

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИЛЫ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ДВУХСЛОЙНОМ ЦИЛИНДРЕ С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ СЛОЕВ

УДК 537.21

Ю. П. Емец¹, Ю. В. Обносов², Ю. П. Онофрийчук¹

¹ Институт электродинамики НАН Украины, 252680 Киев

² Казанский государственный университет, 420043 Казань

1. Введение. Хорошо известно, что в неоднородных диэлектриках, находящихся в электрическом поле, под влиянием поляризационных эффектов возникают электрические силы, которые существенно проявляются в сильно неоднородных диэлектриках, подверженных воздействию полей с высокой напряженностью.

В настоящей работе исследуются электрические силы в двухслойном диэлектрическом цилиндре неограниченной длины. По-иному, что предпочтительнее, эту неоднородную структуру можно рассматривать как диэлектрический цилиндр, внутри которого помещен параллельно ему, неконцентрически, другой диэлектрический цилиндр (рис. 1).

Неоднородная система находится во внешнем электрическом поле, которое на большом расстоянии от цилиндров однородно и направлено поперечно их осям. По предположению диэлектрические проницаемости всех материалов в системе могут быть произвольными. В частном случае, если устремить проницаемость внутреннего цилиндра к неограниченно большому значению, то приходим к системе металлического цилиндра с неравномерным покрытием изоляции. Подобные системы характерны для многих электрофизических установок и высоковольтных аппаратов.

В кусочно-однородных диэлектриках электрические силы появляются на граничных поверхностях, разделяющих разнородные материалы. Поверхностные силы распределяются таким образом, что своим действием они стремятся деформировать диэлектрические тела, вытягивая их вдоль направления внешнего электрического поля.

Неравномерное распределение поверхностных сил приводит к появлению интегральных сил, которые, действуя на цилиндры, стремятся сместить их относительно друг друга.

В результате действия локальных и интегральных сил в диэлектрических конструкциях должны появляться механические напряжения; их необходимо учитывать при разработке элементов различных электрофизических установок энергетического и технического назначения.

Исследуемая проблема требует решения двух отдельных задач. Вначале надо рассчитать электрическое поле в цилиндрах и в окружающем их пространстве. После этого по результатам расчета поля могут быть вычислены сперва поверхностные, а затем и интегральные силы.

Замечательно, что обе эти задачи имеют полное аналитическое решение, представленное в простой форме. При получении решений используются эффективные методы теории функций комплексного переменного.

2. Краевая задача. Для рассматриваемых условий электрическое поле в системе двумерно, и поэтому можно перейти в плоскость комплексного переменного $z = x + iy$.

Уравнения электростатики для линейных кусочно-однородных сред позволяют ввести

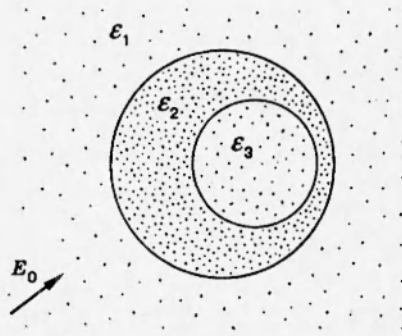


Рис. 1

комплексные функции напряженности и смещения электрического поля

$$E(z) = E_x - iE_y, \quad D(z) = D_x - iD_y, \quad D = \varepsilon E \quad (2.1)$$

(ε — диэлектрическая проницаемость). Функции (2.1) являются аналитическими (за исключением граничных линий) в каждой из трех областей S_μ ($\mu = 1, 2, 3$), занимаемых однородными материалами (рис. 2,а).

На граничных контурах L_1 и L_2 выполняются условия непрерывности касательных составляющих вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} и нормальных составляющих вектора смещения \mathbf{D} . Записанные в терминах функции $E(z)$ эти условия имеют вид

$$\operatorname{Re} \{n(t) \varepsilon_2 E_2(t)\} = \operatorname{Re} \{n(t) \varepsilon_\nu E_\nu(t)\},$$

$$t \in L_{(\nu+1)/2} \quad (\nu = 1, 3), \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Im} \{n(t) E_2(t)\} = \operatorname{Im} \{n(t) E_\nu(t)\},$$

где $n(t)$ — единичная нормаль на граничных контурах:

$$n(t) = t/r_1 = e^{i\vartheta} \quad (t \in L_1), \quad n(t) = (t-h)/r_2 \quad (t \in L_2) \quad (0 \leq \vartheta < 2\pi)$$

(r_1 и r_2 — радиусы цилиндров ($r_1 > r_2$), h — расстояние между осями цилиндров). Индексы диэлектрических проницаемостей и функций электрического поля показывают принадлежность этих величин к соответствующим областям S_μ , приведенным на рис. 2,а.

