# РАЗВИТИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛИТЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОВОМ РЕЖИМЕ

*А. Г. Костюк*

*(Москва)*

Упруго-пластическая деформация плиты в нестационарном температурном поле рассмотрена в работе [1] в терминах теории течения. Результат получен в виде системы уравнений, требующих численного решения.

В работе дано аналитическое решение задачи о деформации плиты при одностороннем и двустороннем тепловом ударе. Вывод основных уравнений задачи в отличие от [1] дан в терминах деформационной теории.

Нагружение тела при воздействии нестационарного температурного поля вообще не является простым: в одно и то же время в теле существуют области активной и пассивной деформации; если образуется всего одна пластическая область, то процесс деформирования делится на четыре стадии. Первая стадия — стадия упругого деформирования протекает от начала нестационарного теплового режима до момента, когда в наиболее напряженной точке наступает условие текучести.

На второй стадии режима в теле существуют две области: упругая и область активной пластической деформации. Вторая стадия длится до момента, когда в некоторой точке зоны активной пластической деформации величина пластической деформации достигает максимума (мерой пластической деформации может быть интенсивность пластической деформации или максимальный угол сдвига), вслед за этим в рассматриваемой точке наступает процесс разгрузки.

На третьей стадии существуют три зоны: упругая, активной пластической деформации и разгрузки. Во время третьей стадии процесса граница между упругой зоной и зоной активной пластической деформации продолжает перемещаться в глубь упругой зоны. Вслед за упомянутой границей движется поверхность раздела зоны активной пластической деформации и зоны разгрузки.

Первую из названных границ для краткости будем именовать фронтом нагружения, вторую — фронтом разгрузки.

Третья стадия режима заканчивается в момент, когда зона активной пластической деформации исчезает, после чего наступает четвертая стадия — стадия упругой деформации во всем объеме тела.

**1.** В качестве примера задач упомянутого типа рассмотрим процесс развития упруго-пластических деформаций в неограниченной плите при нестационарном тепловом режиме. Толщина плиты всюду постоянна и равна $2L$. Температурное поле — одномерное и симметричное [1] по отношению к срединной плоскости пластины.

При этих условиях два главных напряжения (параллельных срединной плоскости) равны между собой, а третье (перпендикулярное срединной плоскости) равно нулю.

Материал плиты будем считать упруго-идеально-пластическим и сжимаемым как в упругой, так и в пластической области.

Рассмотрим плиту в третьей стадии процесса, когда в ней существуют зоны упругой работы, активной пластической деформации и разгрузки.

При прогреве или охлаждении плиты со стороны ее боковых поверхностей пластическая зона и вслед за ней зона разгрузки распространяются от границы плиты вглубь.

Пусть $x = X / L$ — относительная текущая координата, $x_1 = X_1 / L$ — относительное расстояние от срединной плоскости пластины до границы упругой зоны и зоны активной пластической деформации, $x_2 = X_2 / L$ — относительная координата границы зоны активной пластической деформации и зоны разгрузки.

Допустим, что упругая зона простирается от срединной плоскости до $x = x_1$, зона активной пластической деформации занимает область $x_1 \leqslant x < x_2$, зона разгрузки определяется интервалом $x_2 < x \leqslant 1$.

Для перечисленных трех зон можно написать следующие основные соотношения

$$\varepsilon = \frac{1-\nu}{E}\sigma + \alpha t(\tau, x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_1) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \frac{1-\nu}{E}\sigma + \alpha t(\tau, x) \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2) \tag{1.2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m{}^p + \frac{1-\nu}{E}\sigma + \alpha t(\tau, x) \qquad (x_2 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1.3}$$

Здесь $\varepsilon$ — суммарная деформация в направлении, параллельном плоскостям плиты; $\varepsilon^p$ — пластическая деформация, которая в активной зоне зависит от координаты и времени; $\varepsilon_m{}^p$ — остаточная (пластическая) деформация в зоне разгрузки, будет функцией координаты $x$; $\sigma$ — напряжение в направлении деформации $\varepsilon$; $\sigma_s$ — предел текучести (со знаком напряжения $\sigma$); $\alpha$ — коэффициент линейного удлинения; $\tau =$

[1] Условие может быть заменено требованием неискривляемости срединной плоскости плиты.

