos 2a}\right] + \frac{\pi n}{2}, \quad n = 0, 1 \ldots \tag{27}$$

Аналогично из (25) получим соотношение для определения угловой координаты линии ветвления внешнего течения (внешняя линия ветвления)

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{B^2 b^{-2}\sin 2a}{1 + B^2 b^{-2}\cos 2a}\right] + \frac{\pi n}{2}, \qquad n = 0, 1 \ldots \tag{28}$$

Из сравнения (27) и (28) видно, что внешние и внутренние линии ветвления не совпадают друг с другом, в то время как в задаче Шлихтинга они совпадают. В нашем же случае совпадение внешних и внутренних линий ветвления будет наблюдаться тогда, когда либо $B = 0$ или ∞, что соответствует простому звуковому полю, либо $a = \pi n/2$. Следовательно, при таких параметрах структура течения будет такая же, как в работе [6]. Отметим, что картина стационарного течения повторяется через $\pi/2$.

Рассмотрим случай одинаковых частот ($b = 1$). Тогда уравнение (18б) запишется в виде

$$m^{(10)}_{\text{ст}\,\eta\eta\eta\eta} = 2L(\theta) f_1(\eta) + 4B\sin a \cdot \sin\varphi \cdot f_2(\eta), \tag{29}$$

где

$$L(\theta) = \sin 2\theta + B^2 \sin 2(\theta - a) + 2B\sin(2\theta - a)\cdot\cos\varphi; \tag{30}$$

$f_2(\eta) = 2e^{-2\eta} - e^{-(1+i)\eta} - e^{-(1-i)\eta} + \eta e^{-1(1+i)\eta} + \eta e^{-(1-i)\eta}$, а $f_1(\eta)$ определено выражением (23).

Решения третьего уравнения (13) и уравнения (29), удовлетворяющие условиям (14), (15) и (19), имеют вид

$$m^{(10)}_{\text{ст}} = L(\theta)\,\Phi_1(\eta) + B\sin a \cdot \sin\varphi \cdot \Phi_2(\eta); \tag{31}$$

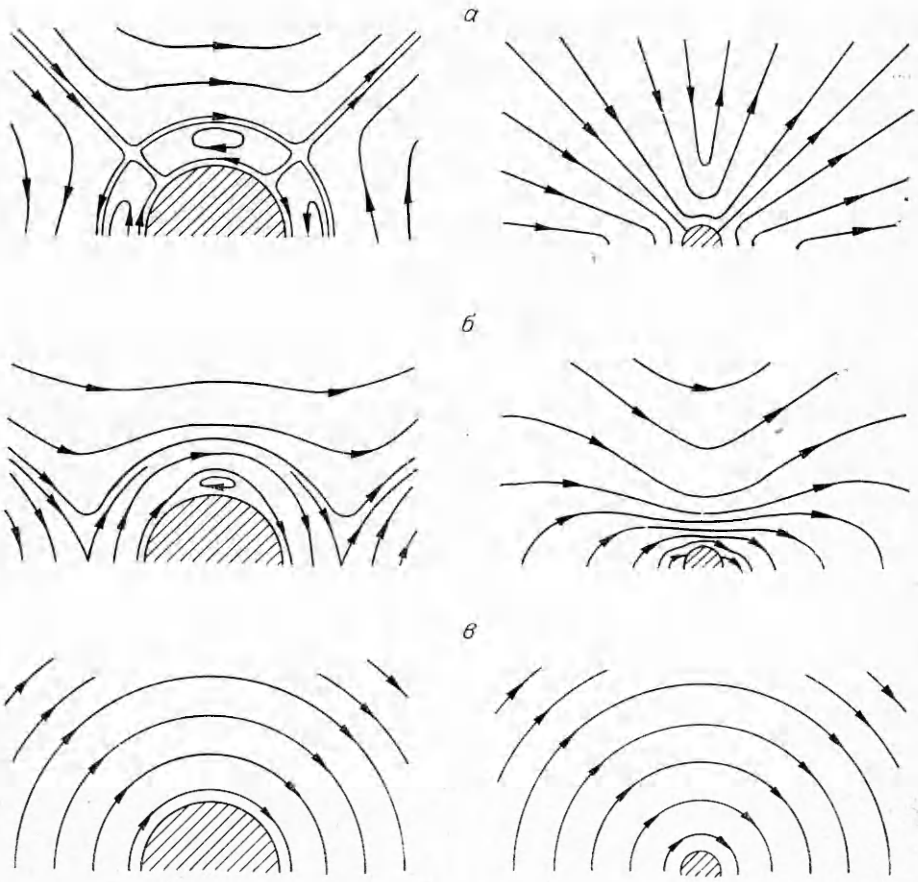
$$\psi^{(10)}_{\text{ст}} = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{(1+r)^2} - 1\right]\cdot L(\theta) - 3B\ln(1+r)\cdot \sin a]\cdot \sin\varphi, \tag{32}$$

где $\Phi_2(\eta) = \frac{3}{2} - 3\eta - (1 - 2i)\,e^{-(1+i)\eta} - (1 + 2i)\,e^{-(1-i)\eta} - \eta e^{-(1+i)\eta} -$

$- \eta e^{-(1-i)\eta} + \frac{1}{2}e^{-2\eta}$, а $\Phi_1(\eta)$ и $L(\theta)$ определены выражениями (26), (30) соответственно.