Дополнительным условием задачи служит заданное в бесконечно удаленной точке значение внешнего однородного электрического поля

$$E_1(\infty) = E_0 = E_{0x} - iE_{0y}. \quad (2.3)$$

Граничные соотношения (2.2) можно несколько упростить. С этой целью запишем их вначале в развернутом виде

$$\varepsilon_2 E_2(t) + \varepsilon_2 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)} = \varepsilon_1 E_1(t) + \varepsilon_1 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} \quad (t \in L_1),$$

$$E_2(t) - \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)} = E_1(t) - \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} \quad (t \in L_1),$$

$$\varepsilon_2 E_2(t) + \varepsilon_2 \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{E_2(t)} = \varepsilon_3 E_3(t) + \varepsilon_3 \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{E_3(t)} \quad (t \in L_2), \quad (2.4)$$

$$E_2(t) - \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{E_2(t)} = E_3(t) - \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{E_3(t)} \quad (t \in L_2).$$

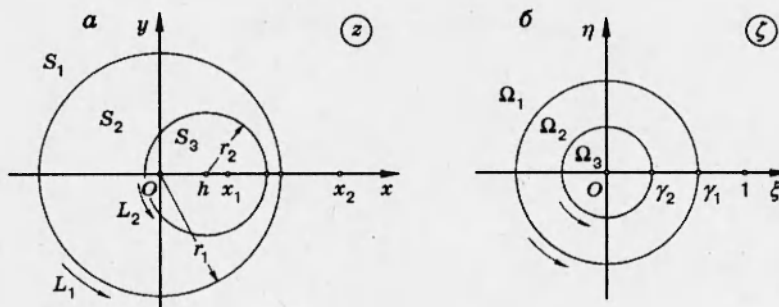


Рис. 2

Здесь черта над комплексной величиной означает, как обычно, комплексное сопряжение; при написании равенств (2.4) используются очевидные соотношения

$$\overline{n(t)} = \frac{\bar{t}}{r_1} = \frac{r_1}{t}, \quad \overline{n(t)} = \frac{t-h}{r_2} = \frac{r_2}{t-h}.$$

Исключая из каждой пары равенств (2.4) функцию $\overline{E_2(t)}$, получим два соотношения:

$$2\varepsilon_2 E_2(t) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E_1(t) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)}, \quad t \in L_1, \quad (2.5)$$

$$2\varepsilon_2 E_2(t) = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) E_3(t) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2.$$

В дальнейшем удобно оперировать относительными диэлектрическими проницаемостями

$$\Delta_{2\nu} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_\nu}{\varepsilon_2 + \varepsilon_\nu}, \quad -1 < \Delta_{2\nu} < 1 \quad (\nu = 1, 3). \quad (2.6)$$

Используя параметры (2.6), граничным соотношениям (2.5) можно придать окончательно следующую форму:

$$(1 + \Delta_{21}) E_2(t) = E_1(t) - \Delta_{21} \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)}, \quad t \in L_1, \quad (2.7)$$

$$(1 + \Delta_{23}) E_2(t) = E_3(t) - \Delta_{23} \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2.$$

Равенства (2.7) вместе с дополнительным условием (2.3) представляют собой граничные соотношения однородной обобщенной краевой задачи Римана (в последнее время эту задачу называют также двухэлементной краевой задачей).

Краевая задача (2.3), (2.7) вполне разрешима. Ее подробное исследование методами теории функций комплексного переменного изложено в приложении.

3. Электрическое поле в системе. Решение краевой задачи (2.3), (2.7), данное в приложении, позволяет записать в конечном итоге явные выражения функций электрического поля внутри цилиндров и во внешней области.

В системе координат, фиксированной на рис. 2,а, электрическое поле определяется выражениями

$$E_1(z) = E_0 + \overline{E_0} \left\{ \frac{\Delta_{21} r_1^2}{z^2} - \frac{1 - \Delta_{21}^2}{\Delta_{21}} (x_2 - x_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Delta^k \left(\frac{T_{1k}}{z - Q_{1k}} \right)^2 \right] \right\} \quad (z \in S_1),$$

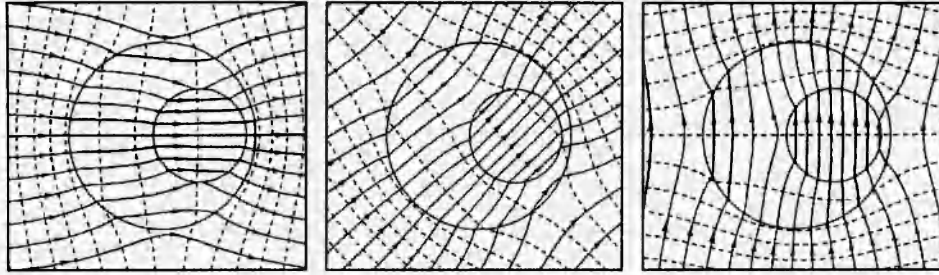


Рис. 3

$$E_2(z) = (1 - \Delta_{21}) \left\{ E_0 + (x_2 - x_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta^k \left[E_0 \left(\frac{T_{2k}}{z - Q_{2k}} \right)^2 - \frac{E_0^-}{\Delta_{21}} \left(\frac{T_{1k}}{z - Q_{1k}} \right)^2 \right] \right\} \right\} \quad (z \in S_2), \quad (3.1)$$

$$E_3(z) = (1 - \Delta_{21})(1 + \Delta_{23}) E_0 \left\{ 1 + (x_2 - x_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Delta^k \left(\frac{T_{2k}}{z - Q_{2k}} \right)^2 \right] \right\} \quad (z \in S_3).$$