$= a\tau_1/L^2$— безразмерное время; $a$ — коэффициент температуропроводности; $\tau_1$— время; $E$, $\nu$ — упругие константы материала; $t(\tau, x)$ — температура.

В дальнейшем предполагаем, что $E$, $\nu$, $\sigma_s$, $\alpha$ от температуры не зависят.

Ввиду неискривляемости срединной плоскости деформация $\varepsilon$ от $x$ не зависит, но изменяется с течением времени.

Полагая $x = x_1$ в равенстве (1.2) и вычитая получаемое уравнение почленно из исходного (1.2), найдем

$$\varepsilon^p(\tau, x) = \alpha\,[t(\tau, x_1) - t(\tau, x)] \qquad (x_1 = x_1(\tau)) \tag{1.4}$$

На границе $x = x_2$ пластическая деформация достигает максимального значения, т. е.

$$(\partial\varepsilon^p / \partial\tau)_{x=x_2} = 0 \tag{1.5}$$

Из (1.5) и (1.4) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial t(\tau, x_2)/\partial\tau - \partial t(\tau, x_1)/\partial\tau}{\partial t(\tau, x_1)/\partial x_1} \tag{1.6}$$

в которое, кроме неизвестной функции $x_1$, входит также $x_2 = x_2(\tau)$. Для получения второго условия напишем уравнение равновесия для пластины в виде

$$\int_0^1 \sigma dx = \int_0^{x_1} \sigma dx + \int_{x_1}^{x_2} \sigma_s dx + \int_{x_2}^1 \sigma dx = 0 \tag{1.7}$$

Дифференцируя левую часть (1.7) субстанциально по времени, после упрощений получим

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} dx + \int_{x_2}^1 \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} dx = 0 \tag{1.8}$$

Напряжения в упругой зоне и зоне разгрузки выразим из уравнений (1.1) и (1.3) соответственно

$$\sigma = \sigma_s + \frac{E\alpha}{1-\nu}[t(\tau, x_1) - t(\tau, x)] \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_1) \tag{1.9}$$

$$\sigma = \sigma_s + \frac{E\alpha}{1-\nu}[t(\tau, x_1) - t(\tau, x)] - \frac{E\varepsilon_m{}^p}{1-\nu} \qquad (x_2 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1.10}$$

Здесь принято получаемое из (1.1) условие

$$\varepsilon = \frac{1-\nu}{E}\sigma_s + \alpha t(\tau, x_1) \tag{1.11}$$

Из (1.9) и (1.10) видно, что $\partial\sigma/\partial\tau$ в упругой зоне и зоне разгрузки выражается по единой формуле, так как $\partial\varepsilon_m{}^p/\partial\tau = 0$.

Вводя (1.9) и (1.10) в уравнение равновесия (1.8), после преобразований с использованием (1.6) получим следующее конечное соотношение между функциями $x_1$, $x_2$ и временем $\tau$

$$(1 + x_1 - x_2)\frac{\partial t(\tau, x_2)}{\partial\tau} - \int_0^{x_1} \frac{\partial t(\tau, x)}{\partial\tau} dx - \int_{x_2}^1 \frac{\partial t(\tau, x)}{\partial\tau} dx = 0 \tag{1.12}$$

Сформулированная задача сводится к решению уравнений (1.6) и (1.12), из которых одно дифференциальное первого порядка и второе — конечное. Последнее для любого заданного закона температуры $t(\tau, x)$ имеет вид $f(x_1, x_2, \tau)$.