Таким образом, в случае одинаковых частот суперпозиция стационарных течений не наблюдается, поскольку в выражениях (31), (32) появляется вклад, обусловленный нелинейным взаимодействием двух колебаний во внутренней области.

На фиг. 2 показаны линии тока стационарного течения во внутренней (слева) и внешней (справа) областях при изменении разности фаз φ между двумя колебаниями ($\omega_1 = \omega_2$, $a = \pi/2$, $A_1 = A_2$). Видно, что когда колебания происходят в фазе $\varphi = 0$ (фиг. 2, *а*), то характер течения как во внешней, так и во внутренней области полностью совпадает с течением Шлихтинга [6]. В дальнейшем (по мере увеличения φ) картина качественно меняется: во внутренней области боковые вихри удаляются от поверхности цилиндра и уменьшаются в размерах вплоть до полного исчезновения (фиг. 2, *б*, $\varphi = \pi/6$); верхний вихрь также уменьшается в размерах, но прижимается к поверхности цилиндра. Во внешней же области появляются два замкнутых вихря, размер которых по мере увеличения φ уменьшается, при этом во внешней и внутренней областях развивается крупномасштабное циркулирующее течение. Заметим, что при $\varphi = 90°$ (фиг. 2, *в*) полученная картина по характеру совпадает с течением, описанным Лонге — Хиггинсом [7], который рассмотрел этот частный случай для объяснения аномальных океанических течений, образующихся возле



Фиг. 2

изолированных островов. В работе [8] показано, что характер течения Лонге — Хиггинса не зависит от числа $\mathrm{Re}_{\text{ст}}$ и является своеобразным аналогом течения Пуазейля.

Определим положение линий ветвления. Повторив аналогичные вычисления, что и при выводе уравнений (27), (28), получим

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\pm\frac{E}{C}\cos\gamma\right) + \frac{\gamma}{2} + \pi n, \tag{33}$$

где плюс относится к внутренней линии ветвления, а минус — к внешней и где

$$E = B\sin\varphi\cdot\sin a;\quad C = \frac{1}{2} + B\cos\varphi\cdot\cos a + \frac{1}{2}B^2\cos 2a;$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{D}{C} + \pi n;\quad D = B\cos\varphi\cdot\sin a + \frac{1}{2}B\sin 2a.$$

Из выражения (33) следует, что картина течения повторяется через π. Кроме того, как внутренние, так и внешние линии ветвления чередуются не через $\pi/2$, как это наблюдается для случая различных частот, а их пространственное разделение зависит от параметров, характеризующих сложное звуковое поле. Заметим, что могут реализоваться такие ситуации, когда внешние и внутренние линии ветвления совпадают: $B = 0$ или ∞, что соответствует простому звуковому полю; $a = \pi n$, т. е. линии распространения двух волн совпадают; $\varphi = \pi n$, т. е. колебания происходят либо в фазе, либо в противофазе. Следовательно, в этих случаях характер течения полностью совпадает с течением Шлихтинга [6]. Следует также отметить, что если $|E/C \cos \gamma| > 1$, то не существует никаких линий ветвления и стационарное течение представляет собой крупномасштабную циркуляцию (течение такого типа показано на фиг. 2, *в*). Однако если $B = 1$, $a = \pi$, $\varphi = 0$, то стационарное течение отсутствует. Физически это оправдано, так как указанный случай соответствует расположению цилиндра в узле скорости стоячей волны.

Поскольку в случае одинаковых частот вблизи цилиндра появляется крупномасштабное циркулирующее течение, то на цилиндр действует стационарный момент сил, который определяется в виде

$$M = 4\pi\mu R(L/\Delta_{\text{ак}})(A_1 A_2/\omega) \sin a \cdot \sin \varphi.$$

Можно убедиться, что стационарный момент сил будет равен нулю в том случае, когда сложное звуковое поле сводится к простому, т. е. к задаче Шлихтинга [6]. В случае же $\omega_1 \neq \omega_2$, как показали вычисления, на цилиндр не действует никакая стационарная сила.