Здесь

$$\Delta = \Delta_{21}\Delta_{23}, \quad T_{jk} = \frac{a_{jk}}{1 - a_{jk}^2}, \quad Q_{jk} = \frac{x_1 - x_2 a_{jk}^2}{1 - a_{jk}^2} \quad (j = 1, 2),$$

$$a_{1k} = \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{k-1} \left(\frac{x_1 - h}{x_2 - h} \right)^k \right]^{1/2}, \quad a_{2k} = \frac{1}{a_{1k}} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2h} \left\{ h^2 + r_1^2 - r_2^2 \mp \left[(h^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4(r_1 h)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

Точки x_1 и x_2 расположены на оси x и являются точками симметрии относительно окружностей L_1 и L_2 .

Для иллюстрации на рис. 3 по формулам (3.1), (3.2) построены картины электрического поля для системы с параметрами $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$, $\epsilon_3 = 12$, $r_2/r_1 = 0,5$, $h/r_1 = 0,4$ при трех направлениях внешнего электрического поля ($\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$, α — угол между вектором \mathbf{E}_0 и осью x).

Выражения электрического поля (3.1) содержат ряды линейных диполей, стандартная форма которых в комплексных переменных имеет вид

$$E(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{p}{(z - w)^2},$$

где p — комплексный момент диполя; w — координата диполя на плоскости комплексной переменной z .

В выражениях (3.1) фигурируют две группы диполей. Одна из них расположена на отрезке $[h, x_1)$ действительной оси x с координатами Q_{1k} . Плотность распределения диполей возрастает по мере приближения к предельной точке x_1 , которая является точкой сгущения диполей этой группы. Другая с координатами Q_{2k} также расположена на действительной оси x с точкой сгущения x_2 . Диполи этой группы связаны с диполями первой группы соотношениями инверсии относительно окружности L_1 (имеющей радиус r_1):

$$Q_{1k}Q_{2k} = r_1^2. \quad (3.3)$$

Кроме того, имеется один изолированный диполь, расположенный в центре окружности L_1 ; он присутствует только в выражении для $E_1(z)$, его момент не зависит от радиуса и диэлектрической проницаемости внутреннего цилиндра.

Анализ выражений (3.1), (3.2) показывает, что с увеличением порядкового номера k модули моментов диполей двух групп быстро уменьшаются по величине. Это свойство рядов позволяет ограничивать их малым числом членов в практических расчетах. Учет, например, только первых членов дает

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_0 + \overline{E_0} \left\{ \frac{\Delta_{21} r_1^2}{z^2} - \Delta_{23} (1 - \Delta_{21}^2) \frac{r_2^2}{(z-h)^2} \right\}, \quad z \in S_1, \\ E_2(z) &= (1 - \Delta_{21}) \left\{ E_0 + \frac{\Delta (r_1 r_2)^2 E_0}{h^2 (z - r_1^2/h)^2} - \frac{\Delta_{23} r_2^2 \overline{E_0}}{(z-h)^2} \right\}, \quad z \in S_2, \\ E_3(z) &= (1 - \Delta_{21}) (1 + \Delta_{23}) E_0 \left\{ 1 + \frac{\Delta (r_1 r_2)^2}{h^2 (z - r_1^2/h)^2} \right\}, \quad z \in S_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этом приближении принимаются во внимание только три диполя: один в центре цилиндра большого радиуса, другой в центре внутреннего цилиндра, а третий расположен во внешней области, будучи инверсионно связанным со вторым относительно окружности радиуса r_1 .

Если в выражениях (3.4) или (3.1), (3.2) положить $\Delta_{23} = 0$ ($\epsilon_2 = \epsilon_3$) или $\Delta_{21} = 0$ ($\epsilon_1 = \epsilon_2$), то получим хорошо известное решение задачи об уединенном диэлектрическом цилиндре во внешнем однородном электрическом поле.

4. Поверхностные силы. В изучаемой системе свободные заряды отсутствуют; считается также, что в ней не проявляются электрострикционные эффекты. В данном случае причиной возникновения сил выступают поляризационные явления в неоднородных диэлектриках. Плотность этих сил определяется формулой [1, 2]

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon. \quad (4.1)$$

В кусочно-однородных средах \mathbf{f} существует только на граничных поверхностях, разделяющих разнородные диэлектрики. Формула для вычисления плотности сил (4.1) в этом случае преобразуется к виду [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{2} \mathbf{n} (\epsilon_{(-)} - \epsilon_{(+)}) \left[E_{(+)\mathbf{t}}^2 + \frac{\epsilon_{(+)}}{\epsilon_{(-)}} E_{(+)\mathbf{n}}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{n} (\epsilon_{(-)} - \epsilon_{(+)}) \left[E_{(-)\mathbf{t}}^2 + \frac{\epsilon_{(-)}}{\epsilon_{(+)}} E_{(-)\mathbf{n}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор единичной нормали, направленный в область среды, фиксируемой индексом (-); $E_{\mathbf{t}}$ и $E_{\mathbf{n}}$ — касательная и нормальная составляющие вектора \mathbf{E} на граничных поверхностях при стремлении к ней с одной и другой стороны, показанные индексами (+) и (-).