Развитие процесса во второй стадии (до появления зоны разгрузки) исследуется при помощи уравнения равновесия, записываемого в виде

$$\int_0^{x_1} \sigma dx + \int_{x_1}^1 \sigma_s dx = 0 \tag{1.13}$$

и соотношения (1.9).

Подставляя (1.9) в (1.13), получим конечное условие, определяющее $x_1 = x_1(\tau)$ во второй стадии

$$x_1 t(\tau, x_1) - \int_0^{x_1} t(\tau, x)\, dx = -\frac{(1-\nu)\sigma_s}{E\alpha} \tag{1.14}$$

Конец второй и начало третьей стадии соответствует максимуму пластической деформации (1.4) на поверхности плиты при $x = 1$.

Соответствующий момент $\tau = \tau_*$ может быть определен путем отыскания максимума функции

$$\varepsilon^p(\tau, 1) = \alpha\,[t(\tau, x_1) - t(\tau, 1)] \qquad (1.15)$$

где $x_1 = x_1(\tau)$ в соответствии с (1.14).

Приравнивая нулю производную по времени от правой части (1.15) и используя (1.14), после преобразования получим уравнение

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial t(\tau, x)}{\partial \tau}\,dx = x_1 \frac{\partial t(\tau, 1)}{\partial \tau}$$

из которого и найдем значение $\tau = \tau_*$, а по (1.14) определим $x_{1*} = x_1(\tau_*)$, соответствующие началу третьей стадии процесса.

Следовательно, уравнения (1.6) и (1.12), определяющие координаты границ зон в третьей стадии, должны быть рашены при следующих начальных условиях:

$$x_1 = x_{1*} \text{ при } \tau = \tau_*,\ x_2 = 1$$

Найдя функции $x_1 = x_1(\tau)$ и $x_2 = x_2(\tau)$, можно по формуле (1.4) определить пластическую деформацию. Полагая $x = x_2$, получим из (1.4) максимальное значение деформации, а так как в процессе разгрузки пластическая деформация в каждой точке остается неизменной, то зависимость $\varepsilon^p(x_2)$ одновременно является и зависимостью $\varepsilon_m^p(x)$. Иными словами остаточная деформация $\varepsilon^p(x)$ определяется параметрически:

$$\varepsilon_m{}^p(x) = \alpha\,[t(\tau, x_1) - t(\tau, x)], \qquad x_1 = x_1(\tau), \qquad x = x_2(\tau)$$

где $\tau$ — параметр. Напряжения в упругой зоне и зоне разгрузки определяются формулами (1.9) и (1.10); в зоне активной пластической деформации $\sigma = \sigma_s$.

Четвертая стадия процесса (общая разгрузка) начинается с момента $\tau_{**}$, определяемого любым из соотношений

$$dx_1 / d\tau = 0 \text{ или } x_1(\tau_{**}) = x_2(\tau_{**})$$

Максимальная величина области, где произошла пластическая деформация, может быть найдена из условия

$$y_0 = 1 - x_1(\tau_{**}) = 1 - x_0$$

Напряжения при общей разгрузке можно определить из формул (1.1) и (1.3), где функция времени $\varepsilon$ должна быть найдена из условия равновесия. Придем к следующим зависимостям

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{1-\nu}\left(\int_{x_0}^{1} \varepsilon_m{}^p(x)\,dx + \alpha \int_0^1 t(\tau, x)\,dx - \alpha t(\tau, x)\right) \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_0) \\ \sigma &= \frac{E}{1-\nu}\left(\int_{x_0}^{1} \varepsilon_m{}^p(x)\,dx + \alpha \int_0^1 t(\tau, x)\,dx - \varepsilon_m{}^p(x) - \alpha t(\tau, x)\right) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant 1) \end{aligned} \qquad (1.16)$$

Для отыскания остаточных напряжений достаточно в формулах (1.16) устремить $\tau$ к бесконечности, т. е. принять стационарное температурное поле.