Приведенные выше результаты записаны в переменных Эйлера. Однако экспериментальное исследование вторичных течений, как правило, проводят с использованием меченых частиц (метод треков), поведение которых описывается в переменных Лагранжа. Если для стационарного течения описания Эйлера и Лагранжа дают идентичные результаты, то при нестационарном движении они различаются, т. е. линии тока (переменные Эйлера) не совпадают с траекториями частиц (переменные Лагранжа). В работе [9] показано, что траектория частиц связана с линией тока вторичного течения соотношением

$$\psi^{\text{л}}_{\text{ст}}\mathbf{k} = \psi^{\text{э}}_{\text{ст}}\mathbf{k} + F\mathbf{k},$$

где

$$F\mathbf{k} = -\frac{1}{2}\left\langle \left(\int_0^t \mathbf{u}^{\text{э}}_{\text{н}} dt \right) \times \mathbf{u}^{\text{э}}_{\text{н}} \right\rangle;$$

$\mathbf{u}^{\text{э}}_{\text{н}}$ — пульсационная скорость в переменных Эйлера; $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении z.

В случае различных частот, используя выражения (20), (21), получим

$$(34)\quad F = O(H);\; F = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot \Phi_3(\eta) - \frac{1}{2}B^2 b^{-3} \sin 2(\theta - a)\cdot \Phi_3(b\eta) + O(\mathrm{H})$$

во внешней и внутренней областях соответственно, где

$$(35)\quad \Phi_3(\eta) = 1 + e^{-2\eta} - e^{-(1+i)\eta} - e^{-(1-i)\eta} - i\eta e^{-(1+i)\eta} + i\eta e^{-(1-i)\eta}.$$

Из первого выражения (34) следует, что во внешней области линии тока и траектории частиц совпадают с точностью до членов порядка $O(\mathrm{H})$, что согласуется со случаем простого звукового поля [9].

В случае одинаковых частот получим

$$F = -\frac{1}{2}B\left[1 - \frac{1}{(1+r)^4}\right]\sin\varphi \cdot \sin a + O(\mathrm{H}),$$

$$F = -\frac{1}{2}L(\theta)\Phi_3(\eta) - \frac{1}{2}B \sin\varphi \cdot \sin a \cdot \Phi_4(\eta) + O(\mathrm{H})$$

для внешней и внутренней областей соответственно, где $\Phi_3(\eta)$ и $L(\theta)$ определяются выражениями (35), (30), а

$$\Phi_4(\eta) = 2 - 4\eta + 2e^{-2\eta} - 2e^{-(1+i)\eta} - 2e^{-(1-i)\eta} + 2\eta e^{-(1+i)\eta} - 2\eta e^{-(1-i)\eta}.$$

Таким образом, в случае одинаковых частот линии тока и траектории частиц уже не совпадают во внешней области. Однако, как показали дополнительные расчеты на ЭВМ, характер течения в переменных Лагранжа не отличается существенно от описания Эйлера как в случае одинаковых, так и различных частот.

Приведенные выше результаты получены в предположении малости числа Рейнольдса, подсчитанного по скорости вторичных течений. При $\mathrm{Re}_{\text{ст}} \gg 1$ уравнение, описывающее стационарное течение во внешней области, имеет вид [5]

$$\frac{\partial(\psi_{\text{ст}}, \nabla^2\psi_{\text{ст}})}{\partial(\theta, r)} = \frac{1}{\mathrm{Re}_{\text{ст}}} \nabla^4\psi_{\text{ст}}. \tag{36}$$

Стационарное течение во внутренней области по-прежнему описывается уравнением (18б). Видно, что хотя во внутренней области в случае различных частот осуществляется суперпозиция вторичных течений, присущих каждому колебанию, однако во внешней области при $\mathrm{Re}_{\text{ст}} \gg 1$ в силу нелинейности уравнения (36) суперпозиция не имеет места.

В заключение отметим, что суперпозиция вторичных течений как внутренних, так и внешних не будет выполняться в членах высшего порядка (например, $O(\varepsilon^3)$) независимо от величины $\mathrm{Re}_{\text{ст}}$ и от соотношения между частотами.

Автор выражает благодарность В. А. Мурге и И. И. Тюрлику за вычисления на ЭВМ.

Поступила 15 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. Н.** Тепло-и массообмен в звуковом поле. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1970.
2. **Физическая** акустика. Т. 2. Ч. Б. М., «Мир», 1969.
3. **Физика** и техника мощного ультразвука. Т. 3. М., «Наука», 1970.
4. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
5. **Riley N.** Oscillatory viscous flows. Review and extension.—«J. Inst. Math. and Applics.», 1967, vol. 3, p. 419—434.
6. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
7. **Longuet M. S.— Higgins** Steady current induced by oscillations round islands.— «J. Fluid. Mech.», 1970, vol. 42, p. 701—720.
8. **Riley N.** Stirring of a viscous fluid.— ZAMP, 1971, vol. 22, p. 645—653.
9. **Raney W. P., Corelly J. C., Westervelt P. J.** Acoustical streaming in the vicinity of a cylinder.—«J. Acoust. Soc. Amer.», 1954, vol. 26, N 6, p. 1006—1014.