Для того чтобы найти распределение плотности поверхностных сил на контурах цилиндров, необходимо обратиться к полученным выражениям электрического поля (3.1), (3.2) и вычислить нормальные и касательные компоненты вектора \mathbf{E} на контурах L_1 и L_2 :

$$E_{\mathbf{n}} = \text{Re}(E_{\mathbf{n}}), \quad E_{\mathbf{t}} = \text{Im}(E_{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{n} = e^{i\vartheta}. \quad (4.3)$$

Подстановка формул (4.3) в выражение (4.2) дает искомое значение сил.

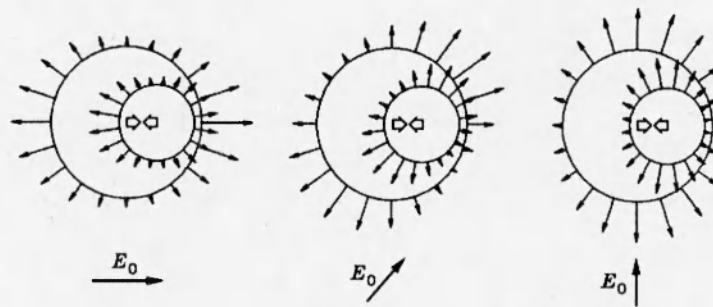


Рис. 4

В качестве примера были рассчитаны силы в системе с параметрами $\epsilon_\mu/\epsilon_0 = 1; 3; 12$, $r_2/r_1 = 0,5$, $h/r_1 = 0,4$ при трех направлениях внешнего электрического поля ($\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$). Результаты вычислений, иллюстрирующие характер распределения плотности поверхностных сил в рассматриваемой системе, графически представлены на рис. 4 (в относительных величинах $f/\epsilon_0|E_0|^2$).

Поверхностные силы своим действием (давлением и растяжением) стремятся деформировать цилиндры, вытягивая их вдоль направления внешнего электрического поля.

5. Интегральные силы. Неравномерное и несимметричное распределение поверхностных сил на цилиндрах приводит к появлению в системе интегральных сил, которые своим действием стремятся сместить цилиндры относительно друг друга. К цилиндрам приложены равные по величине и противоположно направленные силы, которые вычисляются (на единицу длины цилиндров) взятием интегралов от поверхностных сил на граничных контурах:

$$\mathbf{F}_1 = \int_{L_1} \mathbf{f} dt, \quad \mathbf{F}_2 = \int_{L_2} \mathbf{f} dt \quad (\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2). \quad (5.1)$$

Необходимо отметить, что поверхностные силы \mathbf{f} , согласно формулам (4.1) и (4.2), направлены перпендикулярно граничным окружностям цилиндров. Поэтому равнодействующие этих сил, сведенных к центрам окружностей, и есть интегральные силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 . Отсюда следует вывод о том, что силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 приложены к центрам окружностей (в пространстве — к осям цилиндров).

Вычисление интегральных сил по формулам (5.1) приводит обычно к необходимости численных расчетов. Ниже использован другой подход определения интегральных сил в системе, в основу которого положены представления о диполь-дипольных взаимодействиях. Такой способ вычисления сил позволяет получить аналитические выражения интегральных сил в простом виде, удобном для практического анализа.

Исходным положением для расчета сил в развиваемом методе служит выражение электрического поля $E_2(z)$, приведенное в (3.1). Оно представлено полями диполей двух групп, свойства которых обсуждались в третьем разделе. Схематично расположение диполей показано на рис. 5 (ориентация диполей соответствует случаю, когда $\Delta_{21}, \Delta_{23} > 0$).

Среда считается однородной с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . В этой среде рассматривается взаимодействие диполей, одна группа которых с моментами p_m ($m = 1, 2, \dots$) расположена на отрезке $[h, x_1)$. Координаты диполей второй группы с моментами p_n ($n = 1, 2, \dots$) связаны с координатами диполей первой группы преобразованием инверсии относительно окружности радиуса r_1 (3.3).