Рассмотренное решение полностью применимо для описания процесса прогрева или охлаждения тонкой бесконечно длинной полосы, имеющей ширину, равную $2L$ при симметричном относительно оси полосы температурном поле.

Для использования в этом случае вышеприведенных результатов достаточно во всех формулах заменить $1 - \nu$ на 1.

2. Рассмотрим действие на плиту теплового удара, при котором температура на граничных плоскостях плиты внезапно повышается на величину $t_0$ и в дальнейшем поддерживается на неизменном уровне. Для малых значений безразмерного времени $\tau$ температурное поле на половине толщины приближенно соответствует закону температур в полупространстве

$$t = t_0 \operatorname{erfc} \frac{1-x}{2\sqrt{\tau}} \qquad \left(\operatorname{erfc} z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\theta^2} d\theta\right) \qquad (2.1)$$

При законе (2.1) уравнения (1.6) и (1.12) приводятся к следующему виду:

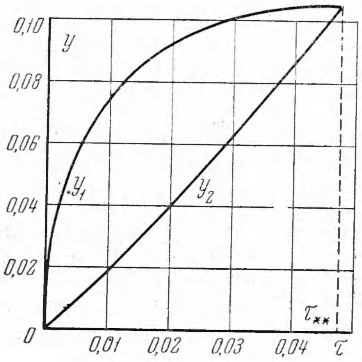
$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{d\xi} \exp\left(-\frac{y_1^2}{4\xi^2}\right) = \frac{y_1}{\xi} \exp\left(-\frac{y_1^2}{4\xi^2}\right) - \frac{y_2}{\xi} \exp\left(-\frac{y_2^2}{4\xi^2}\right) \\ \left[(1 - y_1 + y_2)\frac{y_2}{2\xi^2} + 1\right] \exp\left(-\frac{y_2}{4\xi^2}\right) - \exp\left(-\frac{y_1^2}{4\xi^2}\right) - 1 + \exp\left(-\frac{1}{4\xi^2}\right) = 0 \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Здесь $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - x_2$, $\xi = \sqrt{\tau}$.

Решение системы (2.2) ищем в виде рядов

$$y_1 = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots, \qquad y_2 = b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \ldots$$

коэффициенты которых без труда определяются при устремлении $\xi \to 0$ в равенствах (2.2) и в серии равенств, получающихся из (2.2) путем последовательного дифференцирования по $\xi$. (При этом последний член во втором равенстве (2.2) без заметного ущерба для точности может быть отброшен.)




Фиг. 1

С точностью до члена порядка $\xi^4$ решение представляется следующими формулами

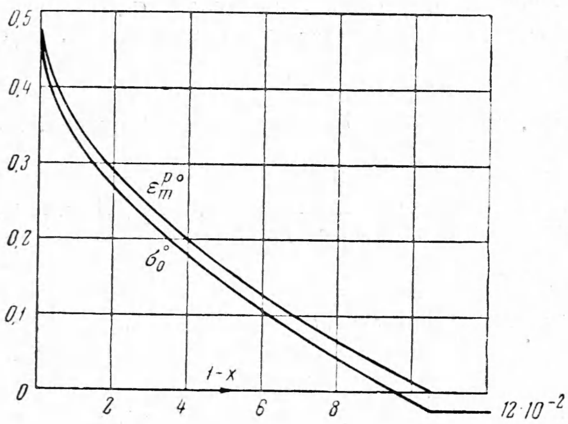
$$y_1 = a_1\xi - 2\xi^2 - a_1\xi^3 + \frac{2}{3}\left[(2 - a_1^2) + p\right]\xi^4$$

$$y_2 = 2p\xi^2 + 4a_1p\xi^3 + 2p\left[3(a_1^2 - 1) - p(1 - p)\right]\xi^4$$

$$\left(p = \exp\frac{-a_1^2}{4}\right) \qquad (2.3)$$

Постоянная $a_1$ определяется на основании начальных условий. Из (1.3) при $\xi \to 0$, $x = 1$ получим

$$\varepsilon_m^p = -\frac{1 - \nu}{E}\sigma_s - \alpha t_0$$




Фиг. 2

С другой стороны, устремляя $\xi$ к нулю в формуле (2.1) при $x = x_1$, из (1.15) найдем

$$\varepsilon_m^p = \alpha t_0\left(\operatorname{erfc}\frac{a_1}{2} - 1\right)$$