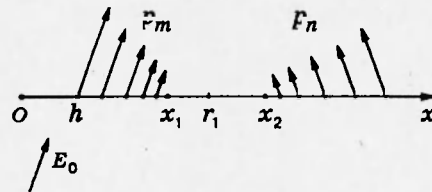


Рис. 5

Силы, испытываемые диполями p_m со стороны диполей p_n , определяются формулой

$$\mathbf{F}_{mn} = (p_m \text{ grad}) E_n. \quad (5.2)$$

Обратное действие диполей p_m на диполи p_n дает равные по величине и противоположно направленные силы

$$\mathbf{F}_{nm} = -\mathbf{F}_{mn}. \quad (5.3)$$

В однородных диэлектриках формулу (5.2) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{F}_{mn} = \text{grad} (p_m E_n). \quad (5.4)$$

Суммирование действия сил каждого диполя одной группы диполей на все диполи второй группы дает интегральные силы

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{F}_{mn}, \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1. \quad (5.5)$$

Общий член двойного ряда (5.5), вычисленный по формулам (5.2), (5.3) или (5.4), где p_m и E_n берутся из выражения для $E_2(z)$ в (3.1), имеет вид

$$\mathbf{F}_{mn} = 4\pi\epsilon_2 |E_0|^2 \frac{\Delta^{m+n} [(1 - \Delta_{21})(x_2 - x_1)^2 T_{1n} T_{2m}]^2}{\Delta_{21} (Q_{2m} - Q_{1n})^3}. \quad (5.6)$$

Как оказалось, силы \mathbf{F}_{mn} направлены вдоль оси x : $\mathbf{F}_{mn} = e_x F_{xmn}$ (e_x — единичный орт). Равенство нулю компоненты F_{ymn} означает, что при любом направлении внешнего электрического поля E_0 в системе отсутствуют моменты, которые в противном случае стремились бы развернуть цилиндры относительно E_0 .

Интегральные силы, таким образом, действуют вдоль прямой, соединяющей центры окружностей. Это центральные силы, они стремятся сместить цилиндры относительно друг друга, в данном случае вдоль оси x . Знаки интегральных сил, показывающие направление действия, зависят от соотношения между диэлектрическими проницаемостями материалов в системе.

Двойные ряды в формуле (5.5) быстро сходятся. Хорошие результаты дает приближение, в котором учитывается взаимодействие только нескольких первых диполей каждой из двух групп.

Если учитывается только по одному первому диполю в каждой группе, то выражения (5.5) и (5.6) с учетом формул (3.2) имеют вид

$$F_1 = F_{11} = -2\epsilon\Delta_{23}\Delta (1 - \Delta_{21})^2 \frac{r^4 h}{(1 - h^2)^3} \quad (0 < h < 1 - r). \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) записано в относительных величинах

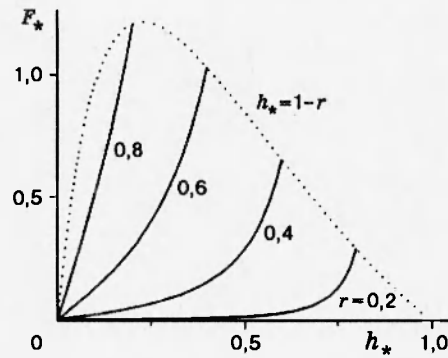


Рис. 6

$$F_{*11} = F_{11}/F_0 \quad (F_0 = 2\pi r_1 \varepsilon_0 |E_0|^2), \quad \varepsilon_* = \varepsilon_2/\varepsilon_0,$$

$$r_* = r_2/r_1, \quad h_* = h/r_1$$

(звездочки опущены).

Вычисление интегральных сил в системе может быть осуществлено двумя приемами: 1) непосредственным вычислением интегралов (5.1), что требует предварительного расчета поверхностных сил на цилиндрах; 2) на основе диполь-дипольного взаимодействия с выполнением простых однотипных операций дифференцирования (5.2) или (5.4) и последующего вычисления ряда (5.5).

Оба способа вычисления интегральных сил дают в точности одинаковые результаты. Однако второй подход нахождения сил в расчетном плане проще; он не требует вычисления поверхностных сил — достаточно рассчитать электрическое поле в цилиндре большего радиуса. Кроме того, окончательные выражения сил даются в аналитическом виде.

Зависимость интегральной силы от геометрических параметров системы (r , h) характеризуется наличием максимума, что иллюстрируется графически на рис. 6, где построены значения относительной силы при $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 6$. Пунктирная кривая, огибающая сплошные, соответствует предельному случаю — касанию цилиндров. Она имеет максимум при $h_* \approx 0,2$ для любых значений диэлектрических проницаемостей в системе.

6. Заключение. Исследование интегральной силы в системе некоаксиальных диэлектрических цилиндров позволяет сделать следующие выводы.

1. В системе действуют противоположно направленные интегральные силы, которые приложены к каждому цилиндру и стремятся сместить диэлектрические цилиндры относительно друг друга вдоль прямой, соединяющей центры окружностей.

2. Направление действий интегральных сил определяется знаком параметра Δ_{21} , т. е. соотношением между диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 , и не зависит от проницаемости внутреннего цилиндра ε_3 .

Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то внутренний цилиндр стремится сместиться от оси цилиндра большего радиуса, если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то внутренний цилиндр стремится сместиться в центральное положение. Когда оси двух цилиндров совпадают, интегральные силы равны нулю.

3. Интегральная сила имеет максимум при $h/r_1 \approx 0,2$.

4. При любом направлении внешнего электрического поля в рассматриваемой системе отсутствует момент, под действием которого цилиндры могли бы вращаться относительно друг друга.

Приложение. Рассмотрим решение краевой задачи (2.3), (2.7). В результате определяются электрические поля внутри цилиндров и внешней области. Решение задачи основано на методах теории функций комплексного переменного — используется метод конформного отображения и принцип аналитического продолжения.

Вначале следует отобразить плоскость z с неконцентрическими окружностями на плоскость ζ с концентрическими окружностями (см. рис. 1). Такое отображение осуществляется дробно-линейной функцией

$$\zeta = T^{-1}(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (\text{П.1})$$

Здесь x_1 и x_2 — точки, симметричные относительно окружностей L_1 и L_2 :

$$x_1 x_2 = r_1^2, \quad (x_1 - h)(x_2 - h) = r_2^2.$$

Точки x_1 и x_2 расположены на оси x ; их координаты даны в (3.2).

При отображении (П.1) области S_μ переходят в области Ω_μ ($\mu = 1, 2, 3$), окружности L_1 и L_2 — в окружности λ_1 и λ_2 , бесконечно удаленная точка $z = \infty$ переходит в точку $\xi = 1$ на действительной оси ξ .

Функция

$$z = T(\zeta) = \frac{r_2 \zeta - r_1}{\zeta - 1} \quad (\text{П.2})$$

осуществляет отображение, обратное (П.1).

В отображенной плоскости вводится кусочно-аналитическая функция $f(\zeta) = E(T(\zeta))$, для определения которой, согласно (2.7) и (П.2), имеем граничные соотношения

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{21}) f_2(\tau) &= f_1(\tau) - \Delta_{21} \left(\frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_1(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_1, \\ (1 + \Delta_{23}) f_2(\tau) &= f_3(\tau) - \Delta_{23} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - h} \right)^2 \overline{f_3(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_2. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Из (2.3) следует дополнительное условие

$$f_1(1) = E_0. \quad (\text{П.4})$$

По теореме Лорана функцию $f_2(\zeta)$, аналитическую в кольце $\widehat{\Omega}_2$, представим в виде

$$f_2(\zeta) = f_2^+(\zeta) + f_2^-(\zeta), \quad \begin{aligned} f_2^+(\zeta), & \quad |\zeta| < \gamma_1, \\ f_2^-(\zeta), & \quad |\zeta| > \gamma_2, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

причем, не нарушая общности, можно положить

$$f_2^-(1) = 0. \quad (\text{П.6})$$

С учетом представления (П.5) соотношения (П.3) преобразуются:

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{21}) f_2^+(\tau) + \Delta_{21} \left(\frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_1(\tau)} &= f_1(\tau) - (1 + \Delta_{21}) f_2^-(\tau), \quad \tau \in \lambda_1, \\ (1 + \Delta_{23}) f_2^+(\tau) - f_3(\tau) &= -(1 + \Delta_{23}) f_2^-(\tau) - \Delta_{23} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - h} \right)^2 \overline{f_3(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_2. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

В соответствии с принципом непрерывного аналитического продолжения соотношения (П.4), (П.6), (П.7) позволяют ввести две аналитические функции:

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} (1 + \Delta_{21}) f_2^+(\zeta) + \Delta_{21} \left(\frac{r_1}{T(\zeta)}\right)^2 \overline{f_1\left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta}\right)}, & |\zeta| < \gamma_1, \\ f_1(\zeta) - (1 + \Delta_{21}) f_2^-(\zeta), & |\zeta| > \gamma_1, \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} -(1 + \Delta_{23}) f_2^+(\zeta) + f_3(\zeta), & |\zeta| < \gamma_2, \\ (1 + \Delta_{23}) f_2^-(\zeta) + \Delta_{23} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - h}\right)^2 \overline{f_3\left(\frac{\gamma_2^2}{\zeta}\right)}, & |\zeta| > \gamma_2. \end{cases}$$

Здесь с учетом (П.2)

$$\frac{r_1}{T(\zeta)} = \gamma_1 \frac{\zeta - 1}{\zeta - \gamma_1^2}, \quad \frac{r_2}{T(\zeta) - h} = \gamma_2 \frac{\zeta - 1}{\zeta - \gamma_2^2}. \quad (\text{П.9})$$

Согласно выражениям (П.8), (П.9), функция $\Phi(\zeta)$ имеет в точке $\zeta = \gamma_1^2$ полюс не выше второго порядка, и поэтому есть полином второго порядка, который удобно представить в виде

$$\Phi(\zeta) \equiv \Delta_{21} \left[C_2 \left(\frac{r_1}{T(\zeta)}\right)^2 + C_1 \frac{r_1}{T(\zeta)} + C_0 \right], \quad (\text{П.10})$$

где C_0 , C_1 и C_2 — комплексные постоянные, подлежащие определению.