Из последних двух соотношений найдем условие для определения постоянной $a_1$ в следующем виде:

$$\operatorname{erfc}\frac{a_1}{2} = s,$$

$$s = \frac{(1 - \nu)\,|\sigma_s|}{E\alpha t_0} \qquad (2.4)$$

На фиг. 1 представлены законы распространения фронта пластического нагружения и фронта разгрузки, рассчитанные по формулам (2.3) при $s = 0.5$.

Как видно, зона разрузки появляется в начальный момент, так же как и зона активной пластической деформации. В момент $\tau = \tau_{**}$ зона активной пластической деформации исчезает и начинается стадия общей разгрузки плиты.

На фиг. 2 представлены графики безразмерной остаточной деформации $\varepsilon_m^{p\circ} = \varepsilon_m^p/\alpha t_0$ и остаточного напряжения $\sigma_0^0 = (1 - \nu)\sigma_0/E\alpha t_0$ для $s = 0.5$.

На фиг. 3 изображена зависимость относительной толщины $y_0$ зоны, подвергнувшейся пластическому деформированию, от параметра $s$.

Как показывает анализ, при $s < 0.28$ в рассматриваемом случае теплового удара при сделанном предположении о независимости физических и механических характеристик материала от температуры в плите появляется вторая зона пластической деформации, которая начинает развиваться от срединной плоскости плиты, и при весьма малых $s$ близко подходит к периферийной пластической области. В данной работе действие теплового удара при $s < 0.28$ количественно не рассматривается.

4. Упруго-пластические деформации в свободной плите при несимметричном температурном поле могут быть рассмотрены методом, изложенным в п. п. 2 и 3.

Допустим, что свободная плита произвольного очертания в плане, имеющая постоянную толщину $L$, подвергается воздействию температуры $t = t(\tau, x)$; $x$ отсчитывается от одной из граничных плоскостей в направлении другой плоскости. При несимметричном относительно срединной поверхности температурном поле плита искривится; при этом величина кривизны при выбранных условиях во всех точках срединной поверхности должна быть одинакова и изменяться только в зависимости от времени. В левой части формул (1.1), (1.2) и (1.3) вместо $\varepsilon$ следует поставить $\varepsilon_1 + \mu x$, где $\varepsilon_1$ —

полная деформация при $x = 0$; разница деформаций $\mu$ на граничных поверхностях, связана с кривизной срединной поверхности $\varkappa$ очевидным соотношением $\mu = \varkappa L$.

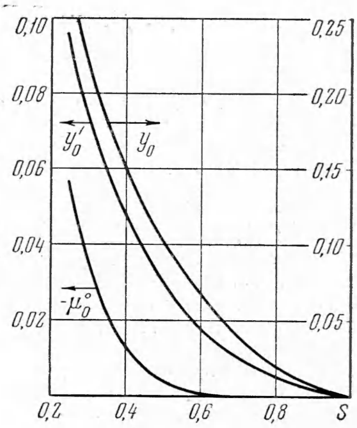
Для свободной плиты, кроме условия равновесия (1.5), должно быть выполнено требование равенства нулю изгибающего момента в сечении плиты, записываемое в виде

$$\int_0^1 \sigma x\, dx = 0$$

где $\sigma$ по-различному выражается в упругой зоне, зоне активной пластической деформации и зоне разгрузки.