Из формул (П.6), (П.8), (П.9) вытекает, что в точке $\zeta = 1$ функция $\Psi(\zeta)$ равна нулю, и, следовательно, на основании теоремы Лиувилля

$$\Psi(\zeta) \equiv 0. \quad (\text{П.11})$$

Собирая вместе формулы (П.8), (П.10) и (П.11), запишем четыре равенства:

$$(1 + \Delta_{21}) f_2^+(\zeta) + \Delta_{21} \left(\frac{r_1}{T(\zeta)}\right)^2 \overline{f_1\left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta}\right)} = \Delta_{21} \left[C_2 \left(\frac{r_1}{T(\zeta)}\right)^2 + C_1 \frac{r_1}{T(\zeta)} + C_0 \right], \quad |\zeta| < \gamma_1,$$

$$f_1(\zeta) - (1 + \Delta_{21}) f_2^-(\zeta) = \Delta_{21} \left[C_2 \left(\frac{r_1}{T(\zeta)}\right)^2 + C_1 \frac{r_1}{T(\zeta)} + C_0 \right], \quad |\zeta| > \gamma_1, \quad (\text{П.12})$$

$$(1 + \Delta_{23}) f_2^+(\zeta) - f_3(\zeta) = 0, \quad |\zeta| < \gamma_2,$$

$$(1 + \Delta_{23}) f_2^-(\zeta) + \Delta_{23} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - h}\right)^2 \overline{f_3\left(\frac{\gamma_2^2}{\zeta}\right)} = 0, \quad |\zeta| > \gamma_2.$$

Теперь можно определить постоянные C_0 , C_1 и C_2 .

Полагая во втором равенстве (П.12) $\zeta = 1$ и учитывая формулы (П.4), (П.6) и (П.9), получаем

$$C_0 = E_0/\Delta_{21}. \quad (\text{П.13})$$

Первое равенство (П.12) преобразованием инверсии относительно окружности γ_1 приводится к виду

$$(1 + \Delta_{21}) \overline{f_2^+\left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta}\right)} + \Delta_{21} \left(\frac{T(\zeta)}{r_1}\right)^2 f_1(\zeta) = \Delta_{21} \left[\overline{C_2} \left(\frac{T(\zeta)}{r_1}\right)^2 + \overline{C_1} \frac{T(\zeta)}{r_1} + \overline{C_0} \right], \quad |\zeta| > \gamma_1.$$

Отсюда

$$(1 + \Delta_{21}) \left(\frac{r_1}{T(\zeta)}\right)^2 \overline{f_2^+\left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta}\right)} + \Delta_{21} f_1(\zeta) = \Delta_{21} \left[C_2 + C_1 \frac{r_1}{T(\zeta)} + C_0 \left(\frac{T(\zeta)}{r_1}\right)^2 \right], \quad |\zeta| > \gamma_1.$$

Учитывая формулы (П.4) и (П.9) и подставляя значение $\zeta = 1$, имеем

$$C_2 = \bar{E}_0. \quad (\text{П.14})$$

Можно также доказать (для краткости соответствующие выкладки опущены), что

$$C_1 = 0. \quad (\text{П.15})$$

Таким образом, постоянные в первом и втором равенствах (П.12) определены формулами (П.13)–(П.15), а сами равенства окончательно записываются так:

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{21}) f_2^+(\zeta) + \Delta_{21} \left(\frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 \overline{f_1 \left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta} \right)} &= \Delta_{21} E_0 \left(\frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 + E_0, \quad |\zeta| < \gamma_1, \\ f_1(\zeta) - (1 + \Delta_{21}) f_2^-(\zeta) &= \Delta_{21} \bar{E}_0 \left(\frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 + E_0, \quad |\zeta| > \gamma_1. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

На основании второго равенства (П.16), выражения (П.5) и третьего равенства (П.12) искомую функцию $f(\zeta)$ представим как

$$f(\zeta) = \begin{cases} f_1(\zeta) = (1 + \Delta_{21}) f_2^-(\zeta) + \Delta_{21} \bar{E}_0 \left(\gamma_1 \frac{\zeta - 1}{\zeta - \gamma_1} \right)^2 + E_0, & |\zeta| > \gamma_1, \\ f_2(\zeta) = f_1^+(\zeta) + f_2^-(\zeta), & \gamma_2 < |\zeta| < \gamma_1, \\ f_3(\zeta) = (1 + \Delta_{23}) f_2^+(\zeta), & |\zeta| < \gamma_2. \end{cases} \quad (\text{П.17})$$

Дальнейшие вычисления связаны с нахождением функции $f_2^-(\zeta)$, а затем $f_2^+(\zeta)$, что определяет функцию $f(\zeta)$.

Проведем преобразование инверсии во втором равенстве (П.16), а затем объединим его с первым. В результате

$$f_2^+(\zeta) + \Delta_{21} \left(\frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 \overline{f_2^-\left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta}\right)} = (1 - \Delta_{21}) E_0, \quad |\zeta| < \gamma_1. \quad (\text{П.18})$$

Аналогично объединение двух последних равенств (П.12) дает

$$\overline{f_2^-\left(\frac{\gamma_2^2}{\zeta}\right)} + \Delta_{23} \left(\frac{T(\zeta) - h}{r_2} \right)^2 f_2^+(\zeta) = 0, \quad |\zeta| < \gamma_2. \quad (\text{П.19})$$

Из соотношений (П.18) и (П.19) можно исключить функцию $f_2^+(\zeta)$ и воспользоваться формулами (П.9). Тогда

$$\Delta \left(\gamma_1 \frac{\zeta - 1}{\zeta - \gamma_1^2} \right)^2 \overline{f_2^-\left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta}\right)} - \left(\gamma_2 \frac{\zeta - 1}{\zeta - \gamma_2^2} \right)^2 \overline{f_2^-\left(\frac{\gamma_2^2}{\zeta}\right)} = \Delta_{23} (1 - \Delta_{21}) E_0, \quad |\zeta| < \gamma_2. \quad (\text{П.20})$$

Проведя в равенстве (П.20) преобразование инверсии, получаем функциональное уравнение относительно $f_2^-(\zeta)$:

$$f_2^-(\zeta) = -\Delta_{23} (1 - \Delta_{21}) \bar{E}_0 \left(\gamma_2 \frac{\zeta - 1}{\zeta - \gamma_2^2} \right)^2 + \Delta \left(\Gamma^{-1} \frac{\zeta - 1}{\zeta - \Gamma^{-2}} \right)^2 f_2^-(\Gamma^2 \zeta), \quad |\zeta| > \gamma_2. \quad (\text{П.21})$$

Здесь $\Gamma = \gamma_1/\gamma_2$.

Решение уравнения (П.21) находится методом математической индукции с помощью последовательной подстановки соотношений

$$f_2^-(\Gamma^2 \zeta) = -\Delta_{23} (1 - \Delta_{21}) \bar{E}_0 \left(\gamma_2 \frac{\zeta - \Gamma^{-2}}{\zeta - \gamma_2^2 \Gamma^{-2}} \right)^2 + \Delta \left(\Gamma^{-1} \frac{\zeta - \Gamma^{-2}}{\zeta - \Gamma^{-4}} \right)^2 f_2^-(\Gamma^4 \zeta), \quad |\zeta| > \gamma_2,$$

$$f_2^-(\Gamma^4 \zeta) = -\Delta_{23} (1 - \Delta_{21}) E_0 \left(\gamma_2 \frac{\zeta - \Gamma^{-4}}{\zeta - \gamma_2^2 \Gamma^{-4}} \right)^2 + \Delta \left(\Gamma^{-1} \frac{\zeta - \Gamma^{-4}}{\zeta - \Gamma^{-6}} \right)^2 f_2^-(\Gamma^6 \zeta), \quad |\zeta| > \gamma_2$$

и т. д.

После n -кратного применения этой процедуры

$$f_2^-(\zeta) = -\frac{1 - \Delta_{21}}{\Delta_{21}} \bar{E}_0 (\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^n \left[\Delta^k \left(\frac{\gamma_1 \Gamma^{-k}}{\zeta - \gamma_1^2 \Gamma^{-2k}} \right)^2 \right] + \Delta^n \left(\Gamma^{-n} \frac{\zeta - 1}{\zeta - \Gamma^{-2n}} \right)^2 f_2^-(\Gamma^{2n} \zeta), \quad |\zeta| > \gamma_2. \quad (\text{П.22})$$

Остаточный член ряда (П.22) содержит малые параметры Δ , $\Gamma^{-1} < 1$ и поэтому при неограниченном увеличении числа n стремится к нулю.

Таким образом, функция $f_2^-(\zeta)$ имеет вид

$$f_2^-(\zeta) = -\frac{1 - \Delta_{21}}{\Delta_{21}} \bar{E}_0 (\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Delta^k \left(\frac{\gamma_1 \Gamma^{-k}}{\zeta - \gamma_1^2 \Gamma^{-2k}} \right)^2 \right], \quad |\zeta| > \gamma_2. \quad (\text{П.23})$$

Функция $f_2^+(\zeta)$ определяется с помощью (П.18) и (П.23) (после преобразования инверсии относительно окружности γ_1). Вычисления дают

$$f_2^+(\zeta) = (1 - \Delta_{21}) E_0 \left\{ 1 + (\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Delta^k \left(\frac{\Gamma^k}{\zeta - \Gamma^{2k}} \right)^2 \right] \right\}, \quad |\zeta| < \gamma_1. \quad (\text{П.24})$$

Подстановка выражений (П.23) и (П.24) в соотношения (П.17) определяет искомую функцию $f(\zeta)$. Осуществляя после этого переход в плоскость z , получаем выражения электрического поля, приведенные в п. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Durand E. Electrostatique. Т. 3. Methodes de calcul dielectriques. Paris: Masson, 1966.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 1/VIII 1994 г.