Рассуждения, во многом сходные с тем, что использованы в п. 2, приводят к следующим основным уравнениям для свободной плиты

$$x_1^2\theta(\tau, x_1) + 2x_1 \int_0^{x_1} \theta(\tau, x)\, dx - 6\int_0^1 \theta(\tau, x) x\, dx = (3 - 2x_1)\, s \qquad \left(\theta = \frac{t}{t_0}\right) \qquad (3.1)$$




Фиг. 3

Уравнение (3.1) дает закон перемещения фронта нагружения на второй стадии процесса. На третьей стадии $x_1$, $x_2$ и $\mu^\circ = \mu / \alpha t_0$ определяются системой уравнений

$$\left(\frac{\partial\theta(\tau, x_1)}{\partial x_1} - \mu^\circ\right)\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\partial\theta(\tau, x_2)}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta(\tau, x_1)}{\partial\tau} - (x_2 - x_1)\frac{d\mu^\circ}{d\tau}$$

$$(1 + x_1 - x_2)\frac{\partial\theta(\tau, x_2)}{\partial\tau} - \int_0^{x_1}\frac{\partial\theta(\tau, x)}{\partial\tau}\, dx - \int_{x_2}^1 \frac{\partial\theta(\tau, x)}{\partial\tau}\, dx + \left[\frac{1}{2} - x_2 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2}\right]\frac{d\mu^\circ}{d\tau} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\frac{1}{2}(1 + x_1^2 - x_2^2)\frac{\partial\theta(\tau, x_2)}{\partial\tau} - \int_0^{x_1}\frac{\partial\theta(\tau, x)}{\partial\tau}\, x dx - \int_{x_2}^1 \frac{\partial\theta(\tau, x)}{\partial\tau}\, x dx + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^2(2x_1 + x_2)\right]\frac{d\mu^\circ}{d\tau} = 0$$

Для температурного поля (2.1) решение системы (3.2) имеет следующий вид:

$$y_1 = a_1\xi - 8\xi^2 + \left(6\sqrt{\pi}\,\frac{s}{p} + 2a_1\right)\xi^3 + \ldots \qquad \mu^\circ = \frac{12p\xi}{\sqrt{\pi}} + \left(-12s + \frac{36a_1p}{\sqrt{\pi}}\right)\xi^2 + \ldots$$

$$y_2 = 8p\xi^2 + (-12\sqrt{\pi}s + 52a_1p)\,\xi^3 + \ldots$$

$a_1$ определяется из условия (2.4).

Остаточная кривизна $\mu_0^\circ$ может быть найдена на основании теоремы о разгрузке. Для чисто упругого искривления плиты легко получить результат в виде

$$\mu_e^\circ = \frac{12}{\sqrt{\pi}}\xi - 12\xi^2 + 12\xi^2 \operatorname{erfc}\frac{1}{2\xi}$$

Остаточная кривизна $\mu_0$ отыщется по формуле $\mu_0^\circ = \mu^\circ(\xi_{**}) - \mu_e^\circ(\xi_{**})$; имеем

$$\mu_0^\circ = -\frac{12}{\sqrt{\pi}}(1 - p)\xi_{**} + \left[12(1 - s) + \frac{36}{\sqrt{\pi}}a_1p\right]\xi_{**}^2 - 12\xi_{**}^2 \operatorname{erfc}\frac{1}{2\xi_{**}}$$

где $\xi_{**}^2 = \tau_{**}$ — момент исчезновения зоны активной пластической деформации, определяемый из условий $y_1(\xi_{**}) = y_2(\xi_{**})$.

На фиг. 3 представлены графики $y_0'$ и $\mu_0^\circ$ в зависимости от $s$, позволяющие судить о глубине проникновения ($y_0'$) пластической деформации и об остаточном искривлении ($\mu_0^\circ$) свободной плиты при тепловом ударе.

Московский энергетический институт

Поступила 31 1 1961

## ЛИТЕРАТУРА

1. Landau H. G., Weiner J. H. Transient and residual stresses in heat — treated plates. Journ. Appl. Mech., v 25, No. 4, 1958.